Introduction à l'informatique

Les nombres

Jean-Christophe Dubacq

IUT de Villetaneuse

S1 2016

Plan

Plan

Représenter les nombres

- Objet (abstrait) qui admet de nombreuses représentations.
- L'idée de quantité et une représentation visuelle précèdent sans doute l'écriture *(unaire)*.
- Un jeu de règles de représentation des nombres sous forme de signes écrits est un système de numération.

Exemple (Plusieurs représentations)

On représente aussi les nombres sur d'autres *supports* que l'écrit : représentations par sons, par objets (nombre de bougies sur un gâteau). Cela ne change pas le nombre (information), 27 bougies représentent bien 27 éléments (années écoulées, ici) autant que « 2 » collé à « 7 », ou que 𒌋𒌋 𒐌 (numération babylonienne) ou XXVII (numération romaine).

La numération positionnelle

Définition (Système de numération positionelle)

Un ensemble fini de symboles $\mathcal{B}$ (appelés chiffres) auxquels est associé une valeur entière de 0 à $B-1$, où B est le nombre d'éléments de $\mathcal{B}$. B est la *base*.
La valeur d'une suite finie de k chiffres $\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0$ est la somme :

$$\alpha_{k-1}B^{k-1} + \cdots + \alpha_1 B + \alpha_0 = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i B^i.$$

- Le mot chiffre vient de l'arabe أَلصِّفر *ʔaṣ-ṣifr* et désignait le zéro.
- Exemple en base 5 : le nombre 132_5 vaut $1 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 2 \times 5^0$, soit $25 + 15 + 2 = 42_{10}$.
- B^i est le *poids* du i-ième chiffre (en comptant de 0 à droite).

Les autres systèmes de numération

un peu de culture générale...

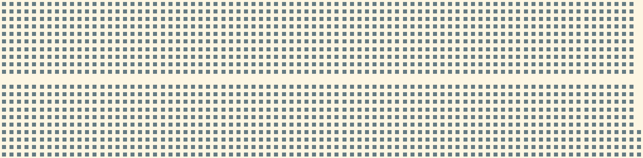
- Systèmes de numération additifs (chiffres grecs, égyptiens) : ∩ ∩ |||||||, par exemple. Chaque poids est représenté par un symbole distinct, la position n'est pas importante. À un détail près, les chiffres romains le sont aussi.
- Systèmes hybrides (numérotation chinoise ou japonaise, français) : on utilise des chiffres fixes, mais on intercale un symbole (écrit) ou un mot (oral) différent pour chaque poids.
- Des systèmes de numération exotiques : les poids ne sont pas $1, B, B^2, B^3$, etc. mais les valeurs d'une suite (strictement croissante) : par exemple, numération de Fibonacci.

Cette page est inspirée de Wikipedia *Système de numération*, ainsi que les dessins de chiffres babyloniens.

La base 10

- Système décimal, utilisé depuis le cinquième siècle en Inde, apporté par les Arabes en Europe dans le X^e siècle.
- $\mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, et $B = 10$
- Par exemple : mille cinq cent quatre-vingt-quatre se représente par 1684_{10}, qui s'interprète comme

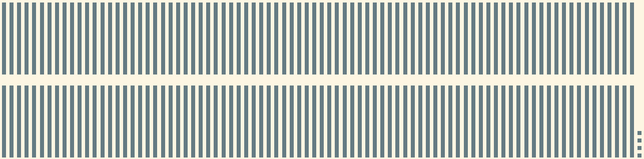
$$1 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 8 \times 10 + 4$$



La base 10

- Système décimal, utilisé depuis le cinquième siècle en Inde, apporté par les Arabes en Europe dans le X^e^ siècle.
- $\mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, et $B = 10$
- Par exemple : mille cinq cent quatre-vingt-quatre se représente par 1684_{10}, qui s'interprète comme

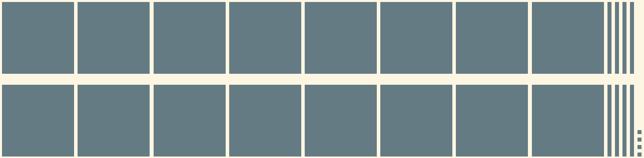
$$1 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 8 \times 10 + 4$$



