

TD 10

Exercice 1 Montrer que les termes Y et Θ sont des opérateurs de point fixe, c'est à dire montrer que, pour tout terme t , $Y t =_{\beta} t (Y t)$ et $\Theta t =_{\beta} t (\Theta t)$.

$$\begin{aligned} - Y &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)) \\ - \Theta &\stackrel{\text{def}}{=} (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy)) \end{aligned}$$

Exercice 2 On suppose donné un terme pred représentant la fonction prédécesseur, et un terme succ représentant la fonction successeur. On considère la définition récursive suivante de la fonction plus sur les entiers positifs :

$x + y = \text{si } y = 0 \text{ alors } x \text{ sinon } 1 + (x + (y - 1))$.

Donner une définition de cette fonction plus en faisant appel à un opérateur de point fixe.

Exercice 3 Trouver un type simple pour les termes $\lambda x.x$, les entiers, plus , succ .

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda f y.y & \text{succ} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda n f z.f(n f z) \\ 1 &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda f y.f y & \text{plus} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda n m f x.n f(m f x) \\ n &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda f y.f(f(\dots(f y)\dots)) \text{ (} f \text{ est appliqué } n \text{ fois)} \end{aligned}$$

Système de types simples :

$$\frac{}{x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash x_i : A_i} \quad \frac{x : A, \Gamma \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x.t : A \Rightarrow B} \quad \frac{\Gamma \vdash t : A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash tu : B}$$