Institut Galilée — Logique
Licence d'Informatique

TD 8

Exercice 1 *Démontrez par induction sur la hauteur des preuves que si $\Gamma \vdash A \vee B$ est prouvable dans LJ alors $\Gamma \vdash B \vee A$ est aussi prouvable dans LJ.*

Exercice 2 *On considère le langage intuitionniste LS avec seulement la barre de Sheffer $'|'$ comme connecteur : une formule F de LS est soit une variable propositionnelle, soit de la forme $G|H$ où G et H sont des formules de LS. Le calcul des séquents de LS comporte uniquement les règles suivantes (A et B sont des formules de LS, Γ est une séquence finie de formules de LS, Δ comporte au plus une formule de LS) :*

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\mathtt{axiome}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\mathtt{coupure}) \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash}{\Gamma \vdash A|B}\ d-| \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma, A|B \vdash}\ g-|$$

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ (d\text{-}\mathtt{aff.}) \qquad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (g\text{-}\acute{e}\mathtt{change}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (g\text{-}\mathtt{aff.}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (g\text{-}\mathtt{cont.})$$

1. *Trouver pour chacun des séquents suivants une preuve avec le système LS :*
   $\vdash (A|A)|A$
   $A|B \vdash B|A$
2. *On considère que les connecteurs $'\neg'$, $'\vee'$, $'\wedge'$ et $'\Rightarrow'$ sont des alias de la façon suivante : $\neg A = A|A$, $A \vee B = (A|A)|(B|B)$, $A \wedge B = (A|B)|(A|B)$, $A \Rightarrow B = A|(B|B)$. Montrer alors que les règles de LJ sont des règles dérivables de LS.*
   Par exemple pour la règle $d - \neg$: s'il existe une preuve dans LS de $\Gamma, A \vdash$ alors il existe une preuve dans LS de $\Gamma \vdash \neg A$, c'est à dire une preuve de $\Gamma \vdash A|A$ (puisque $\neg A = A|A$).
3. *Sachant que $A|B$ a la valeur de vérité faux si et seulement si A et B ont comme valeurs de vérité vrai, indiquez comment peut s'exprimer $A|B$ en utilisant seulement les connecteurs de la logique propositionnelle $'\neg'$, $'\vee'$, $'\wedge'$ et $'\Rightarrow'$.*
4. *Montrer que les règles g-$|$ et d-$|$ sont dérivables dans LK en utilisant la traduction précédente du connecteur $'|'$.*
5. *En déduire que la règle de coupure est éliminable dans LS.*
6. *En déduire que le système LS est non contradictoire, c'est à dire que l'on ne peut pas montrer à la fois $\vdash A$ et $\vdash \neg A$.*