La base 10

- Système décimal, utilisé depuis le cinquième siècle en Inde, apporté par les Arabes en Europe dans le X[e] siècle.
- $\mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, et $B = 10$
- Par exemple : mille cinq cent quatre-vingt-quatre se représente par 1684_{10}, qui s'interprète comme

$$1 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 8 \times 10 + 4$$



La base 10

- Système décimal, utilisé depuis le cinquième siècle en Inde, apporté par les Arabes en Europe dans le Xe siècle.
- $\mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, et $B = 10$
- Par exemple : mille cinq cent quatre-vingt-quatre se représente par 1684_{10}, qui s'interprète comme

$$1 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 8 \times 10 + 4$$

Représenter les nombres en informatique

Définition (Les bases les plus utilisées sont 2, 8, 10 et 16)

Base	Chiffres		Exemple	Usage
2	{0, 1}	0b	0b10110	Codages bas-niveau
8	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	0	026	
16	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}	0x	0x16	
10	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}		22	

- $1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 22_{10}$
- $2 \times 8 + 6 = 22_{10}$
- $1 \times 16 + 6 = 22_{10}$
- $2 \times 10 + 2 = 22_{10}$
- En binaire, un chiffre est désigné par le terme *bit* (aussi).

Représenter les nombres en informatique

Définition (Les bases les plus utilisées sont 2, 8, 10 et 16)

Base	Chiffres		Exemple	Usage
2	{0, 1}	0b	0b10110	Codages bas-niveau
8	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	0	026	peu utilisé
16	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}	0x	0x16	
10	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}		22	

- $1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 22_{10}$
- $2 \times 8 + 6 = 22_{10}$
- $1 \times 16 + 6 = 22_{10}$
- $2 \times 10 + 2 = 22_{10}$
- En binaire, un chiffre est désigné par le terme *bit* (aussi).

Représenter les nombres en informatique

Définition (Les bases les plus utilisées sont 2, 8, 10 et 16)

Base	Chiffres		Exemple	Usage
2	$\{0,1\}$	0b	0b10110	Codages bas-niveau
8	$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$	0	026	peu utilisé
16	$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,$ A, B, C, D, E, F$\}$	0x	0x16	Écriture compacte d'octets
10	$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$		22	

- $1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 22_{10}$
- $2 \times 8 + 6 = 22_{10}$
- $1 \times 16 + 6 = 22_{10}$
- $2 \times 10 + 2 = 22_{10}$
- En binaire, un chiffre est désigné par le terme *bit* (aussi).

Représenter les nombres en informatique

Définition (Les bases les plus utilisées sont 2, 8, 10 et 16)

Base	Chiffres		Exemple	Usage
2	{0, 1}	0b	0b10110	Codages bas-niveau
8	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	0	026	peu utilisé
16	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}	0x	0x16	Écriture compacte d'octets
10	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}		22	Nombres courants

- $1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 22_{10}$
- $2 \times 8 + 6 = 22_{10}$
- $1 \times 16 + 6 = 22_{10}$
- $2 \times 10 + 2 = 22_{10}$
- En binaire, un chiffre est désigné par le terme *bit* (aussi).

Représenter les nombres en informatique

Définition (Les bases les plus utilisées sont 2, 8, 10 et 16)

Base	Chiffres		Exemple	Usage
2	{0, 1}	0b	0b10110	Codages bas-niveau
8	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	0	026	peu utilisé
16	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}	0x	0x16	Écriture compacte d'octets
10	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}		22	Nombres courants

- $1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 22_{10}$
- $2 \times 8 + 6 = 22_{10}$
- $1 \times 16 + 6 = 22_{10}$
- $2 \times 10 + 2 = 22_{10}$
- En binaire, un chiffre est désigné par le terme *bit* (aussi).

De la base x à la base 10

On peut toujours convertir un nombre de la façon suivante.

Méthode (recalcul)

Si en base x, il s'écrit $\alpha\beta\gamma\delta$, il vaut (par définition) :

$$\alpha \times x^3 + \beta \times x^2 + \gamma \times x + \delta$$

Exemple (conversion de 0x4D7)

Le nombre 0x4D7 (hexadécimal) est égal à $4 \times 16^2 + D \times 16 + 7$, donc à $4 \times 256 + 13 \times 16 + 7 = 1239$ en base 10.

