Un monoïde de tableaux* provenant de la déformation de l'algèbre de Hopf $LDIAG$.

G. H. E. Duchamp, Arthur Randrianarivony, Vlady Ravelomanana

Soit S, un semigroupe, on définit, sur $k\langle S\rangle$ une loi $\uparrow$ par $w \uparrow 1 = 1 \uparrow w = w$ et

$$a.u \uparrow b.v = a.(u \uparrow b.v) + q_c^{|u||b|} q_s^{|a||b|}(ab).(u \uparrow v) + q_c^{|au||b|} b.(au \uparrow v) \tag{1}$$

on va montrer que cette loi est déterminée par

- un monoïde d'actions (permutations compositions) sur les mots qui joue un rôle similaire à celui du groupe symétrique pour le shuffle et le q-shuffle
- une statistique sur les mots, indexée à des éléments de ce monoïde, qui fournit un associateur

`... partie d'Arthur`

Soit $[a]$ un tableau à $|a| = n$ places, on lui associe la suite des entrées trouvées par lecture de bas en haut puis de gauche à droite, ceci fournit une fonction de lecture $\lambda_{[a]} : [1..n] \mapsto alph([a])$. Pour I,J deux intervalles de $\mathbb{N}^*$, I précédent strictement J ($sup(I) < inf(J)$), on définit la classe de tableaux $ish(I,J)$ comme les tableaux tels que

a) les colonnes sont de hauteur au plus 2 et croissantes

b) les restrictions de la fonction de lecture

$$\lambda_{[a]}^{-1}(I) \mapsto I \ ; \ \lambda_{[a]}^{-1}(J) \mapsto J \tag{2}$$

sont croissantes

Remarque 1.1 *Si $I = [r..s]$ (resp. $J = [r..s]$) et que $J = \emptyset$ (resp. $I = \emptyset$), $ish(I,J)$ est constitué du seul tableau $[r..s]$.*

On considère maintenant que le semigroupe S est gradué sur $\mathbb{N}^*$ par une application $\pi : S \mapsto \mathbb{N}^*$ (on peut, dans une première lecture, considérer que $S = A^+$ et que π est donnée par une fonction de poids sur les lettres).

Théorème 1.2 *On définit alors la statistique $Q([a],w)$ sur les mots w tels que $|w| \geq sup(alph([a]))$ par*

$$Q([a],w) = \Pi_{c\in[a] \ ; \ c=\left[\substack{s\\r}\right]} q_s^{\pi(w[r])\times\pi(w[s])} \ \Pi_{j<i \ ; \ \lambda_{[a]}(j)\in J \ ; \ \lambda_{[a]}(i)\in I} \ q_c^{\pi(w[\lambda_{[a]}(i)])\times\pi(w[\lambda_{[a]}(j)])} \tag{3}$$

alors, pour w_1, $w_2 \in S$, $|w_1| = p$; $|w_2| = q$, on a

$$w_1 \uparrow w_2 = \sum_{[a]\in ish([1..p],[p+1..p+q])} Q([a],w_1w_2) \ [a].w_1w_2 \tag{4}$$

Preuve — Soit $\top$ la loi définie par le membre de droite. Pour montrer l'égalité, il suffit de démontrer que $\top$ vérifie la récursion qui définit $\uparrow$ ce qui se fait par inspection de la statistique Q. □

∗ Semigroupe symétrique à empilements de fibres