

TD 5

Exercice 1 À l'aide du calcul des séquents de Gentzen pour la logique propositionnelle (LK), donnez une preuve pour chacune des formules suivantes :

1. $P \Rightarrow P$
2. $P \vee \neg P$
3. $\neg P \vee \neg\neg P$
4. $(P \wedge Q) \vee \neg P \vee \neg Q$
5. $P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$
6. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

Exercice 2 À l'aide du calcul des séquents de Gentzen (LK), montrez que les séquents suivants sont prouvables :

1. $P \vee Q \vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$
2. $\vdash (P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

Exercice 3 Montrer que si les séquents prémisses de la règle suivante est une tautologie, alors le séquent conclusion est une tautologie : (Γ et Δ sont des ensembles finis non vides de formules, $\bigwedge \Gamma$ est la conjonction des formules de Γ , $\bigvee \Delta$ est la disjonction des formules de Δ , A et B sont deux formules)

$$\frac{\vdash (\bigwedge \Gamma) \Rightarrow ((\bigvee \Delta) \vee A)}{\vdash (\bigwedge \Gamma) \Rightarrow ((\bigvee \Delta) \vee A \vee B)}$$

Exercice 4 On se demande si certaines règles pourraient être ajoutées au système LK, sans modification pour l'ensemble des séquents prouvables.

1. La règle suivante est-elle une règle dérivée du système LK ?

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$

2. La règle suivante est-elle une règle dérivée du système LK ?

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \quad A, B, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$