Institut Galilée
Année 2014-2015

Logique
Licence 1

Contrôle de Logique

Jeudi 7 Mai 2015 9h - 11h
Aucun document n'est autorisé

! ! ! Il est important de JUSTIFIER chacune de vos réponses ! ! !

Exercice 1 *(3 = 1 + 1 + 1 pts)*
Rappeler la définition d'un séquent.
Rappeler la définition d'une preuve de LK.
Rappeler les énoncés des théorèmes de correction, de complétude, d'élimination des coupures, et dire brièvement ce qu'ils signifient.

Exercice 2 *(8 = 2 * (1 + 1 + 1 + 1) pts)*
Pour chacune des formules F ci-dessous,
- *En utilisant la table de vérité, montrer que F est une tautologie.*
- *Trouver une preuve dans LK de $\vdash F$.*

1. $\neg\neg A \Rightarrow A$
2. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
3. $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C))$
4. $A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Exercice 3 *(3 = 1,5 + 1,5 pts)*
On considère la formule suivante F : $(C \wedge (A \Rightarrow (D \wedge B))) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

1. *Mettre la formule sous forme normale conjonctive, c'est à dire de la forme $\bigwedge_i (\bigvee_j C_{ij})$ où chaque C_{ij} est une variable propositionnelle ou la négation d'une variable propositionnelle.*
2. *Mettre la formule sous forme normale disjonctive, c'est à dire de la forme $\bigvee_i (\bigwedge_j C_{ij})$ où chaque C_{ij} est une variable propositionnelle ou la négation d'une variable propositionnelle.*

Dans chaque cas, justifiez les transformations que vous effectuez sur la formule.

Exercice 4 *(2 pts)*
Montrer que si les séquents prémisses de la règle suivante sont des tautologies alors le séquent conclusion est une tautologie :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \Rightarrow B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \; (\Rightarrow \text{-}g)$$

Exercice 5 *(4 = 1 + 3 pts)*
On rajoute au système LK une constante noté $\perp$ (appelé bottom*) et les deux règles suivantes :*

$$\frac{}{\perp, \Gamma \vdash \Delta} \; g - \perp \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \perp, \Delta} \; d - \perp$$

1. *Rappeler ce qu'est une démonstration par induction.*
2. *Montrer par induction sur la hauteur de la preuve que si $\Gamma \vdash \perp, \Delta$ est prouvable alors $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable.*

Calcul des séquents LK pour la logique propositionnelle :

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\texttt{axiome}) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\texttt{coupure})$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ (\texttt{d-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\texttt{d-aff.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\texttt{d-cont.})$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_1 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\texttt{g-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-aff.}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-cont.})$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ (\texttt{d-négation}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-négation})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\ (\texttt{d-implication}) \quad \frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \Rightarrow B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\texttt{g-implication})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B}\ (\texttt{d-et}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\texttt{d-ou}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\texttt{d-ou}_2)$$

$$\frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \vee B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\texttt{g-ou}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}_1) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}_2)$$
