

Ilog3 (Théorie des Langages): Partiel de Janvier 2007.

Seuls les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées.

Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) QUESTION DE COURS:

- 1) a) Comment s'implémente un (AF)? (on précisera en particulier le sens des éléments I , $(M(a))_{a \in \mathcal{A}}$ et F).
- b) Le produit $IM(w)F$ peut donner des valeurs différentes selon qu'on le calcule dans les booléens (règle $1 + 1 = 1$ et les naturels (règle $1 + 1 = 2$). Comment s'interprètent ces résultats?

2) a) Donner l'algorithme de minimisation d'un AFDC. Le faire tourner sur un exemple.

b) Comment compléter un AFD? donner un exemple.

3) a) Qu'est-ce qu'une expression rationnelle? Donner des exemples.

b) Qu'est-ce que la matrice-lettre associée à un automate? Quel est le lien entre cette matrice et une expression rationnelle du langage reconnu par l'automate.

4) Soit $A = (Q, \mathcal{A}, T, I, F)$, $R \subset Q$, $q_1, q_2 \in Q$. On définit le langage $\mathcal{L}(q_1, q_2, R)$ comme l'ensemble des étiquettes des chemins tracés dans R (les sommets sont dans R) et joignant q_1 à q_2 .

a) Montrer, par un argument simple, que $\mathcal{L}(q_1, q_2, R)$ est rationnel.

b) Montrer que

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, Q) = \mathcal{L}(q_1, q_1, Q) \left[\sum_{a \in \mathcal{A}} a \cdot \sum_{q \in q_1.a} \mathcal{L}(q, q_2, Q - \{q_1\}) \right] \quad (1)$$

$$\mathcal{L}(q, q, Q) = \left(\sum_{q \in q.a} a + \sum_{\substack{g \in q.a \\ g \neq q}} \sum_{\substack{q \in d.b \\ d \neq q}} a \cdot \mathcal{L}(g, d, Q - \{q\}) \cdot b \right)^* \quad (2)$$

c) Les formules précédentes permettent-elles de donner une expression rationnelle du langage reconnu par un automate? Si oui, comment?

II) EXERCICES

1) Dans cet exercice, $A = \{a, b\}$. Donner une expression rationnelle la plus concise possible des langages

$$\begin{array}{ll} \clubsuit) (ab)^* \cap (ba)^* & \diamond) (a^3 + b^3)^* \cap A^*b \\ \heartsuit) bA^* \cap baA^* & \spadesuit) aA^*a - A^*bA^* \end{array}$$

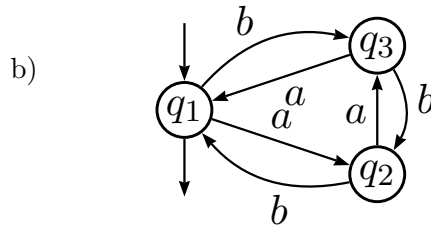
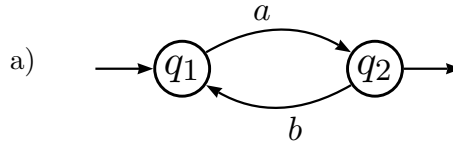
2) Soit $L = A^* - A^*a^3A^*$ (mots sans facteur a^3).

a) Montrer que L satisfait à l'équation

$$L = \epsilon + a + a^2 + bL + baL + ba^2L \quad (3)$$

b) Redonner l'expression de la plus petite solution de $X = AX + B$ et l'appliquer à (3) pour obtenir une expression rationnelle de L .

3) Quels sont les langages reconnus par les automates suivants



III. (Petit) Problème

Le but du problème ci-dessous est de définir une classe de mots (les grands Dycks) de deux manières (par une condition numérique, par une grammaire) et de donner l'équivalence entre ces deux définitions.

1) Soit $A = \{x, \bar{x}\}$, un alphabet à deux lettres. On définit une fonction de poids $\pi : A^* \mapsto \mathbb{Z}$ par

$$\pi(x) = 1, \pi(\bar{x}) = -1, \pi(uv) = \pi(u) + \pi(v) \quad (4)$$

a) Montrer, par récurrence sur la longueur du mot w , que $\pi(w) = |w|_x - |w|_{\bar{x}}$. En déduire que si $\pi(w) = 0$ alors $|w|$ est pair.

On définit les langages suivants :

$$GD := \{w \in A^* \mid \pi(w) = 0\} \quad (5)$$

$$GD_+ := \{w \in GD \mid w = uv \implies \pi(u) \geq 0\} \quad (6)$$

$$GD_- := \{w \in GD \mid w = uv \implies \pi(u) \leq 0\} \quad (7)$$

b) En associant à chaque lettre un "pas" (nord-est pour x et sud-est pour \bar{x}), on fait correspondre à chaque mot un chemin. Donner la signification graphique de chacun des langages ci-dessus.

c) Voici, pour vérification, les distributions de longueur de GD, GD_+ (la distribution de GD_- est la même que celle de GD_+).

n	0	2	4	6	8
$ GD \cap A^n $	1	2	6	20	70
$ GD_+ \cap A^n $	1	1	2	5	14

donner la liste des mots de GD de longueur 2,4 et de GD_+ de longueur 6,8.

c) Montrer que GD_+ est le langage défini par la grammaire suivante

$$T \rightarrow \epsilon; T \rightarrow xT\bar{x}; T \rightarrow TT \quad (8)$$

2) a) Donner une description équivalente à (8) pour GD_- .

b) En déduire que GD est le langage engendré par la grammaire suivante

$$P \rightarrow \epsilon; P \rightarrow xP\bar{x}; P \rightarrow PP; N \rightarrow \epsilon; N \rightarrow \bar{x}Nx; N \rightarrow NN;$$

$$T \rightarrow \epsilon; T \rightarrow TT; T \rightarrow xP\bar{x}; T \rightarrow \bar{x}Nx$$