MMI 1 (Calcul Formel) : Examen de Janvier 2007.

Seules les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) QUESTION DE COURS. —

1) Rappeler, en donnant les grammaires, ce que sont

a) les arbres binaires complets

b) les arbres binaires généraux

c) les arbres 1-2

2) a) Donner les séries par nombre de nœuds.

b) Quelles sont celles que l'on ne peut pas calculer par nombre de feuilles ? Pourquoi ?

c) Donner les SG par nombre de feuilles.

3) Que sont les nombres de Catalan ? Qu'est-ce qu'ils énumèrent ?

II) EXERCICES. —

1) Développer les séries suivantes :

$$\text{a) } \frac{1}{1-z^3} \quad \text{b) } \frac{1-z}{1+z} \quad \text{c) } \frac{1-\sqrt{1+z^2}}{z}$$

2) Sommer :

$$\text{a) } \sum_{n\geq 0} nz^{3n} \quad \text{b) } \sum_{n\geq 0} n(n-1)z^n \quad \text{c) } \sum_{n\geq 0} n^2 z^n$$

3) Opérateurs :

a) Soit $S = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une SG, montrer que

$$\text{i) } (z\frac{d}{dz})[S] = \sum_{n\geq 0} na_n z^n \quad \text{ii) } \frac{1}{1-z}.S = \sum_{n\geq 0}(\sum_{j=0}^{n} a_j)z^n$$

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 z^n = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}$ (on utilisera deux fois l'opérateur de "a)i)").

c) En utilisant "b)i)", calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(\sum_{j=0}^{n} j^2)z^n$.

d) En utilisant le développement de $n(n+1)(2n+1)$ montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} z^n = \frac{z(z+1)}{(1-z)^4}$$

e) Qu'en concluez-vous ?

4) Arbres avec restrictions : On considère la classe $\mathcal{C}$ des arbres 1-2 tels que si un nœud a un père de degré 1 alors lui-même est de degré 2 (le degré d'un nœud est le nombre de ses fils).

a) Montrer que la grammaire (sous forme parenthésée) de cette classe d'arbres est

$$\mathcal{A} = \bullet + (\bullet) + (\mathcal{A},\mathcal{A}) + ((\mathcal{A},\mathcal{A})) \tag{1}$$

et la noter sous forme arborescente.

b) En déduire la série génératrice de $\mathcal{C}$ par nombre de nœuds. Est-il possible de la donner par nombre de feuilles ? si oui, la calculer.

III) Problèmes : structures informatiques

Le but de ce problème est de manipuler les ordres qui permettent de numéroter et d'engendrer des structures informatiques de base.
A) "Balls and bars" (BB). —
On appelle ainsi des structures du type

$$\bullet \,|\, \bullet \bullet \bullet \,|\, \bullet \,|\, \bullet \bullet \tag{2}$$

c'est à dire des points équidistants et horizontaux séparés par des | de façon que :

Toutes les barres ont (au moins) un point qui les précède et un point qui les suit.

1) Montrer que de telles structures peuvent être engendrées par une grammaire que l'on précisera.
2) Se servir de ce qui précède pour montrer que la série génératrice $S = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ (a_n étant le nombre de ces structures avec n points) vérifie

$$S = 1 + z + 2z(S-1) \tag{3}$$

3) Résoudre (3) et montrer que $a_n = 2^{n-1}$ pour $n > 0$.
4) Un *vecteur d'entiers* (VE) est une liste d'entiers non nuls $\mathbf{I} = [i_1,i_2,\cdots i_k]$ et son *poids* est la somme de ses coordonnées. En voici quelques uns avec leur poids

$\mathbf{I}$	[1,4]	[3,1,1]	[2,1,3]	[1,2,1,3]
$poids(\mathbf{I})$	0	5	6	7

a) Donner une correspondance entre les BB de poids n et les vecteurs d'entiers de poids n.
On attribue à chaque (VE) $\mathbf{I} = [i_1,i_2,\cdots i_k]$ de poids $n > 0$ un nombre binaire sur $n-1$ bits dont les 1 sont aux places $(i_1,i_1+i_2,\cdots,(\sum_{j=1^r} i_j)),\cdots,i_1,i_1+i_2\cdots i_{k-1})$ cette dernière somme étant $n - i_k$.
Voici les VE de poids 4 et leurs numéros binaires

$\mathbf{I}$	[4]	[3,1]	[2,2]	[2,1,1]	[1,3]	[1,2,1]	[1,1,2]	[1,1,1,1]
Numéro	000	001	010	011	100	101	110	111

b) Donner les 10 premières compositions de poids 5 et leur numéro binaire, classées (comme dans l'exemple) par ordre croissant de ce numéro.
c) Si on désigne par $\prec_{lex}$ l'ordre lexicographique entre les vecteurs d'un poids donné et $<$, l'ordre entre les entiers binaires, établir une relation entre les deux ordres.
B) (Listes sans répétitions). —
Soit $E = a,b,c\cdots z$ l'alphabet usuel ordonné par l'ordre du dictionnaire et $k \leq 26$. On note SR_E^k l'ensemble des mots de longueur k (ou listes, c'est la même chose) sans répétitions (i.e. les objets sont $x_1x_2\cdots x_k$ avec $i < j \Longrightarrow x_i \neq x_j$). Pour $k = 3$, les premièrs mots, par ordre lexicographique, sont (les traits qui soulignent ne font pas partie de la structure, mais sont là pour aider à la solution des (1)b) et (2)).

$$abc,abd\cdots ab\underline{z},\cdots a\underline{zy}\cdots bac\cdots ba\underline{z},bca,bcd,\cdots ba\underline{z},bda,\cdots b\underline{zy}\cdots \tag{4}$$

1) ($k = 3$) a) Montrer que zyx est le dernier mot de la liste.
b) Pour les mots de longueur 3 différents de zyx, trouver la loi de formation du suivant.
2) Trouver le procédé général pour k quelconque.