Exemple (puissance de la base)

B^n s'écrit toujours 1 suivi de n zéros (par exemple, 2^6 s'écrit `0b1 000 000`)

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ;
$1/2 = 0$, reste 1 ;

$\texttt{13} = \texttt{6} \times \texttt{2} + \texttt{0b1} = \texttt{3} \times \texttt{2} \times \texttt{2} + \texttt{0b01} = \texttt{1} \times \texttt{2} \times \texttt{2} \times \texttt{2} + \texttt{0b101} = \texttt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

$\texttt{216}$

$\texttt{216}_{10} = \texttt{216}_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ; $1/2 = 0$, reste 1 ;

$13 = 6 \times 2 + 0b1 = 3 \times 2 \times 2 + 0b01 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 + 0b101 = 0b1101$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

216

$216_{10} = 216_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ; $1/2 = 0$, reste 1 ;

$13 = 6 \times 2 + \mathtt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b01} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b101} = \mathtt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

216

$216_{10} = 216_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ; $1/2 = 0$, reste 1 ;

$13 = 6 \times 2 + \texttt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \texttt{0b01} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 + \texttt{0b101} = \texttt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

216

$216_{10} = 216_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ;
$1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \texttt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \texttt{0b01} =$
$1 \times 2 \times 2 \times 2 + \texttt{0b101} = \texttt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

216

$216_{10} = 216_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ;
$1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \texttt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \texttt{0b01} =$
$1 \times 2 \times 2 \times 2 + \texttt{0b101} = \texttt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...
$\texttt{216}$
$\texttt{216}_{10} = \texttt{216}_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$\mathtt{13/2} = \mathtt{6}$, reste 1 ; $\mathtt{6/2} = \mathtt{3}$, reste 0 ; $\mathtt{3/2} = \mathtt{1}$, reste 1 ; $\mathtt{1/2} = \mathtt{0}$, reste 1 ;
$\mathtt{13} = \mathtt{6} \times \mathtt{2} + \mathtt{0b1} = \mathtt{3} \times \mathtt{2} \times \mathtt{2} + \mathtt{0b01} = \mathtt{1} \times \mathtt{2} \times \mathtt{2} \times \mathtt{2} + \mathtt{0b101} = \mathtt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

$\mathtt{216}$

$\mathtt{216}_{10} = \mathtt{216}_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ; $1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \mathtt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b01} =$
$1 \times 2 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b101} = \mathtt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...
216
$216_{10} = 216_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ; $1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \texttt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \texttt{0b01} =$
$1 \times 2 \times 2 \times 2 + \texttt{0b101} = \texttt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...
216
$216_{10} = 216_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ; $1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \texttt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \texttt{0b01} =$
$1 \times 2 \times 2 \times 2 + \texttt{0b101} = \texttt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...
216
$216_{10} = 216_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ; $1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \mathtt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b01} =$
$1 \times 2 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b101} = \mathtt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

$216 - 128 = 88$

$216_{10} = \mathtt{0b}\underbrace{\mathtt{1}}_{128}\mathtt{0000000} + 88_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ;
$1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \mathtt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b01} =$
$1 \times 2 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b101} = \mathtt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

$216 - 128 = 88 - 64 = 24$

$216_{10} = \mathtt{0b1}\underbrace{\mathtt{1}}_{64}\mathtt{000000} + 24_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ;
$1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \mathtt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b01} =$
$1 \times 2 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b101} = \mathtt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

$216 - 128 = 88 - 64 = 24$

$216_{10} = \mathtt{0b11}\underbrace{\mathtt{0}}_{32}\mathtt{00000} + 24_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ; $1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \texttt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \texttt{0b01} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 + \texttt{0b101} = \texttt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

$216 - 128 = 88 - 64 = 24 - 16 = 8$

$216_{10} = \mathit{0b110}\underbrace{\mathit{1}}_{16}\mathit{0000} + 8_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ;
$1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \mathtt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b01} =$
$1 \times 2 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b101} = \mathtt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...
$216 - 128 = 88 - 64 = 24 - 16 = 8 - 8 = 0$
$216_{10} = \mathtt{0b1101}\underbrace{\mathtt{1}}_{8}\mathtt{000} + 0_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ; $1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \texttt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \texttt{0b01} =$
$1 \times 2 \times 2 \times 2 + \texttt{0b101} = \texttt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...
$216 - 128 = 88 - 64 = 24 - 16 = 8 - 8 = 0$
$216_{10} = \texttt{0b11011}\underbrace{\texttt{0}}_{4}\texttt{00} + 0_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ;
$1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \mathtt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b01} =$
$1 \times 2 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b101} = \mathtt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

