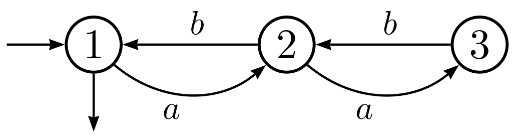
Info1 (Théorie des Langages): Devoir de Juin 2012.
À rendre pour le 28.06 dernier délai [1].

Il est recommandé de s'efforcer à rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées, il est conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Question de Cours:

1) a) Qu'est-ce qu'un langage ? Donnez des exemples significatifs.
Dans cette question de cours, à partir de maintenant, $A = \{a, b\}$.
b) Comment est défini le langage des mots de Dyck ?, celui des mots sans facteur b^2 (on notera ce dernier L_{b^2}).
c) Rappeler la grammaire de L_{b^2} et l'automate à 3 états qui reconnait ce langage.

2) a) Écrire la table de l'automate ci-dessous (entrées, sorties, transitions).



b) Quel est le langage reconnu par cet automate ?
c) Peut-on réduire son nombre d'états ?

II) Exercices

Dans la suite A est un alphabet, $A^+ = A^* - \{\epsilon\}$ est l'ensemble des mots non vides et, si P est une propriété, $[P]$ est le symbole d'Iverson (valant 1 si la propriété est vraie et 0 sinon).
1) (Décalages). —
On rappelle qu'étant donné un mot $u \in A^*$ et un langage $L \subset A^*$, on définit le décalage (à gauche) de L par w par $u^{-1}L = \{w \in A^* | uw \in L\}$.
a) Démontrer, pour $M, L \subseteq A^*$; $a, b \in A$; $u, v \in A^*$ les formules suivantes

i) $a^{-1}(L + M) = a^{-1}(L) + a^{-1}(M)$ ii) $a^{-1}(LM) = a^{-1}(L)M + [\epsilon \in L]La^{-1}(M)$
iii) $a^{-1}(L^*) = a^{-1}(L)(L^*)$ iv) $a^{-1}(b) = [a = b]\epsilon;\ a^{-1}(\epsilon) = \emptyset$
v) $u^{-1}v^{-1}(L) = (vu)^{-1}(L)(L^*)$

b) Calculer à l'aide des formules précédentes les décalés de $(a^*b)^*$ (on remarquera qu'ils sont en nombre fini).
c) Montrer les propriétés suivantes :

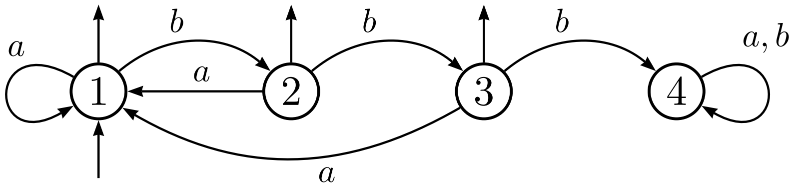
i) $a^{-1}(L) = a^{-1}(L \cap aA^*)$ ii) $L = [\epsilon \in L]\epsilon + \sum_{a \in A} L \cap aA^*$
iii) $\big((\forall a \in A)(a^{-1}L = a^{-1}M)\big) \Longleftrightarrow \big(L \cap A^+ = M \cap A^+\big)$

d) Déduire du (c) le lemme de reconstruction

$$L = [\epsilon \in L]\epsilon + \sum_{a \in A} a(a^{-1}L) \tag{1}$$

2) Soit $A = \{a, b\}$ et $L_{b^3} = A^* - A^*b^3A^*$ (mots sans facteur b^3).
a) Écrire une grammaire pour L_{b^3} sur le modèle de celle, écrite en cours, pour L_{b^2}.
b) Montrer, en analysant les chemins que l'automate suivant reconnait L_{b^3}.

[1] Bi- et tri-nômes possibles, mais copies individuelles (mentionner les noms de l'équipe sur chaque copie).



III. (Petit) Problème (Plusieurs systèmes de parenthèses).

Ici, l'alphabet est formé de symboles (dans S) et de deux systèmes de paranthèses $\{(,\ ),\ [,\ ]\}$ (sans élémeent commun avec S) ainsi, l'alphabet total est $A = S \cup \{(,\ ),\ [,\ ]\}$ (facteurs disjoints). On dit qu'une expression (i.e., un mot $w \in A^*$) est bien formée si il est produit par la grammaire suivante

$$E = \epsilon + A + E.E + (E) + [E] \tag{2}$$

1) Énoncer, en langue naturelle, les règles de cette grammaire et expliquez en quoi elle définit les expressions bien formées.
2) Montrez, sur un exemple, que la grammaire (2) est ambigüe, c'est à dire que certains mots peuvent être formés de plusieurs façons différentes.
3) Montrer que le langage E peut-être aussi produit par la grammaire suivante

$$E = \epsilon + A.E + (E).E + [E].E \tag{3}$$

4) La grammaire (3) est-elle ambigüe ?
5) Peut-on généraliser ces résultats à un alphabet quelconque de symboles ouvrants $A = \{a, b, \cdots\}$ et fermants leur correspondant $\bar{A} = \{\bar{a}, \bar{b}, \cdots\}$? Donner une exemple avec 3 symboles ouvrants et 3 symboles fermants et deux lettres.