Exercices accompagnant le cours de "Combinatoire algébrique, énumérative et fonctionnelle". Madacascar 2007-2008.

G. H. E. DUCHAMP *

Exercice 1.1 Une partition non-ordonnée P d'un ensemble X est une partie $P \subset \mathfrak{P}(X) - \{\emptyset\}$ [1] (c'est un ensemble de blocs [2], c'est à dire de parties non-vides de X) telle que

- la réunion des blocs est X, soit
$$\bigcup_{Y \in P} Y = X$$
(P est un recouvrement)
- P est formé de parties disjointes deux à deux, soit
$$(\forall\, Y_1, Y_2 \in P)(Y_1 \neq Y_2 \Longrightarrow Y_1 \cap Y_2 = \emptyset).$$

L'ensemble des partitions de X en k blocs est noté ici $\mathcal{S}(X,k)$. Son cardinal ne dépendant que de celui de X, on pose $S_2(card(X),k) = card(\mathcal{S}(X,k))$ (nombre de Stirling de deuxième espèce).

1) Montrer que $\mathcal{S}(\emptyset,0) = \{\emptyset\}$ et $\mathcal{S}(\emptyset,k) = \emptyset$ si $k \neq 0$. En déduire les nombres $S_2(0,k)$.

2) Montrer que, pour $k \geq 1$,
$$S_2(n+1,k) = S_2(n,k-1) + kS_2(n,k). \tag{1}$$

Indication. Soit X un ensemble à $n+1$ éléments et $x_0 \in X$, définir une surjection
$$\mathcal{S}(X,k) \mapsto \mathcal{S}(X - \{x_0\},k) \cup \mathcal{S}(X - \{x_0\},k-1)$$
en "enlevant" x_0 dans une partition. Analyser les fibres de cette surjection et conclure.

3) a) Montrer que, pour $n \geq 1$, $S_2(n,0) = 0$.

b) Expliquez pourquoi la donnée des $S_2(n,0)$, $S_2(0,k)$ (calculés précédemment) et de la récurrence (1) permet de construire toute la matrice de Stirling $(S_2(n,k))_{n,k\geq 0}$.

c) Montrer, *avec les seules données du (b)*, que, pour tout n, $S_2(n,n) = 1$ et $S_2(n,k) = 0$ pour $k > n$.

4) Montrer que
$$S_2(n+1,k+1) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} S_2(n-j,k). \tag{2}$$

Indication. Même technique que ci-dessus, définir une bijection
$$\mathcal{S}(X,k+1) \mapsto \cup_{\{x_0\} \subset J \subset X} \mathcal{S}(X - J,k)$$

---

* Prière de signaler les erreurs à gd_etu[at]yahoo.fr en mettant MADA07 en objet.

1. L'ensemble des parties de X est noté $\mathfrak{P}(X)$ [1].

cette fois en “enlevant” le bloc contenant x_0 dans une partition. Analyser l’image de cette bijection et conclure.
5) a) Soit $T = \sum_{n,k\geq 0} S_2(n,k)\frac{x^n}{n!}y^k$, la série génératrice mixte des nombres $S_2(n,k)$. Montrer, à l’aide de (2) que

$$T\ e^x = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}(T) \qquad (3)$$

b) En intégrant (3) et en utilisant les conditions initiales, montrer que

$$T = e^{y(e^x-1)}\ .$$

Familles sommables. —

Exercice 1.2 Soit F_n définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
1) a) Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2}$$

b) Montrer (avec soin) que la famille $\left(z(z+z^2)^n\right)_{n\geq 0}$ est sommable. Quelle est sa somme ? (justifiez)
2) a) Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F_n = \sum_{k\geq 0} \begin{pmatrix} n-1-k \\ k \end{pmatrix}$$

b) Quel est le support de cette somme ? la réécrire avec les bornes les plus serrées possibles.

Exercice 1.3 Soit $M \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, une matrice infinie à coefficients complexes et x,y deux indéterminées.
1) a) Montrer que la famille

$$\Big(\big(\sum_{n\geq 0} M[n,k]x^n\big)y^k\Big)_{k\geq 0}$$

est sommable dans $\mathbb{C}[[x,y]]$.
b) De même montrer que

$$\Big(\big(\sum_{k\geq 0} M[n,k]y^k\big)x^n\Big)_{n\geq 0}$$

est sommable dans $\mathbb{C}[[x,y]]$.
2) Montrer que

$$\sum_{n,k\geq 0} M[n,k]\ x^n\ y^k = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0} M[n,k]\ x^n\ y^k = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} M[n,k]\ x^n\ y^k$$

3) Appliquer ces résultats pour montrer que, si l’on note $I(n,k)$ le nombre d’applications idempotentes $[1..n] \mapsto [1..n]$ qui ont k points fixes, on a

$$\sum_{n,k\geq 0} I[n,k]\frac{x^n}{n!}\ y^k = e^{ye^x}$$

Exercice 1.4 *("Tablettes de Chocolat") Une tablette de chocolat sera ici un rectangle de $p \times q$ cases (largeur $p \geq 1$ et hauteur $q \geq 1$), elle est caractérisé par ces deux paramètres. Sa surface est $s = pq$ et son demi-périmètre sera $l = p + q - 1$. On compte le nombre $a_{l,s}$ de tablettes de demi-périmètre l (resp. surface s) donné et on considère la série génératrice*

$$T := \sum_{s,l \geq 1} a_{l,s} x^l y^s \tag{4}$$

1) a) Montrer que, pour tous l,s, on a $a_{l,s} \leq 2$.
b) En déduire que la famille $(x^{p+q-1}y^{pq})_{p,q \geq 1}$ est sommable et de somme T.
2) Montrer que la famille

$$\left(\frac{(xy)^q}{1-(xy^q)}\right)_{q \geq 1} \tag{5}$$

est sommable dans $\mathbb{C}[[x,y]]$ et de somme T.
3) (Partie machine, intéressante à faire mais non exigible à l'examen).
a) Vérifier que Maple ne sait pas convertir la somme

$$\sum_{q \geq 1} \frac{(xy)^q}{1-(xy^q)} \tag{6}$$

en une fonction standard.
b)Montrer que si l'on veut le terme $a_{l,s}$, il suffit de calculer la somme jusqu'à $q = s$. En désuire un algorithme de calcul de $a_{l,s}$.

Références

[1] BOURBAKI, N., *Theorie des ensembles*, Hermann.
[2] COMTET, L., *Analyse Combinatoire*, PUF.