$216 - 128 = 88 - 64 = 24 - 16 = 8 - 8 = 0$

$216_{10} = \mathit{0b110110}\underbrace{\mathit{0}}_{2}\mathit{0} + 0_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ; $1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + \mathtt{0b1} = 3 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b01} =$
$1 \times 2 \times 2 \times 2 + \mathtt{0b101} = \mathtt{0b1101}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...
$216 - 128 = 88 - 64 = 24 - 16 = 8 - 8 = 0$
$216_{10} = \mathtt{0b1101100}\underbrace{\mathtt{0}}_{1} + 0_{10}$

De la base 10 à la base 2

Méthode (divisions successives)

On divise le nombre par la base (2). Le reste est le dernier chiffre du nombre dans la base 2, on recommence avec le résultat de la division.

Ceci fonctionne avec toutes les bases, diviser par B *au lieu de 2.*

Exemple (divisions successives)

$13/2 = 6$, reste 1 ; $6/2 = 3$, reste 0 ; $3/2 = 1$, reste 1 ; $1/2 = 0$, reste 1 ;
$13 = 6 \times 2 + 0b1 = 3 \times 2 \times 2 + 0b01 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 + 0b101 = 0b1101$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...
$216 - 128 = 88 - 64 = 24 - 16 = 8 - 8 = 0$
$216_{10} = \mathit{0b11011000}$

De la base 2 à 8 et 16 (et inversement)

- Base 2 vers 8 ou 16 ou inverse : substitution mécanique !
- Compléter par des `0` devant si nécessaire (octal : 3 chiffres, hexadécimal : 4) ;
- Connaître les correspondances pour chaque chiffre ;

Hex./Octal	0	1	2	3	4	5	6	7
Binaire	0	1	10	11	100	101	110	111

Hex.	8	9	A	B	C	D	E	F
Binaire	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

- Base $8 = 2^3$: `0b11101`
- Base $16 = 2^4$: `0b11101`
- De 16 ou 8, vers 2, procédure inverse : `0x3A` = `0b00111010`
- **APPRENEZ CES TABLES PAR CŒUR !**

De la base 2 à 8 et 16 (et inversement)

- Base 2 vers 8 ou 16 ou inverse : substitution mécanique !
- Compléter par des 0 devant si nécessaire (octal : 3 chiffres, hexadécimal : 4) ;
- Connaître les correspondances pour chaque chiffre ;

Hex./Octal	0	1	2	3	4	5	6	7
Binaire	0	1	10	11	100	101	110	111

Hex.	8	9	A	B	C	D	E	F
Binaire	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

- Base $8 = 2^3$: `0b011101`
- Base $16 = 2^4$: `0b00011101`
- De 16 ou 8, vers 2, procédure inverse : `0x3A` = `0b00111010`
- **APPRENEZ CES TABLES PAR CŒUR !**

De la base 2 à 8 et 16 (et inversement)

- Base 2 vers 8 ou 16 ou inverse : substitution mécanique !
- Compléter par des 0 devant si nécessaire (octal : 3 chiffres, hexadécimal : 4) ;
- Connaître les correspondances pour chaque chiffre ;

Hex./Octal	0	1	2	3	4	5	6	7
Binaire	0	1	10	11	100	101	110	111

Hex.	8	9	A	B	C	D	E	F
Binaire	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

- Base $8 = 2^3$: $\mathtt{0b}\,\underbrace{\mathtt{011}}_{\mathtt{3}}\,\underbrace{\mathtt{101}}_{\mathtt{5}}$
- Base $16 = 2^4$: $\mathtt{0b}\,\underbrace{\mathtt{0001}}_{\mathtt{1}}\,\underbrace{\mathtt{1101}}_{\mathtt{D}}$
- De 16 ou 8, vers 2, procédure inverse : $\mathtt{0x3A} = \mathtt{0b00111010}$
- **APPRENEZ CES TABLES PAR CŒUR !**

De la base 2 à 8 et 16 (et inversement)

- Base 2 vers 8 ou 16 ou inverse : substitution mécanique !
- Compléter par des 0 devant si nécessaire (octal : 3 chiffres, hexadécimal : 4) ;
- Connaître les correspondances pour chaque chiffre ;

Hex./Octal	0	1	2	3	4	5	6	7
Binaire	0	1	10	11	100	101	110	111

Hex.	8	9	A	B	C	D	E	F
Binaire	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

