Ilog3 (Théorie des Langages): Partiel de Janvier 2006.

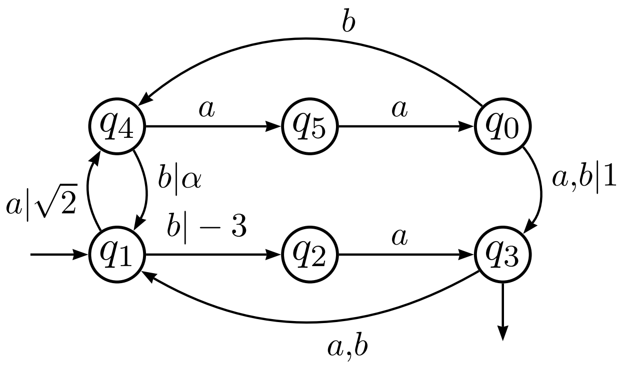
Seuls les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Question de Cours:

1) a) Qu'est-ce qu'un Automate Fini (AF)? Quels sont les mots qu'il reconnaît?
b) Qu'est-ce qu'un AFDC? Comment change le langage reconnu quand on modifie l'état initial? les états finaux?
Indication. — Si q est un état de l'AFDC considéré $\mathcal{A}$ et H un ensemble d'états, on notera $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q,H)$, l'ensemble $\{w \in A^* | q.w \in H\}$. Écrire les formules précises donnant $\mathcal{L}$ en fonction de q et de H
c) Comment transformer un automate en automate complet?
Indication. — On pourra s'inspirer du II) 3) ci-dessous.

2) a) Soit $L \subseteq A^*$ et $u \in A^*$. Comment sont définis les décalés $u^{-1}L$ et Lu^{-1}?
b) À quoi est égal $v^{-1}(u^{-1}L)$? $(Lu^{-1})v^{-1}$? La réponse est à donner sous forme d'un seul décalage.
c) Comment calcule-t-on l'automate des décalés d'un langage?
On donnera: les états, la fonction de transition et les entrées/sorties.
d) Quand l'automate précédent est-il fini?

3) a) Soit $A = \{a,b\}$. Écrire la table de l'automate ci-dessous (entrées, sorties, transitions).



b) Quels sont ses qualités? **Indication : déterministe, complet, etc.**
c) En donner la matrice-lettre.

II) Exercices
Dans la suite A est un alphabet, $A^+ = A^* - \{\epsilon\}$ est l'ensemble des mots non vides et, si P est une propriété, $[P]$ est le symbole d'Iverson (valant 1 si la propriété est vraie et 0 sinon).
1) a) Ici $A = \{a,b\}$, donner une expression rationnelle la plus concise possible pour les ensembles suivants.

i) $aA^* \cap A^*b$ ii) $A^*a + A^*$ iii) $A^* - A^*aa$ (3 facteurs)
iv) $A^* - A^*baA^*$ (produit de deux étoiles).

b) Former les automates minimaux qui reconnaissent les langages précédents.
On a pas besoin de minimisation, il faut former l'automate des décalés.
On donnera: les états, la fonction de transition et les entrées/sorties.

2) (Décalages). —
a) Cours. — Redémontrer, pour $M,L \subseteq A^*$; $a,b \in A$ les formules suivantes

♣) $a^{-1}(L+M) = a^{-1}(L) + a^{-1}(M)$ ♢) $a^{-1}(LM) = a^{-1}(L)M + [\epsilon \in L]La^{-1}(M)$
♡) $a^{-1}(L^*) = a^{-1}(L)(L^*)$ ♠) $a^{-1}(b) = [a = b]\epsilon$; $a^{-1}(\epsilon) = \emptyset$

b) Expliquer pourquoi les formules précédentes peuvent servir de définition à l'opérateur $a^{-1}(?)$.
c) Montrer les propriétés suivantes :

$$\text{i) } a^{-1}(L) = a^{-1}(L \cap aA^*) \quad \text{ii) } L = [\epsilon \in L]\epsilon + \textstyle\sum_{a \in A} L \cap aA^*$$
$$\text{iii) } \big((\forall a \in A)(a^{-1}L = a^{-1}M)\big) \iff \big(L \cap A^+ = M \cap A^+\big)$$

