

TD 3

Exercice 1 On va établir un algorithme pour calculer facilement la hauteur d'une formule.

1. Construisez une formule valide de hauteur 4 en gardant toutes les parenthèses, même superflues.
2. Parcourez la formule de gauche à droite, muni d'un compteur initialisé à zéro qu'on incrémente dès qu'on rencontre une parenthèse ouvrante et qu'on décrémente à chaque parenthèse fermante. Que remarquez-vous ?
3. Proposez une méthode générale pour déterminer la hauteur d'une formule grâce à ce que vous venez d'établir. Démontrez, par récurrence sur n , que cette méthode est correcte pour toutes les formules de hauteur n .

Exercice 2 - Substitution Posons F, G et H les formules suivantes :

$$F = A \vee (B \Rightarrow C)$$

$$G = A \vee B$$

$$H = \neg A \vee C$$

Ecrivez les formules $F[G/A]$, $F[G/A][H/B]$ et $F[G/A, H/B]$. En déduire que les formules $F[G/A][H/B]$ et $F[G/A, H/B]$ sont différentes.

Exercice 3 - Valeurs de vérité Soit la formule suivante :

$$F = ((A \wedge \neg B) \Rightarrow C) \vee ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C))$$

Donner la valeur de vérité de F pour la distribution de valeurs de vérité dans les cas suivants

1. $\delta(A) = \delta(B) = 0$ et $\delta(C) = 1$
2. $\delta(A) = \delta(C) = 0$ et $\delta(B) = 1$
3. $\delta(B) = \delta(C) = 0$ et $\delta(A) = 1$

Ecrivez les tables de vérité des deux formules suivantes :

1. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \vee A)) \Rightarrow A$
2. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \Leftrightarrow C)$

Exercice 4 - Utilisation de la table de vérité pour démontrer des équivalences Soit les deux formules F et G suivantes :

$$F = ((p \wedge q) \vee (r \wedge s))$$

$$G = ((p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s))$$

1. Comparez les tables de vérité de F et de G (avant de vous lancer : combien de lignes contiendra votre table ?). Que constatez-vous ?

Soit les deux formules H et I suivantes :

$$H = (p \Rightarrow (q \wedge r))$$

$$I = ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$$

2. Comparez les tables de vérité de H et de I (avant de vous lancer : combien de lignes contiendra votre table ?). Que constatez-vous ?

Soit la formule J suivante :

$$J = (p \Rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)))$$

3. Montrez par analyse sémantique (sans faire de table de vérité) que J est une tautologie.