- Base $8 = 2^3$: $\mathtt{0b}\underbrace{\mathtt{011}}_{3}\underbrace{\mathtt{101}}_{5} = \mathtt{035}$
- Base $16 = 2^4$: $\mathtt{0b}\underbrace{\mathtt{0001}}_{1}\underbrace{\mathtt{1101}}_{D} = \mathtt{0x1D}$
- De 16 ou 8, vers 2, procédure inverse : $\mathtt{0x3A} = \mathtt{0b00111010}$
- **APPRENEZ CES TABLES PAR CŒUR !**

De la base 2 à 8 et 16 (et inversement)

- Base 2 vers 8 ou 16 ou inverse : substitution mécanique !
- Compléter par des 0 devant si nécessaire (octal : 3 chiffres, hexadécimal : 4) ;
- Connaître les correspondances pour chaque chiffre ;

Hex./Octal	0	1	2	3	4	5	6	7
Binaire	0	1	10	11	100	101	110	111

Hex.	8	9	A	B	C	D	E	F
Binaire	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

- Base $8 = 2^3$: $\texttt{0b}\,\underbrace{\texttt{011}}_{\texttt{3}}\,\underbrace{\texttt{101}}_{\texttt{5}} = \texttt{035}$
- Base $16 = 2^4$: $\texttt{0b}\,\underbrace{\texttt{0001}}_{\texttt{1}}\,\underbrace{\texttt{1101}}_{\texttt{D}} = \texttt{0x1D}$
- De 16 ou 8, vers 2, procédure inverse : 0x3A = 0b00111010
- **Apprenez ces tables par cœur !**

De la base 2 à 8 et 16 (et inversement)

- Base 2 vers 8 ou 16 ou inverse : substitution mécanique !
- Compléter par des 0 devant si nécessaire (octal : 3 chiffres, hexadécimal : 4) ;
- Connaître les correspondances pour chaque chiffre ;

Hex./Octal	0	1	2	3	4	5	6	7
Binaire	0	1	10	11	100	101	110	111

Hex.	8	9	A	B	C	D	E	F
Binaire	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

- Base $8 = 2^3$: $\mathtt{0b}\,\underbrace{\mathtt{011}}_{3}\,\underbrace{\mathtt{101}}_{5} = \mathtt{035}$
- Base $16 = 2^4$: $\mathtt{0b}\,\underbrace{\mathtt{0001}}_{1}\,\underbrace{\mathtt{1101}}_{D} = \mathtt{0x1D}$
- De 16 ou 8, vers 2, procédure inverse : $\mathtt{0x3A} = \mathtt{0b00111010}$
- **APPRENEZ CES TABLES PAR CŒUR !**

Exercices

Puissances de 2

Q1 Écrivez la liste de toutes les puissances de 2, de 2^{-4} à 2^{16}.

Q2 Écrivez une table de conversion des chiffres hexadécimaux et octaux vers le codage naturel écrit en binaire (4 bits ou 3 bits).

Conversions

Q3 Écrivez en binaire et en hexadécimal les nombres décimaux suivants : 28 ; 149 ; 1285.

Q4 Convertissez en décimal les nombres suivants : 0x48 ; 0xA1C ; 0b1010010010011111.

Q5 Comment trouver midi à quatorze heures ?

Plan

Bases, entiers relatifs et réels

- Pour les entiers relatifs, il faut une information supplémentaire : le signe ;
- Représentation classique : un signe – pour les négatifs.
- Réels : la virgule (séparateur décimal) est à droite du chiffre de poids 1 (exposant 0) *(représentation en virgule fixe)*.

Exemple

$$
\begin{aligned}
-10,11_2 &= -\left(1\times 2^1 + 1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2}\right)\\
&= -2,75_{10}\\
-47,2_8 &= -\left(4\times 8^1 + 7\times 8^0 + 2\times 8^{-1}\right)\\
&= -39,25_{10}
\end{aligned}
$$

Convertir un réel d'une base dans une autre

Théorème

On peut toujours convertir d'un côté la partie fractionnaire d'un nombre, de l'autre sa partie entière.

Méthode (multiplications successives)

On multiplie par B *la partie fractionnaire, la partie entière du résultat donne le premier chiffre après la virgule.* $0,375 \times 2 = 0,75$; $0,75 \times 2 = 1,5$; $0,5 \times 2 = 1$;*...développement fini ! Pas toujours !*

$0,375 =$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625,...

