

TD 6

Exercice 1

1. Donner une preuve dans LK de : $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \wedge C)$
2. En utilisant la preuve précédente et la règle de coupure, donner une preuve du séquent :
 $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C, (B \wedge C) \Rightarrow D \vdash A \Rightarrow D$
3. Donner une autre preuve du séquent précédent n'utilisant pas la règle de coupure.

Exercice 2 Soient F et G deux formules propositionnelles quelconques. Soit A une variable propositionnelle de F . Montrer par récurrence sur la hauteur de la preuve que si F est prouvable dans LK alors $F[G/A]$ est aussi prouvable dans LK.

Exercice 3 On rajoute au système LK une constante notée $\mathbf{1}$ et les deux règles suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{1} \vdash \Delta} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{1}, \Delta}$$

Montrer par induction sur la hauteur de la preuve que si $\Gamma, \mathbf{1} \vdash \Delta$ est prouvable alors $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable.