TD 2

Exercice 1 Soit $E_1, ..., E_n$, des ensembles deux à deux distincts ($n > 0$). On souhaite montrer qu'au moins un de ces ensembles n'en contient aucun autre.

1. Essayez de trouver un contre-exemple pour $n = 3$ (en dessinant vos ensembles comme des cercles).
2. Montrez par récurrence que cette propriété est vraie.

Exercice 2 On pose la proposition $P(n)$: "Dans tout groupe de n personnes de la classe contenant le professeur, tout le monde est d'accord avec le professeur".

1. Montrez que $P(1)$ est vraie.
2. On suppose $P(n)$ vraie, et on propose le raisonnement suivant pour prouver $P(n+1)$:

   Considérons un groupe G de taille $n+1$, où le professeur est la $n^{\text{ième}}$ personne. Si on prend les n première personnes de G, alors par hypothèse d'induction tout le monde est d'accord avec le professeur. De même, les n dernières personnes de G sont toutes d'accord avec le professeur. Toutes les personnes dans G sont donc d'accord avec le professeur, on a prouvé $P(n+1)$!

   Peut-on conclure que pour tout n entier strictement positif, $P(n)$ est vraie, autrement dit que tout le monde est d'accord avec le professeur ? Si non, où est l'erreur ?

Exercice 3

1. Donner une définition inductive de l'ensemble des indices des occurrences d'un symbole s dans un mot m. Par exemple, l'ensemble des indices des occurrences du symbole 'a' dans "azertaay" est $\{0, 5, 6\}$.
2. Soit P un ensemble de variables propositionnelles. Soit $\mathcal{G}$ le sous-ensemble constitué des formules propositionnelles où seuls les connecteurs $\Rightarrow$ et $\neg$ apparaissent (les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$ n'apparaissent pas).
   (a) Donner une définition inductive de $\mathcal{G}$.
   (b) Soit f une application de P dans $\mathcal{G}$. Montrer qu'il existe un unique prolongement $\hat{f}$ de f à $\mathcal{G}$ tel que, pour toutes formules F et G de $\mathcal{G}$, on ait : $\hat{f}(\neg F) = \neg \hat{f}(F)$ et $\hat{f}((F \Rightarrow G)) = \neg(\hat{f}(G) \Rightarrow \hat{f}(F))$.
   Pour la fonction $f_0 : P \to \mathcal{G}$ définie par $f_0(p) = (\neg p \Rightarrow p)$, écrire $\hat{f}_0((p \Rightarrow \neg(\neg q \Rightarrow p)))$.

Exercice 4 Donner l'ensemble des sous formules des formules suivantes

$$F = (((A \wedge (B \Rightarrow C)) \vee (\neg A \Rightarrow B)) \wedge (B \vee \neg C))$$

$$G = (\neg(A \wedge B) \vee (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (C \vee (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$$