$0,8125$

$0,8125_{10} =$

Convertir un réel d'une base dans une autre

Théorème

On peut toujours convertir d'un côté la partie fractionnaire d'un nombre, de l'autre sa partie entière.

Méthode (multiplications successives)

On multiplie par B *la partie fractionnaire, la partie entière du résultat donne le premier chiffre après la virgule.* $0,375 \times 2 = 0,75$; $0,75 \times 2 = 1,5$; $0,5 \times 2 = 1$;*...développement fini ! Pas toujours !*

$0,375 =$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625,...

$0,8125$

$0,8125_{10} =$

Convertir un réel d'une base dans une autre

Théorème

On peut toujours convertir d'un côté la partie fractionnaire d'un nombre, de l'autre sa partie entière.

Méthode (multiplications successives)

On multiplie par B *la partie fractionnaire, la partie entière du résultat donne le premier chiffre après la virgule.* $0,375 \times 2 = 0,75$; $0,75 \times 2 = 1,5$; $0,5 \times 2 = 1$;*...développement fini ! Pas toujours !*

$0,375 = 0b0,0$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625,...

$0,8125$

$0,8125_{10} =$

Convertir un réel d'une base dans une autre

Théorème

On peut toujours convertir d'un côté la partie fractionnaire d'un nombre, de l'autre sa partie entière.

Méthode (multiplications successives)

On multiplie par B *la partie fractionnaire, la partie entière du résultat donne le premier chiffre après la virgule.* $0,375 \times 2 = 0,75$; $0,75 \times 2 = 1,5$; $0,5 \times 2 = 1$;...*développement fini ! Pas toujours !*

$0,375 = 0b0,01$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625,...

$0,8125$

$0,8125_{10} =$

Convertir un réel d'une base dans une autre

Théorème

On peut toujours convertir d'un côté la partie fractionnaire d'un nombre, de l'autre sa partie entière.

Méthode (multiplications successives)

On multiplie par B *la partie fractionnaire, la partie entière du résultat donne le premier chiffre après la virgule.* $0,375 \times 2 = 0,75$; $0,75 \times 2 = 1,5$; $0,5 \times 2 = 1$; *...développement fini ! Pas toujours !*

$0,375 = $ `0b0,011`

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625,...

$0,8125$

$0,8125_{10} =$

Convertir un réel d'une base dans une autre

Théorème

On peut toujours convertir d'un côté la partie fractionnaire d'un nombre, de l'autre sa partie entière.

Méthode (multiplications successives)

On multiplie par $\mathtt{B}$ *la partie fractionnaire, la partie entière du résultat donne le premier chiffre après la virgule.* $0,375 \times 2 = 0,75$ *;* $0,75 \times 2 = 1,5$ *;* $0,5 \times 2 = 1$ *;...développement fini ! Pas toujours !*
$0,375 = \mathtt{0b0,011}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625,...
$0,8125$
$0,8125_{10} =$

Convertir un réel d'une base dans une autre

Théorème

On peut toujours convertir d'un côté la partie fractionnaire d'un nombre, de l'autre sa partie entière.

Méthode (multiplications successives)

On multiplie par B *la partie fractionnaire, la partie entière du résultat donne le premier chiffre après la virgule.* $0,375 \times 2 = 0,75$ *;* $0,75 \times 2 = 1,5$ *;* $0,5 \times 2 = 1$ *;...développement fini ! Pas toujours !*

$0,375 = \mathtt{0b0,011}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625,...

$0,8125$

$0,8125_{10} =$

Convertir un réel d'une base dans une autre

Théorème

On peut toujours convertir d'un côté la partie fractionnaire d'un nombre, de l'autre sa partie entière.

Méthode (multiplications successives)

On multiplie par B *la partie fractionnaire, la partie entière du résultat donne le premier chiffre après la virgule.* $0,375 \times 2 = 0,75$; $0,75 \times 2 = 1,5$; $0,5 \times 2 = 1$ *;...développement fini ! Pas toujours !*
$0,375 = \mathtt{0b0,011}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625,...
$0,8125 - 0,5 = 0,3125$
$0,8125_{10} = \mathtt{0b0,}\underbrace{\mathtt{1}}_{1/2} + 0,3125_{10}$

Convertir un réel d'une base dans une autre

Théorème

On peut toujours convertir d'un côté la partie fractionnaire d'un nombre, de l'autre sa partie entière.

