INFO 1 (Théorie des Langages): Devoir pour le 29 Juin 2010.

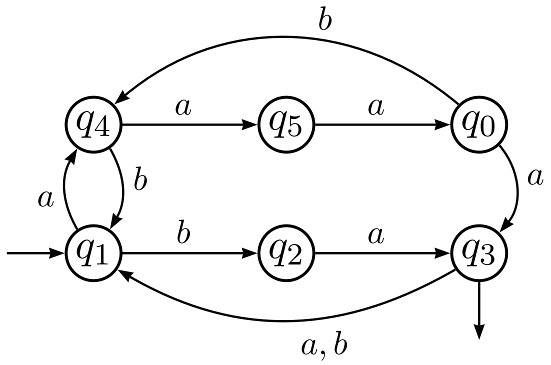
Seuls les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifies.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Question de Cours :

1) a) Comment s'implémente un (AF) ? (on précisera en particulier le sens des élments I, $(M(a))_{a\in\mathcal{A}}$ et F).
b) Le produit $IM(w)F$ peut donner des valeurs différentes selon qu'on le calcule dans les booléens (règle $1+1=1$ et les naturels (règle $1+1=2$). Comment s'interprètent ces résultats ?

2) a) Donner l'algorithme de minimisation d'un AFDC. Le faire tourner sur un exemple.
b) Comment compléter un AFD ? donner un exemple.

3) a) Qu'est-ce qu'une expression rationnelle ? Donner des exemples.
b) Qu'est-ce que la matrice-lettre associée à un automate ? Quel est le lien entre cette matrice et une expression rationelle du langage reconnu par l'automate.
3) a) Soit $A=\{a,b\}$. Écrire les matrices de l'automate ci-dessous (entrées, sorties, transitions).



b) Quels sont ses qualités ? **Indication : déterministe, complet, etc.**
c) Cet automate est-il minimal ?
d) En donner la matrice-lettre.

II) Exercices

Dans la suite $A=\{a,b\}$ est l'alphabet à deux lettres, $A^+=A^*-\{\epsilon\}$ est l'ensemble des mots non vides.
1) a) Montrer que

i) $bA^*a=(b^+a^+)^+$	ii) $A^*abA^*\cap A^*baA^*=A^*ab^+aA^*+A^*ba^+bA^*$	iii) $A^*a\cap A^*ba=aA^*ba$
iv) $bA^*a=b^+a(b^+a)^*$	v) $A^*-A^*aa=\epsilon+a+A^*b+A^*ba$	vi) $aA^*\cap A^*ab=ab+aA^*ab$

b) Former des automates qui reconnaissent ces langages.
c) Former les automates minimaux qui leur correspondent.

III. (Petit) Problème

Le but du problème ci-dessous est de définir une classe de mots (les grands Dycks) de deux manières (par une condition numérique, par une grammaire) et de donner l'équivalence entre ces deux définitions.

1) Soit $A = \{x, \bar{x}\}$, un alphabet à deux lettres. On définit une fonction de poids $\pi : A^* \mapsto \mathbb{Z}$ par

$$\pi(x) = 1,\ \pi(\bar{x}) = -1,\ \pi(uv) = \pi(u) + \pi(v) \tag{1}$$

a) Montrer, par récurrence sur la longueur du mot w, que $\pi(w) = |w|_x - |w|_{\bar{x}}$. En déduire que si $\pi(w) = 0$ alors $|w|$ est pair.

On définit les langages suivants :

$$\begin{aligned} GD &:= \{w \in A^* \big| \pi(w) = 0\} & (2)\\ GD_+ &:= \{w \in GD \big| w = uv \Longrightarrow \pi(u) \geq 0\} & (3)\\ GD_- &:= \{w \in GD \big| w = uv \Longrightarrow \pi(u) \leq 0\} & (4) \end{aligned}$$

b) En associant a chaque lettre un "pas" (nord-est pour x et sud-est pour $\bar{x}$), on fait correspondre à chaque mot un chemin. Donner la signification graphique de chacun des langages ci-dessus.

c) Voici, pour vérification, les distributions de longueur de GD, GD_+ (la distribution de GD_- est la même que celle de GD_+).

n	0	2	4	6	8
$\|GD \cap A^n\|$	1	2	6	20	70
$\|GD_+ \cap A^n\|$	1	1	2	5	14

donner la liste des mots de GD de longueur $2, 4$ et de GD_+ de longueur $6, 8$.

c) Montrer que GD_+ est le langage défini par la grammaire suivante

$$T \to \epsilon;\ T \to xT\bar{x};\ T \to TT \tag{5}$$

Soit

- ϵ est uun mot du langage
- si u est un mot du langage $xu\bar{x}$ aussi
- si u, v sont des mots du langage alors uv aussi
- il n'y a pas d'autre règle de formation du langage

2) a) Donner une description équivalente à (5) pour GD_-.

b) En déduire que GD est le langage engendré par la grammaire suivante

$$P \to \epsilon;\ P \to xP\bar{x};\ P \to PP;\ N \to \epsilon;\ N \to \bar{x}Nx;\ N \to NN;$$
$$T \to \epsilon;\ T \to TT;\ T \to xP\bar{x};\ T \to \bar{x}Nx$$