Institut Galilée
Année 2015-2016

Logique
Licence 1

Contrôle de Logique

Lundi 9 Mai 2016 14h - 16h

Aucun document n'est autorisé

! ! ! Il est important de parfaitement JUSTIFIER chacune de vos réponses ! ! !

Exercice 1 *(8 = 4*0,5 + 4*1 + 4*0,5 pts)*

1. $F = \neg\neg A \Rightarrow A$
2. $F = \neg A \vee ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$
3. $F = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow ((B \wedge \neg C) \vee C))$
4. $F = ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

Pour chacune des formules F ci-dessus,

- *Montrer que F est une tautologie en utilisant une table de vérité.*
- *Trouver une preuve de $\vdash F$ dans LK.*
- *Dire si cette preuve est aussi une peuve dans LJ. Si ce n'est pas le cas, pouvez-vous soit trouver une preuve dans LJ soit indiquer ce qui vous fait penser qu'il n'y en a pas.*

Exercice 2 *(2 pts) Montrer que si les formules associées aux séquents prémisses de la règle suivante sont des tautologies, alors la formule associée au séquent conclusion est une tautologie :*

$$\frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \vee B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}$$

Exercice 3 *(3 = 1 + 2 pts)*

1. *En utilisant la règle de coupure, montrez que si $\Gamma \vdash A \wedge B$ est prouvable dans LJ alors $\Gamma \vdash B \wedge A$ est prouvable dans LJ.*
2. *Sans utiliser la règle de coupure, montrez par induction sur la hauteur des preuves que si $\Gamma \vdash A \wedge B$ est prouvable dans LJ alors $\Gamma \vdash B \wedge A$ est prouvable dans LJ.*

Exercice 4 *(7 = 2*0,5 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 pts) On considère le langage intuitionniste LS avec seulement la barre de Sheffer $'|'$ comme connecteur : une formule F de LS est soit une variable propositionnelle, soit de la forme $G|H$ où G et H sont des formules de LS. Le calcul des séquents de LS comporte uniquement les règles suivantes (A et B sont des formules de LS, Γ est une séquence finie de formules de LS, Δ comporte au plus une formule de LS) :*

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\texttt{axiome}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\texttt{coupure}) \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash}{\Gamma \vdash A|B}\ d-| \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma, A|B \vdash}\ g-|$$

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ (\texttt{d-aff.}) \qquad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\texttt{g-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-aff.}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-cont.})$$

1. *Trouver pour chacun des séquents suivants une preuve avec le système LS :*
   $\vdash (A|A)|A$
   $A|B \vdash B|A$
2. *On considère que les connecteurs $'\neg'$, $'\vee'$, $'\wedge'$ et $'\Rightarrow'$ sont des alias de la façon suivante : $\neg A = A|A$, $A \vee B = (A|A)|(B|B)$, $A \wedge B = (A|B)|(A|B)$, $A \Rightarrow B = A|(B|B)$. Montrer alors que les règles de LJ sont des règles dérivables de LS.*
   Par exemple pour la règle $d - \neg$: s'il existe une preuve dans LS de $\Gamma, A \vdash$ alors il existe une preuve dans LS de $\Gamma \vdash \neg A$, c'est à dire une preuve de $\Gamma \vdash A|A$ (puisque $\neg A = A|A$).
3. *Sachant que $A|B$ a la valeur de vérité faux si et seulement A et B ont comme valeurs de vérité vrai, indiquez comment peut s'exprimer $A|B$ en utilisant seulement les connecteurs de la logique propositionnelle $'\neg'$, $'\vee'$, $'\wedge'$ et $'\Rightarrow'$.*
4. *Montrer que les règles g-$|$ et d-$|$ sont dérivables dans LJ en utilisant la traduction précédente du connecteur $'|'$.*
5. *En déduire que la règle de coupure est éliminable dans LS.*
6. *En déduire que le système LS est non contradictoire, c'est à dire que l'on ne peut pas montrer à la fois $\vdash A$ et $\vdash \neg A$.*

Calcul des séquents LK pour la logique propositionnelle :

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ \texttt{(axiome)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ \texttt{(coupure)}$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ \texttt{(d-échange)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ \texttt{(d-aff.)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ \texttt{(d-cont.)}$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ \texttt{(g-échange)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \texttt{(g-aff.)} \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \texttt{(g-cont.)}$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \texttt{(d-négation)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \texttt{(g-négation)}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\ \texttt{(d-implication)} \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \texttt{(g-implication)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \texttt{(d-et)} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \texttt{(g-et)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \texttt{(d-ou)} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \texttt{(g-ou)}$$

Calcul des séquents LJ pour la logique propositionnelle : (Δ est au plus une formule)

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ \texttt{(axiome)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ \texttt{(coupure)}$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ \texttt{(d-aff.)} \qquad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ \texttt{(g-échange)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \texttt{(g-aff.)} \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \texttt{(g-cont.)}$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}\ \texttt{(d-négation)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash}\ \texttt{(g-négation)}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ \texttt{(d-implication)} \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \texttt{(g-implication)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \texttt{(d-et)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \texttt{(d-ou}_1\texttt{)} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \texttt{(d-ou}_2\texttt{)}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \texttt{(g-ou)} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \texttt{(g-et}_1\texttt{)} \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \texttt{(g-et}_2\texttt{)}$$