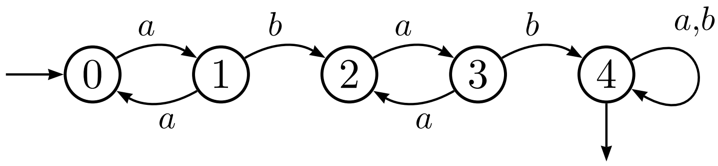
d) Déduire du (c) le lemme de reconstruction

$$L = [\epsilon \in L]\epsilon + \sum_{a \in A} a(a^{-1}L) \tag{1}$$

3) (Complété d'un AFD). —
Soit $\mathcal{A} = (Q,A,\bullet,q_0,F)$ un automate fini déterministe (i.e. $(\forall a \in A)(\forall q \in Q)(|q.a| \leq 1)$. Soit la nouvelle fonction de transition $\circ$ sur $Q \cup \{p\}$ ($p \notin Q$ est un nouvel) obtenue en rajoutant un état supplémentaire et les flêches (q,x,p) pour $q.x = \emptyset$ et (p,x,p) pour touutes les lettres $x \in A$.
a) Montrer que le nouvel automate $\mathcal{A}^c = (Q \cup \{p\},A,\circ,q_0,F)$

1. est déterministe et complet
2. est équivalent à $\mathcal{A}$ (i.e. reconnait le même langage).

b) Appliquer la procédure sur l'automate suivant, d'alphabet de commande $A = \{a,b\}$ (on dessinera l'automate $\mathcal{A}^c$ obtenu).



c) Donner une expression rationnelle du langage reconnu par l'automate précédent.

III. (Petit) Problème

Le but du problème ci-dessous est de définir une classe de mots (les grands Dycks) de deux manières (par une condition numérique, par une grammaire) et de donner l'équivalence entre ces deux définitions.

1) Soit $A = \{x,\bar{x}\}$, un alphabet à deux lettres. On définit une fonction de poids $\pi : A^* \mapsto \mathbb{Z}$ par

$$\pi(x) = 1,\ \pi(\bar{x}) = -1,\ \pi(uv) = \pi(u) + \pi(v) \tag{2}$$

a) Montrer, par récurrence sur la longueur du mot w, que $\pi(w) = |w|_x - |w|_{\bar{x}}$. En déduire que si $\pi(w) = 0$ alors $|w|$ est pair.

On définit les langages suivants :

$$GD \;:=\; \{w \in A^* \big| \pi(w) = 0\} \tag{3}$$
$$GD_+ \;:=\; \{w \in GD \big| w = uv \Longrightarrow \pi(u) \geq 0\} \tag{4}$$
$$GD_- \;:=\; \{w \in GD \big| w = uv \Longrightarrow \pi(u) \leq 0\} \tag{5}$$

b) En associant a chaque lettre un "pas" (nord-est pour x et sud-est pour $\bar{x}$), on fait correspondre à chaque mot un chemin. Donner la signification graphique de chacun des langages ci-dessus.
c) Voici, pour vérification, les distributions de longueur de GD,GD_+ (la distribution de GD_- est la même que celle de GD_+).

n	0	2	4	6	8
$\lvert GD \cap A^n \rvert$	1	2	6	20	70
$\lvert GD_+ \cap A^n \rvert$	1	1	2	5	14

donner la liste des mots de GD de longeur 2,4 et de GD_+ de longeur 6,8.
c) Montrer que GD_+ est le langage défini par la grammaire suivante

$$T \to \epsilon;\ T \to xT\bar{x};\ T \to TT \tag{6}$$

2) a) Donner une description équivalente à (6) pour GD_-.
b) En déduire que GD est le langage engendré par la grammaire suivante

$$P \to \epsilon;\ P \to xP\bar{x};\ P \to PP;\ N \to \epsilon;\ N \to \bar{x}Nx;\ N \to NN;$$
$$T \to \epsilon;\ T \to TT;\ T \to xP\bar{x};\ T \to \bar{x}Nx$$