Institut Galilée | Logique
Année 2013-2014 | Licence 1

Contrôle de Logique

Vendredi 16 Mai 2014 9h - 11h
Aucun document n'est autorisé

! ! ! Il est important de JUSTIFIER chacune de vos réponses ! ! !

Exercice 1 *(3 = 1,5 + 1,5 pts)*
On considère la formule suivante : $(((A \vee (B \wedge C)) \wedge \neg(A \vee B)) \vee \neg B)$

1. *Mettre la formule sous forme normale conjonctive*
2. *Mettre la formule sous forme normale disjonctive*

Dans chaque cas, justifiez les transformations que vous effectuez sur la formule.

Exercice 2 *(2 pts)*
On considère la fonction booléenne ci-dessous. Quelle est la formule dont f détermine la table de vérité ?

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Exercice 3 *(2 = 1 + 1 pts)*
Rappeler la définition d'un séquent.
Rappeler la définition d'une preuve de LK.

Exercice 4 *(4 = 1 + 1 + 1 + 1 pts)*
Trouver une preuve dans LK pour chacun des séquents suivants :

1. $\vdash (A \Rightarrow \neg\neg A)$
2. $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
3. $\vdash ((((A \vee B) \wedge (A \Rightarrow C)) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow C)$
4. $X \vee Y \vdash ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow Y)$

Exercice 5 *(3 pts)*
Montrer que si les séquents prémisses de la règle suivante sont des tautologies alors le séquent conclusion est une tautologie :

$$\frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \vee B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (g\text{-}ou)$$

Exercice 6 *(6 = 1 + 1 + 1 + 3 pts)*

1. *Montrer que le séquent $\neg\neg A \vdash A$ est prouvable dans LK.*
2. *Montrer en utilisant une coupure que si le séquent $\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta$ est prouvable dans LK alors le séquent $\Gamma \vdash A, \Delta$ est prouvable dans LK.*
3. *En déduire que si le séquent $\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta$ est prouvable dans LK alors le séquent $\Gamma \vdash A, \Delta$ est prouvable dans LK sans coupure.*
4. *On suppose dans cette question que Γ est une suite de formules qui ne comportent pas de symbole '$\Rightarrow$' et '$\neg$'. Montrer, sans utiliser la règle de coupure, par induction sur la hauteur de la preuve que si le séquent $\Gamma \vdash \neg\neg A$ est prouvable dans LK alors le séquent $\Gamma \vdash A$ est prouvable dans LK.*

Calcul des séquents LK pour la logique propositionnelle :

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\texttt{axiome}) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\texttt{coupure})$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ (\texttt{d-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\texttt{d-aff.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\texttt{d-cont.})$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_1 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\texttt{g-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-aff.}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-cont.})$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ (\texttt{d-négation}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-négation})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\ (\texttt{d-implication}) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \Rightarrow B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\texttt{g-implication})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B}\ (\texttt{d-et}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\texttt{d-ou}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\texttt{d-ou}_2)$$

$$\frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \vee B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\texttt{g-ou}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}_1) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}_2)$$