Institut Galilée | Logique
Année 2016-2017 | Licence 1

Contrôle de Logique

Vendredi 5 Mai 2017 10h - 12h
Aucun document n'est autorisé

! ! ! Il est important de parfaitement JUSTIFIER chacune de vos réponses ! ! !

Exercice 1 *(5 = 5*0,5 + 5*0,5 pts)*

A l'aide du calcul des séquents de Gentzen pour LK, montrer que les séquents suivants sont prouvables.

1. $\vdash \neg A \Rightarrow \neg A$
2. $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
3. $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$
4. $\vdash (A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C))$
5. $(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash (A \vee B) \Rightarrow C$

Ces séquents sont-ils prouvables dans LJ ? Si ce n'est pas le cas, en donner une justification.

Exercice 2 *(2 pts)*

Montrer que si les formules associées aux séquents prémisses de la règle suivante sont des tautologies pour LK, alors la formule associée au séquent conclusion est une tautologie pour LK :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}$$

Exercice 3 *(4 = 1 + 1 + 1 + 1 pts)*

Rappel : On peut représenter les entiers et les opérations sur les entiers en λ-calcul :

$0 \stackrel{def}{=} \lambda fy.y$ $\qquad$ $succ \stackrel{def}{=} \lambda nfz.f(nfz)$
$1 \stackrel{def}{=} \lambda fy.fy$ $\qquad$ $\texttt{plus} \stackrel{def}{=} \lambda nmfx.nf(mfx)$
$n \stackrel{def}{=} \lambda fy.f(f(...(fy)...)$ *(f est appliqué n fois)* $\qquad$ $exp \stackrel{def}{=} \lambda nm.mn$

Calculer les β-réductions successives pour les termes suivants :

1. $(\lambda x.x)y$
2. $0\ (\lambda x.x)$
3. $\texttt{plus}\ 1\ 2$

Trouver un type simple (dans LJ) associé au terme $\texttt{exp}$.

Exercice 4 *(4 = 2 + 2 pts)*

Soient F et G deux formules quelconques.

— *Montrer, en se servant du fait que LK est correct et complet pour la logique propostionnelle, que si le séquent $\Gamma \vdash F \wedge G, \Delta$ est prouvable alors les séquents $\Gamma \vdash F, \Delta$ et $\Gamma \vdash G, \Delta$ sont prouvables.*
— *Montrer, par récurrence sur la hauteur de la preuve, que si le séquent $\Gamma, F \wedge G \vdash \Delta$ est prouvable alors le séquent $\Gamma, F, G \vdash \Delta$ est prouvable.*

Exercice 5 *(5 = 2 + 1 + 1 + 1 pts)*

On considère le calcul suivant : les séquents sont de la forme $\Gamma \vdash \Delta$ où Γ (resp. Δ) est une liste de formules de type G (resp. D), avec le langage de formules suivant (A est une variable propositionnelle quelconque, Γ, Δ listes quelconques) :

$G ::= A \mid D \supset A \mid G \wedge G$
$D ::= A \mid D \wedge D \mid G \supset D \mid D \vee D$

Les règles de ce calcul sont les règles d'échange et contraction droite et gauche et les règles suivantes (A et B sont des variables propositionnelles) :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta}\ (\supset_g) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \supset B}\ (\supset_d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee_d) \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\wedge_d)$$

1. *Montrer que, pour toutes listes de formules Γ, Γ', Δ, Δ', si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable alors $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ est prouvable. (démonstration par récurrence sur la hauteur de la preuve de $\Gamma \vdash \Delta$)*
2. *Une occurrence de formule est dite* `muette` *dans une preuve si et seulement si cette occurrence n'est jamais utilisée comme formule principale d'une règle. Montrer que si A est muette dans une preuve de $A, \Gamma \vdash \Delta$ alors $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable.*
3. *Montrer que si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable alors il existe une formule F de Δ telle que $\Gamma \vdash F$ est prouvable.*
4. *Montrer que tout séquent prouvable admet une preuve uniforme (i.e. une règle gauche n'est applicable que si toutes les formules en partie droite sont des variables propositionnelles).*

Calcul des séquents LK pour la logique propositionnelle :

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\texttt{axiome}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\texttt{coupure})$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ (\texttt{d-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\texttt{d-aff.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\texttt{d-cont.})$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\texttt{g-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-aff.}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-cont.})$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ (\texttt{d-négation}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-négation})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\ (\texttt{d-implication}) \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-implication})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ (\texttt{d-et}) \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\texttt{d-ou}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-ou})$$

Calcul des séquents LJ pour la logique propositionnelle : (Δ est au plus une formule)

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\texttt{axiome}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\texttt{coupure})$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ (\texttt{d-aff.}) \qquad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\texttt{g-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-aff.}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-cont.})$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\texttt{d-négation}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash}\ (\texttt{g-négation})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\texttt{d-implication}) \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-implication})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\texttt{d-et}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\texttt{d-ou}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\texttt{d-ou}_2)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-ou}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}_1) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}_2)$$

Système de types simples :

$$\frac{}{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash x_i : A_i} \qquad \frac{x : A, \Gamma \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x.t : A \Rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash tu : B}$$