Un monoïde de tableaux

Gérard Duchamp, Arthur Randrianarivony, Vlady Ravelomanana

Résumé

Dans cette note, nous allons montrer qu'un ensemble de tableaux dont les colonnes ne sont pas nécessairement de même hauteur, muni d'un produit appelé produit de concaténation, forme un monoïde.

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des tableaux de la forme

$$[a] := \begin{bmatrix} & a(h_2,2) & \cdots & \\ & \vdots & \cdots & a(h_m,m) \\ a(h_1,1) & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a(2,1) & a(2,2) & \cdots & a(2,m) \\ a(1,1) & a(1,2) & \cdots & a(1,m) \end{bmatrix}$$

où les $a(i,j)$ sont des entiers tous distincts et forment l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$.

Pour des raisons typographiques, on note $[a] = [[a_1], [a_2], \ldots, [a_m]]$
où a_j est le mot $a(1,j)a(2,j)\cdots a(h_j,j)$. On note également $h_j := |[a]|_j$.

Nous allons identifier chaque élément $[a] = [[a_1], [a_2], \ldots, [a_m]]$ de $\mathcal{T}_n$ avec l'élément
$[a'] = \left[[a'_1], [a'_2], \ldots, [a'_m], \left[a'_{m+1}\right]\right]$ de $\mathcal{T}_{n+1}$ où $a'_j = a_j$ pour tout $1 \leq j \leq m$ et $a'_{m+1} = n+1$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{T} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{T}_n$. et y définissons le produit de concaténation.
Soit $[a] = [[a_1], [a_2], \ldots, [a_m]]$ et $[b] = [[b_1], [b_2], \ldots, [b_p]]$ deux éléments de $\mathcal{T}$.
$[c] := [a][b]$ est défini par :

(i) $[c]$ a m colonnes ;

(ii) Pour tout $1 \leq j \leq m$, $c_j = b_{a(1,j)} b_{a(2,j)} \cdots b_{a(h_j,j)} := \prod_i b_{a(i,j)}$.

D'après la définition de b_k, (ii) peut se traduire par

$$c_n := \prod_j \prod_i b(i, a(j,n)) \quad (1 \leq n \leq m). \tag{1}$$

*Exemple*1 : Soit $[a] = [[3,4,1],[7,2],[5,8,6]]$ et $[b] = [[3],[2,1]]$. On a :
$b_{a(1,1)} = b_3 = 4$ $\quad b_{a(2,1)} = b_4 = 5$ $\quad b_{a(3,1)} = b_1 = 3$
$b_{a(1,2)} = b_7 = 8$ $\quad b_{a(2,2)} = b_2 = 2,1$
$b_{a(1,3)} = b_5 = 6$ $\quad b_{a(2,3)} = b_8 = 9$ $\quad b_{a(3,3)} = b_6 = 7$
Par suite $[a][b] = [[4,5,3],[8,2,1],[6,9,7]]$.

Notre objectif est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 0.1 *$\mathcal{T}$ muni du produit de concaténation est un monoïde.*

Pour cela, nous allons introduire un ensemble d'applications qui soit isomorphe à $\mathcal{T}$.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables, S l'ensemble des suites $(w_n)_{n\geq 1}$ telles que :

(i) Pour tout $n \geq 1$, w_n est un mot fini non vide formé par des variables X_i ;

(ii) Le mot infini $w_1 w_2 \cdots w_n \cdots$ est un réarrangement du mot $X_1 X_2 \cdots X_n \cdots$.

Pour tout $[a] \in \mathcal{T}$, on désigne par $f_{[a]}$ l'application de S dans lui-même telle que, si $(w'_n) = f_{[a]}((w_n))$, alors, pour tout $n \geq 1$,

$$w'_n = w_{a(1,n)}w_{a(2,n)}w_{a(h_n,n)} := \prod_i w_{a(i,n)} \quad (h_n := |[a]|_n).$$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les applications $f_{[a]}$ $([a] \in \mathcal{T})$.