Méthode (multiplications successives)

On multiplie par B *la partie fractionnaire, la partie entière du résultat donne le premier chiffre après la virgule.* $0,375 \times 2 = 0,75$; $0,75 \times 2 = 1,5$; $0,5 \times 2 = 1$ *;...développement fini ! Pas toujours !*

$0,375 = \mathtt{0b0,011}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625,...

$0,8125 - 0,5 = 0,3125 - 0,25 = 0,0625$

$0,8125_{10} = \mathtt{0b0,1}\underbrace{\mathtt{1}}_{1/4} + 0,0625_{10}$

Convertir un réel d'une base dans une autre

Théorème

On peut toujours convertir d'un côté la partie fractionnaire d'un nombre, de l'autre sa partie entière.

Méthode (multiplications successives)

On multiplie par B *la partie fractionnaire, la partie entière du résultat donne le premier chiffre après la virgule.* $0,375 \times 2 = 0,75$ *;* $0,75 \times 2 = 1,5$ *;* $0,5 \times 2 = 1$ *;...développement fini ! Pas toujours !*
$0,375 = \mathtt{0b0,011}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625,...
$0,8125 - 0,5 = 0,3125 - 0,25 = 0,0625$
$0,8125_{10} = \mathtt{0b0,11}\underbrace{\mathtt{0}}_{1/8} + 0,0625_{10}$

Convertir un réel d'une base dans une autre

Théorème

On peut toujours convertir d'un côté la partie fractionnaire d'un nombre, de l'autre sa partie entière.

Méthode (multiplications successives)

On multiplie par B *la partie fractionnaire, la partie entière du résultat donne le premier chiffre après la virgule.* $0,375 \times 2 = 0,75$ *;* $0,75 \times 2 = 1,5$ *;* $0,5 \times 2 = 1$ *;...développement fini ! Pas toujours !*

$0,375 = \mathtt{0b0,011}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625,...

$0,8125 - 0,5 = 0,3125 - 0,25 = 0,0625 - 0,0625 = 0$

$0,8125_{10} = \mathtt{0b0,110}\underbrace{\mathtt{1}}_{1/16} + 0_{10}$

Convertir un réel d'une base dans une autre

Théorème

On peut toujours convertir d'un côté la partie fractionnaire d'un nombre, de l'autre sa partie entière.

Méthode (multiplications successives)

On multiplie par B *la partie fractionnaire, la partie entière du résultat donne le premier chiffre après la virgule.* $0,375 \times 2 = 0,75$; $0,75 \times 2 = 1,5$; $0,5 \times 2 = 1$;*...développement fini ! Pas toujours !*
$0,375 = \mathtt{0b0,011}$

Méthode (soustractions successives, rapide)

Puissances de 2 : 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625,...
$0,8125 - 0,5 = 0,3125 - 0,25 = 0,0625 - 0,0625 = 0$
$0,8125_{10} = \mathtt{0b0,1101}$

Exercices

Changements de base

Q6 Écrivez en binaire et en hexadécimal les nombres décimaux suivants : 0,3125 ; 164,3125.

Q7 Convertissez en décimal le nombre suivant : 0b1010,0011.

Plan

Le codage

- Plutôt que d'écrire des nombres, on est souvent amené à les *coder*, c'est-à-dire à les écrire sur une taille fixe.
- On écrit ces codes en binaire (ou en hexadécimal pour gagner de la place) avec un nombre déterminé à l'avance de bits.
- Avec un nombre fixé k de bits, on peut écrire uniquement un nombre fixé de nombres (2^k).

Définition (Codage naturel des entiers — NAT)

Le codage naturel consiste à écrire l'entier en base 2 et à compléter l'écriture par des 0 à gauche jusqu'à atteindre la taille désirée. Exemple : 27_{10}=0b11011 se code 0001 1011 en NAT 8 bits.
Avec n bits, on code les entiers de 0 à $2^n - 1$. Usuellement, on utilise des tailles multiples de 8.

Le codage des entiers relatifs (1)

VA+S et C1, peu usités

Définition (Codage valeur absolue+signe — VA+S)

On écrit l'entier en base 2 et on complète l'écriture par des 0 à gauche jusqu'à atteindre la taille désirée *moins* 1, et de coder le signe devant par 0 (positif) ou 1 (négatif).
Exemple : -12_{10}=0b1100 se code $1000\,1100$ en VA+S 8 bits.

