Info1 (Théorie des Langages): Partiel du 18 juin 2009.

Seuls les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Question de Cours:

1) a) Qu'est-ce qu'un Automate Fini (AF)? Comment définit-on les mots qu'il reconnaît?
b) Soit $L \subseteq A^*$ et $u \in A^*$. Comment sont définis les décalés $u^{-1}L$?
c) Comment calcule-t-on l'automate des décalés d'un langage?
On donnera : les états, la fonction de transition et les entrées/sorties.
d) Quand cet automate est-il fini?
2) a) Qu'est-ce qu'un AFDC?
Dans la suite on le notera $\mathcal{A} = (Q,A,\bullet,q_0,F)$ un AFDC, $L(\mathcal{A})$ le langage reconnu par $\mathcal{A}$ et, pour $X \subset Q$,

$$L_{\mathcal{A}}(X) = \{w \in A^* | q_0.w \in X\} \ .$$

b) Expliquer pourquoi $L_{\mathcal{A}}(Q - X) = A^* - L_{\mathcal{A}}(X)$.
c) La propriété est-elle encore vraie si l'automate est seulement un AFD? (i. e. non complet).
d) Applications. —
Calculer un automate reconnaissant les langages suivants

$$\text{i) } A^* - A^*abaA^* \quad \text{ii) } A^* - baA^*$$

II) Exercices

Dans la suite $A = \{a,b\}$ est un alphabet à deux lettres et, si $L \subset A^*$,

$$L^+ = L + L^2 + \cdots = \sum_{k \geq 1} L^k \ .$$

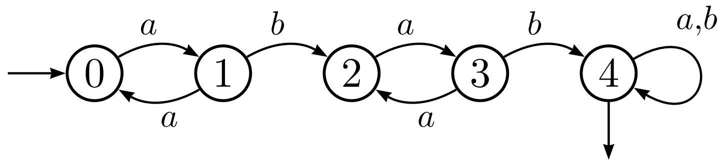
1) a) Montrer les égalités.

i) $A^*abA^* \cap A^*baA^* = A^*ab^+aA^* + A^*ba^+bA^*$ ii) $A^*b + \epsilon = (a^*b)^*$ iii) $aA^*b = a^+b(a^*b)^*$
iv) $(A^*b + \epsilon) - A^*b^2A^* = (a^+b)^*$ v) $bA^*a = (b^+a^+)^+$ vi) $A^* - A^*baA^* = a^*b^*$

b) Former les automates minimaux qui reconnaissent les langages précédents.
On a pas besoin de minimisation, il faut former l'automate des décalés.
On donnera : les états, la fonction de transition et les entrées/sorties.
2) (Complété d'un AFD). —
Soit $\mathcal{A} = (Q,A,\bullet,q_0,F)$ un automate fini déterministe (i.e. $(\forall a \in A)(\forall q \in Q)(|q.a| \leq 1)$. Soit la nouvelle fonction de transition $\circ$ sur $Q \cup \{p\}$ ($p \notin Q$ est un nouvel) obtenue en rajoutant un état supplémentaire et les flêches (q,x,p) pour $q.x = \emptyset$ et (p,x,p) pour toutes les lettres $x \in A$.
a) Montrer que le nouvel automate $\mathcal{A}^c = (Q \cup \{p\},A,\circ,q_0,F)$

1. est déterministe et complet
2. est équivalent à $\mathcal{A}$ (i.e. reconnait le même langage).

b) Appliquer la procédure sur l'automate suivant, d'alphabet de commande $A = \{a,b\}$ (on dessinera l'automate $\mathcal{A}^c$ obtenu).



c) Donner une expression rationnelle du langage reconnu par l'automate précédent.