Ilog1 (Théorie des Langages): Devoir de Juin 2009.

Il est recommandé de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées, il est conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Question de Cours:

1) a) Qu'est-ce qu'un Automate Fini (AF) ? Quels sont les mots qu'il reconnaît ?
b) Qu'est-ce qu'un AFDC ? Comment change le langage reconnu quand on modifie l'état initial ? les états finaux ?

Indication. — Si q est un état de l'AFDC considéré $\mathcal{A}$ et H un ensemble d'états, on notera $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q,H)$, l'ensemble $\{w \in A^* | q.w \in H\}$. Écrire les formules précises donnant $\mathcal{L}$ en fonction de q et de H

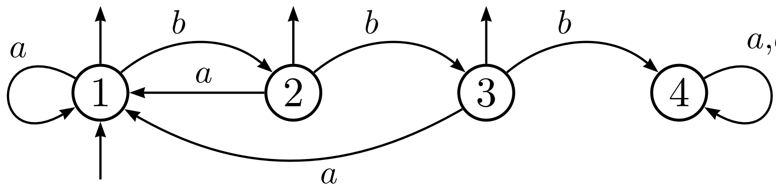
c) Comment transformer un automate en automate complet ?

Indication. — On pourra s'inspirer du II) 3) ci-dessous.

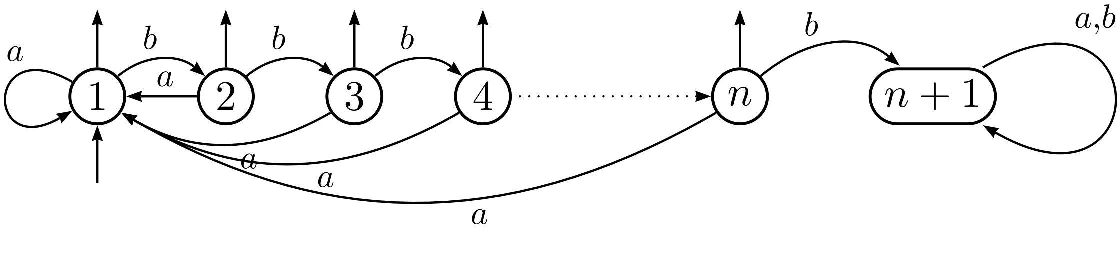
2) a) Soit $L \subseteq A^*$ et $u \in A^*$. Comment sont définis les décalés $u^{-1}L$ et Lu^{-1} ?
b) À quoi est égal $v^{-1}(u^{-1}L)$? $(Lu^{-1})v^{-1}$? La réponse est à donner sous forme d'un seul décalage.
c) Comment calcule-t-on l'automate des décalés d'un langage ?
On donnera : les états, la fonction de transition et les entrées/sorties.
d) Quand l'automate précédent est-il fini ?

II) Exercices:

A) 1) a) Que reconnaît l'automate suivant ? Justifiez.



b) Cet automate ($\mathcal{A}_3$) est le troisième d'une série dont voici le nième ($\mathcal{A}_n$). Que reconnait ($\mathcal{A}_n$) ? justifiez.



c) On notera L_n le langage reconnu par l'automate ($\mathcal{A}_n$). Les L_n sont-ils disjoints ?
d) Donner une grammaire pour L_n.

B) Dans la suite $A = \{a,b\}$ est un alphabet à deux lettres, $A^+ = A^* - \{\epsilon\}$ est l'ensemble des mots non vides.
1) a) Montrer les égalités.

i) $aA^*b = a^+b(a^*b)^*$	ii) $A^*b + \epsilon = (a^*b)^*$	iii) $aA^* \cap A^*b = aA^*b$
iv) $(A^*b + \epsilon) - A^*a^2A^* = (a^+b)^*$	v) $bA^*a = (b^+a^+)^+$	vi) $A^* - A^*baA^* = a^*b^*$

b) Former les automates minimaux qui reconnaissent les langages précédents.
On a pas besoin de minimisation, il faut former l'automate des décalés.
On donnera : les états, la fonction de transition et les entrées/sorties.
Pour le (iii), on partira de l'automate des intersections.

III. Problème

Le but du problème ci-dessous est de définir une classe de mots (les grands Dycks) de deux manières (par une condition numérique, par une grammaire) et de donner l'équivalence entre ces deux définitions.

1) Soit $A = \{x,\bar{x}\}$, un alphabet à deux lettres. On définit une fonction de poids $\pi : A^* \mapsto \mathbb{Z}$ par

$$\pi(x) = 1,\ \pi(\bar{x}) = -1,\ \pi(uv) = \pi(u) + \pi(v) \tag{1}$$

a) Montrer, par récurrence sur la longueur du mot w, que $\pi(w) = |w|_x - |w|_{\bar{x}}$. En déduire que si $\pi(w) = 0$ alors $|w|$ est pair.

On définit les langages suivants :

$$\begin{aligned} GD &:= \{w \in A^* \big| \pi(w) = 0\} & (2)\\ GD_+ &:= \{w \in GD \big| w = uv \Longrightarrow \pi(u) \geq 0\} & (3)\\ GD_- &:= \{w \in GD \big| w = uv \Longrightarrow \pi(u) \leq 0\} & (4) \end{aligned}$$

b) En associant a chaque lettre un "pas" (nord-est pour x et sud-est pour $\bar{x}$), on fait correspondre à chaque mot un chemin. Donner la signification graphique de chacun des langages ci-dessus.
c) Voici, pour vérification, les distributions de longueur de GD,GD_+ (la distribution de GD_- est la même que celle de GD_+).

n	0	2	4	6	8
$\|GD \cap A^n\|$	1	2	6	20	70
$\|GD_+ \cap A^n\|$	1	1	2	5	14

donner la liste des mots de GD de longeur 2,4 et de GD_+ de longeur 6,8.
c) Montrer que GD_+ est le langage défini par la grammaire suivante

$$T \to \epsilon;\ T \to xT\bar{x};\ T \to TT \tag{5}$$

2) a) Donner une description équivalente à (5) pour GD_-.
b) En déduire que GD est le langage engendré par la grammaire suivante

$$\begin{aligned} &P \to \epsilon;\ P \to xP\bar{x};\ P \to PP;\ N \to \epsilon;\ N \to \bar{x}Nx;\ N \to NN;\\ &T \to \epsilon;\ T \to TT;\ T \to xP\bar{x};\ T \to \bar{x}Nx \end{aligned}$$