Définition (Codage complément à 1 — C1)

L'entier écrit en base 2 est complété par des 0 à gauche jusqu'à la taille désirée. *Si le nombre est négatif*, on **complémente** alors chacun des chiffres ($0 \longleftrightarrow 1$).
Exemple : -12_{10}=0b1100 se code $1111\,0011$ en C1 8 bits.

Avec n bits, on code les entiers de $-2^{n-1}+1$ à $2^{n-1}-1$ (pour VA+S et C1).

Le codage des entiers relatifs (2)

C2, le plus utilisé

Définition (Codage complément à 2 — C2)

Si le nombre est positif, on complète son écriture binaire par des `0` à gauche jusqu'à la taille désirée. *Si le nombre est négatif,* on écrit *sa valeur absolue moins* `1` en base `2`, on le complète par des `0` à gauche jusqu'à la taille désirée, et on **complémente** alors chacun des chiffres (`0` $\longleftrightarrow$ `1`).
Exemple : -12_{10}=`0b1100` se code `1111 0100` en C2 8 bits.

Le codage des entiers relatifs (3)

C2 (deuxième étape)

- Avec n bits, on code les entiers de -2^{n-1} à $2^{n-1}-1$.
- Dans l'autre sens (de codage C2 vers valeur binaire), il faut faire les opérations dans l'ordre inverse.
- Pour les positifs, les quatre codages sont identiques.

Exemple (Codage C2 sur 8 bits)

$28 = 0b11100$ donc codage $0011100 \rightarrow 00011100$
$-28 = 0b11100$ donc codage $0011011 \rightarrow 1100100 \rightarrow 11100100$
Codage C2 : 10100111, donc valeur négative : $0100111 \rightarrow 1011000 \rightarrow 1011001$, soit 89 en décimal ; donc -89.
Codage C2 : 00100111, donc valeur positive : $0b100111$, soit 39 en décimal ; donc 39.

Exercices

Codage d'entiers

Q8 Ce tableau comporte des cases inutilisées. Complétez-le :

Décimal	Écriture Binaire	Type de codage	Codage (binaire)	Codage (hexa)
−18	−10010	VA+S (8 bits)	10010010	0x92
424		NAT (16 bits)		
−138		C2 (16 bits)		
	−1110011	C1 (8 bits)		
−4197		VA+S (24 bits)		
−84				0xAB
341		NAT (8 bits)		

Plan

Représentation en virgule flottante

- Décomposition en quatre parties d'un réel : signe s, valeur v, base B et exposant e ;
- Ex : $-325 = -3,25 \times 10^2$, $-0b101,1 = -0b1,011 \times 2^2$;
- Contrainte : valeur=réel x, tq $1 \leq x < \mathrm{B}$;
- Un seul chiffre avant la virgule !
- e entier, signe usuel ;
- $x = (-1)^s \times v \times \mathrm{B}^e$
- Choix de B donne une décomposition unique si $x \neq 0$;
- En binaire, le premier chiffre de v est forcément 1 ;
- Exception pour 0.

Normalisation IEEE 754

- Réduire la quantité d'info redondante ;
- format 32 bits pour simple précision, 64 et 80 pour double et étendue à partir de codages simples côte-à-côte ;
- Stockage de s, $\mathrm{E} = e + 127$, M (partie fractionnaire de v) ;
- Tout ceci en codage NAT car tout positif !
- Format sur 32 bits : $\overset{1}{\boxed{s}}\overset{8}{\boxed{\quad \mathrm{E} \quad}}\overset{23}{\boxed{\qquad \mathrm{M} \qquad}}$;
- Exception : pour 0, $\mathrm{E} = 00000000$, pour ∞, $\mathrm{E} = 11111111$;
- Intervalle de valeurs (32 bits) : 2^{-126} à $(2 - 2^{-23}) \times 2^{127}$, soit de $1,8 \times 10^{-38}$ à $3,4 \times 10^{38}$.

Exercices

Codage IEEE754

Q9 Ce tableau comporte des cases inutilisées. Complétez-le :

Décimal	Binaire	Virgule flottante	E	Codage IEEE754			Hexa
				S	E (8b)	M (23b)	
19,5	10011,1	$1{,}00111 \times 2^4$	131	0	10000011	$00111\,\underbrace{0\ldots0}_{\text{18 fois}}$	419C0000
-7,5							
-46,25							
0,3125							
							BE400000
							7F800000
0							
$-26{,}375 \times 2^{40}$							