Proposition 0.2 *L'application* $\Phi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}, [a] \mapsto f_{[a]}$ *est un isomorphisme.*

Preuve: Par construction, Φ est surjective.
D'autre part, soit $[a]$ et $[b]$ deux éléments de $\mathcal{T}$ tels que $f_{[a]} = f_{[b]}$.
On a $\quad f_{[a]}((X_n)) = f_{[b]}((X_n))$,
c-à-d, pour tout $n \geq 1$,

$$X_{a(1,n)}X_{a(2,n)} \cdots X_{a(|[a]|_n,n)} = X_{b(1,n)}X_{b(2,n)} \cdots X_{b(|[b]|_n,n)}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $n \geq 1$ et tout $1 \leq i \leq |[a]|_n$, $|[a]|_n = |[b]|_n$ et $a(i,n) = b(i,n)$.
Φ est donc bijective.
Enfin, soit $[a]$ et $[b]$ deux éléments de $\mathcal{T}$ et $(w_n) \in S$.
Posons $f_{[b]}((w_n)) = (w'_n)$ et $f_{[a]}((w'_n)) = (w''_n)$. On a :

$$w'_n = \prod_i w_{b(i,n)} \text{ et } w''_n = \prod_j w'_{a(j,n)} = \prod_j \prod_i w_{b(i,a(j,n))}. \tag{2}$$

De l'autre côté, si $[c] = [a][b]$ et $f_{[c]}((w_n)) = (v_n)$, on a, d'après la relation (1),

$$v_n = \prod_i w_{c(i,n)} = \prod_j \prod_i w_{b(i,a(j,n))}. \tag{3}$$

En comparant les relations (2) et (3), on a $\Phi([a][b]) = \Phi([a])\Phi([b])$.
Il en résulte que Φ est un isomorphisme.
Par suite, le produit de concaténation est associatif et on a le Théorème.

*Exemple*2. Prenons les tableaux $[a]$ et $[b]$ de l'exemple 1 et soit $(w_n) \in S$.
Posons $f_{[b]}((w_n)) = (w'_n)$, $f_{[a]}((w'_n)) = (w''_n)$ et $f_{[c]}((w_n)) = (v_n)$ $([c] = [a][b])$.
On a :
$w'_1 = w_{b(1,1)} = w_3, \quad w'_2 = w_{b(1,2)}w_{b(2,2)} = w_2w_1$ et, pour $n \geq 3$, $w'_n = w_{b(1,n)} = w_{n+1}$;
$w''_1 = w'_{a(1,1)}w'_{a(2,1)}w'_{a(3,1)} = w'_3w'_4w'_1 = w_4w_5w_3$,
$w''_2 = w'_{a(1,2)}w'_{a(2,2)} = w'_7w'_2 = w_8w_2w_1$
$w''_3 = w'_{a(1,3)}w'_{a(2,3)}w'_{a(3,3)} = w'_5w'_8w'_6 = w_6w_9w_7$, et pour $n \geq 4$ $w''_n = w'_{a(1,n)} = w'_{n+5} = w_{n+6}$.

D'autre part,
$v_1 = w_{c(1,1)}w_{c(2,1)}w_{c(3,1)} = w_4w_5w_3$,
$v_2 = w_{c(1,2)}w_{c(2,2)}w_{c(3,2)} = w_8w_2w_1$,
$v_3 = w_{c(1,3)}w_{c(2,3)}w_{c(3,3)} = w_6w_9w_7$ et pour $n \geq 4$ $v_n = w_{c(1,n)} = w_{n+6}$.

On a bien $f_{[a][b]} = f_{[a]}f_{[b]}$.

Remarque. Le Théorème est encore vrai si $\mathcal{T}$ est formé par les tableaux constitués par des entiers non nécessairement distincts.