TD 7

Exercice 1 *Pour chacun des séquents suivants, donnez au moins une preuve dans LJ :*

1. $(A \vee B) \Rightarrow C \vdash (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
2. $\neg A \vee B \vdash \neg(\neg B) \vee (\neg A)$

Exercice 2 *Une preuve est dite atomique si pour tout axiome $A \vdash A$ y figurant, A est une variable propositionnelle. Montrez que pour toute formule F, le séquent $F \vdash F$ admet une preuve atomique dans LJ.*

Exercice 3 *Soient F et G deux formules propositionnelles quelconques. Soit A une variable propositionnelle de F. Montrer par récurrence sur la hauteur de la preuve que si F est prouvable dans LJ alors $F[G/A]$ est aussi prouvable dans LJ.*

Exercice 4 *Montrez que les deux séquents suivants sont équivalents dans LJ :*
$A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \wedge D))$ *et* $((A \wedge B) \Rightarrow C) \wedge ((A \wedge B) \Rightarrow D)$
Indication : on montre d'abord les équivalences :
d'une part $(X \wedge Y) \Rightarrow Z$ *et* $X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$
d'autre part $X \Rightarrow (Y \wedge Z)$ *et* $(X \Rightarrow Y) \wedge (X \Rightarrow Z)$

Exercice 5 *On considère maintenant des séquents avec des formules contenant le 'ou exclusif' noté $\oplus$. Soient les deux règles suivantes dans lesquelles Γ et Δ sont des ensembles de formules et A et B sont des formules :*

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \quad \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B} \oplus_d \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B \quad \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta} \oplus_g$$

1. *En utilisant les règles du système LK ainsi que les règles pour le connecteur $\oplus$ ci-dessus, les séquents suivants sont-ils prouvables :*
   (a) $A \vdash A \oplus B$
   (b) $A \oplus B \vdash A$
   (c) $A \oplus B \vdash A \vee B$
   (d) $A \vee B \vdash A \oplus B$
   (e) $(A \oplus B) \wedge (A \oplus C) \vdash A \oplus (B \wedge C)$
2. *Montrer que les deux règles ci-dessus sont correctes.*