

TD 1

Exercice 1

— Les mots ci-dessous sont-ils des formules ?

1. $A \vee (A \wedge B)$
2. $(\neg A)B \vee C$
3. $(A \Rightarrow B \wedge C)$
4. $A \Rightarrow (B \wedge C)$
5. $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow C$
6. $A \wedge B \wedge C$
7. $(A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C) \Rightarrow C$
8. $A \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow A$
9. $((A \wedge (B \Rightarrow C)) \vee (\neg A \Rightarrow B)) \wedge (B \vee \neg C)$
10. $(A \vee (B \Rightarrow \neg C)) \vee \neg(B \Rightarrow A)$

— Soit F une formule propositionnelle.

On définit la hauteur d'une formule F , notée $h(F)$, comme le plus petit entier n tel que $F \in \mathcal{F}_n$.

On définit la longueur de F notée $l(F)$ comme le nombre de symboles différents des parenthèses constituant F .

Quand les mots ci-dessus sont des formules, donner leur hauteur et leur longueur.

Exercice 2

- Donner les longueurs minimum et maximum d'une formule de hauteur n .
- Donner les hauteurs minimum et maximum d'une formule de longueur k .
- Montrer par récurrence que pour toute formule $F \in \mathcal{F}$, $h(F) \leq l(F)$.
- On définit également $c(F)$ comme le nombre de connecteurs dans l'expression de F . Montrer que pour toute formule $F \in \mathcal{F}$, $h(F) \leq c(F) \leq l(F) - 1$.

Exercice 3 Montrer que pour toute formule $F \in \mathcal{F}$, le nombre de parenthèses est pair.