

TD 9

Exercice 1 (Syntaxe des termes) Les termes suivants sont-ils syntaxiquement corrects ? Si oui, indiquer les variables libres.

- | | | |
|--------------------------|-------------------------------|---|
| 1. $\lambda x.x$ | 4. $\lambda x.\lambda y.xy$ | 7. $(\lambda x.y)xx$ |
| 2. $\lambda x.y$ | 5. $xy.\lambda x.\lambda y.x$ | 8. $\lambda zx.(x.\lambda y.y)x$ |
| 3. $\lambda x.\lambda y$ | 6. $\lambda x.xyy$ | 9. $(\lambda x.((xx)x))(\lambda x.((xx)x))$ |

Exercice 2 Réduire les lambda-termes suivants :

1. $(\lambda x.x)y$
2. $(\lambda xy.yx)z(\lambda x.x)$
3. $(\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx))$
4. $(\lambda x.((xx)x))(\lambda x.((xx)x))$

Exercice 3 On peut représenter les entiers et les opérations sur les entiers en λ -calcul :

$$\begin{array}{ll} 0 \stackrel{\text{def}}{=} \lambda fy.y & \text{succ} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda n fz.f(nfz) \\ 1 \stackrel{\text{def}}{=} \lambda fy.fy & \text{exp} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda nm.mn \\ n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda fy.f(f(\dots(fy)\dots)) \text{ (} f \text{ est appliqué } n \text{ fois)} & \text{plus} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda nm.fx.nf(mfx) \end{array}$$

Calculer les β -réductions successives pour les termes suivants :

1. $0(\lambda x.x)$
2. $\text{plus } 1 \ 2$

Montrer que le terme `plus` permet bien d'interpréter l'addition de 2 entiers.

Exercice 4 On considère les 3 termes suivants :

$$I = \lambda x.x \quad K = \lambda xy.x \quad S = \lambda xyz.xz(yz)$$

Montrer que $SKK \rightarrow_{\beta} I$