Ilog3 (Théorie des Langages): Partiel de Décembre 2008.

Seuls les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Question de Cours:

1) a) Qu'est-ce qu'un Automate Fini (AF)? Comment définit-on les mots qu'il reconnaît?
b) Qu'est-ce qu'un AFDC? Comment change le langage reconnu quand on modifie l'état initial? les états finaux?

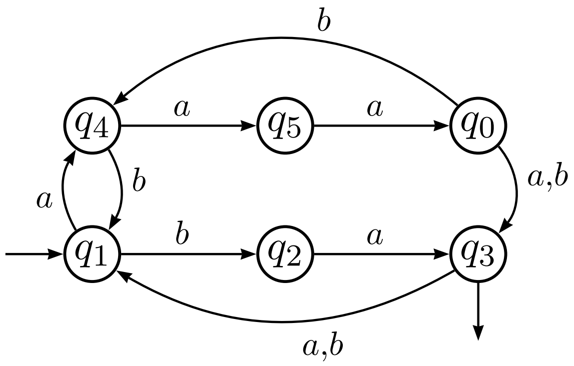
Indication. — Si q est un état de l'AFDC considéré $\mathcal{A}$ et H un ensemble d'états, on notera $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q,H)$, l'ensemble $\{w \in A^* | q.w \in H\}$. Écrire les formules précises donnant $\mathcal{L}$ en fonction de q et de H

c) Comment transformer un automate en automate complet?

Indication. — On pensera au rôle de l'état "poubelle" et on pourra s'inspirer du II) 3) ci-dessous.

2) a) Soit $L \subseteq A^*$ et $u \in A^*$. Comment sont définis les décalés $u^{-1}L$?
b) À quoi est égal $v^{-1}(u^{-1}L)$? La réponse est à donner sous forme d'un seul décalage.
c) Comment calcule-t-on l'automate des décalés d'un langage?
On donnera: les états, la fonction de transition et les entrées/sorties.
d) Quand cet automate est-il fini?

3) a) Soit $A = \{a,b\}$. Écrire les matrices de l'automate ci-dessous (entrées, sorties, transitions).



b) Quels sont ses qualités? **Indication: déterministe, complet, etc.**
c) En donner la matrice-lettre.

II) Exercices

Dans la suite $A = \{a,b\}$ est un alphabet à deux lettres, $A^+ = A^* - \{\epsilon\}$ est l'ensemble des mots non vides.

1) a) Montrer les égalités.

i) $aA^* \cap A^*b = aA^*b$	ii) $A^*b + \epsilon = (a^*b)^*$	iii) $aA^*b = a^+b(a^*b)^*$
iv) $(A^*b + \epsilon) - A^*a^2A^* = (a^+b)^*$	v) $bA^*a = (b^+a^+)^+$	vi) $A^* - A^*baA^* = a^*b^*$

b) Former les automates minimaux qui reconnaissent les langages précédents.
On a pas besoin de minimisation, il faut former l'automate des décalés.
On donnera: les états, la fonction de transition et les entrées/sorties.

2) (Décalages). —

a) Cours. — Redémontrer, pour $M,L \subseteq A^*$; $a,b \in A$ les formules suivantes

$\clubsuit$) $a^{-1}(L+M) = a^{-1}(L) + a^{-1}(M)$ $\quad$ $\diamondsuit$) $a^{-1}(LM) = a^{-1}(L)M + [\epsilon \in L]La^{-1}(M)$

$\heartsuit$) $a^{-1}(L^*) = a^{-1}(L)(L^*)$ $\quad$ $\spadesuit$) $a^{-1}(b) = [a=b]\epsilon;\ a^{-1}(\epsilon) = \emptyset$

b) Expliquer pourquoi les formules précédentes peuvent servir de définition à l'opérateur $a^{-1}(?)$.

c) Montrer les propriétés suivantes :

i) $a^{-1}(L) = a^{-1}(L \cap aA^*)$ $\quad$ ii) $L = [\epsilon \in L]\epsilon + \sum_{a\in A} L \cap aA^*$

iii) $\big((\forall a \in A)(a^{-1}L = a^{-1}M)\big) \iff \big(L \cap A^+ = M \cap A^+\big)$

d) Déduire du (c) le lemme de reconstruction

$$L = [\epsilon \in L]\epsilon + \sum_{a\in A} a(a^{-1}L) \tag{1}$$

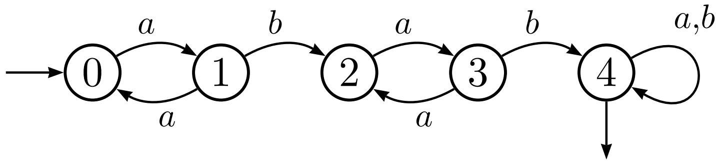
3) (Complété d'un AFD). —

Soit $\mathcal{A} = (Q,A,\bullet,q_0,F)$ un automate fini déterministe (i.e. $(\forall a \in A)(\forall q \in Q)(|q.a| \leq 1)$. Soit la nouvelle fonction de transition $\circ$ sur $Q \cup \{p\}$ ($p \notin Q$ est un nouvel) obtenue en rajoutant un état supplémentaire et les flêches (q,x,p) pour $q.x = \emptyset$ et (p,x,p) pour touutes les lettres $x \in A$.

a) Montrer que le nouvel automate $\mathcal{A}^c = (Q \cup \{p\},A,\circ,q_0,F)$

1. est déterministe et complet
2. est équivalent à $\mathcal{A}$ (i.e. reconnait le même langage).

b) Appliquer la procédure sur l'automate suivant, d'alphabet de commande $A = \{a,b\}$ (on dessinera l'automate $\mathcal{A}^c$ obtenu).



c) Donner une expression rationnelle du langage reconnu par l'automate précédent.