Institut Galilée — Logique

Année 2016-2017 — Licence 1

Contrôle de Logique

Jeudi 22 Juin 2017 9h - 12h

Aucun document n'est autorisé

! ! ! Il est important de parfaitement JUSTIFIER chacune de vos réponses ! ! !

Exercice 1 *(2 = 4*0,5 pts)*

Soit F la formule $(A \vee \neg B) \Rightarrow (C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B))$.

1. *Calculer (et justifier) la hauteur et la longueur de F.*
2. *Rappeler ce qu'est une distribution de valeurs de vérité.*
3. *Donner la table de vérité de F.*
4. *(substitution) Soit $G = B \vee (\neg A \wedge B)$, que sont les formules $F[G/A][A/C]$, $F[A/C][G/A]$, $F[G/A, A/C]$?*

Exercice 2 *(2 = 4*0,5 pts)*

Les formules suivantes sont-elles des tautologies ? On utilisera une table de vérité, certaines distributions de valeurs de vérité, un raisonnement sur les valuations ou les propriétés sur la substitution de formules ou l'équivalence de formules.

1. $(A \wedge B) \Rightarrow A$
2. $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg(B \vee C))$
3. $((D \vee A) \vee A) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \wedge \neg(C \Rightarrow A))$
4. $(A \Rightarrow ((B \vee \neg C) \wedge \neg(A \Rightarrow B))) \vee ((U \wedge \neg V) \vee (A \vee C))$

Exercice 3 *(2 = 0,5 + 0,5 + 1 pts)*

On considère la formule $F = \neg(A \wedge C) \Rightarrow (\neg B \vee (\neg C \wedge A))$

1. *Rappeler la définition de forme normale conjonctive.*
2. *Donner la table de vérité de $\neg F$.*
3. *En déduire une formule sous forme normale conjonctive équivalente à F.*

Exercice 4 *(2 pts)*

Soit Δ un ensemble fini de formules, G et H deux formules, montrer que $\Delta \cup \{\neg G\} \models H$ ssi $\Delta \models G \vee H$

Exercice 5 *(2 = 4*0,5 pts)*

A l'aide du calcul des séquents de Gentzen pour LK, montrer que les séquents suivants sont prouvables.

1. $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3. $\neg B \Rightarrow \neg A \vdash A \Rightarrow B$
4. $(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash (A \vee B) \Rightarrow C$

Exercice 6 *(2 pts)*

Montrer que si les formules associées aux séquents prémisses de la règle suivante sont des tautologies pour LK, alors la formule associée au séquent conclusion est une tautologie pour LK :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

Exercice 7 *(4 = 1 + 1 + 1 + 1 pts)*

Rappel : On peut représenter les entiers et les opérations sur les entiers en λ-calcul :

$0 \stackrel{def}{=} \lambda fy.y$ — $\mathtt{succ} \stackrel{def}{=} \lambda nfz.f(nfz)$

$1 \stackrel{def}{=} \lambda fy.fy$ — $\mathtt{plus} \stackrel{def}{=} \lambda nmfx.nf(mfx)$

$n \stackrel{def}{=} \lambda fy.f(f(...(fy)...)$ *(f est appliqué n fois)* — $\mathtt{exp} \stackrel{def}{=} \lambda nm.mn$

Calculer les β-réductions successives pour les trois termes suivants : $t_1 = \mathtt{succ}\, 2$, $t_2 = \mathtt{plus}\, 2$, $t_3 = \mathtt{plus}\, 1\, 2$

Trouver un type simple (dans LJ) associé au terme $\mathtt{exp}$.

Exercice 8 *(2 pts)*

Soient $\Gamma \vdash \Delta$ un séquent quelconque. Soit F une formule et X une variable propositionnelle. Montrer par récurrence sur la hauteur de la preuve que si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK alors $\Gamma[F/X] \vdash \Delta[F/X]$ est prouvable.

Exercice 9 *(2 pts)*

On rajoute au système LK une constante noté $\perp$ (appelé bottom*) et les deux règles suivantes :*

$$\frac{}{\perp, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \perp, \Delta}$$

Montrer par induction sur la hauteur de la preuve que $\Gamma \vdash \perp, \Delta$ est prouvable si et seulement si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable.

Calcul des séquents LK pour la logique propositionnelle :

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\texttt{axiome}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\texttt{coupure})$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ (\texttt{d-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\texttt{d-aff.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\texttt{d-cont.})$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\texttt{g-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-aff.}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-cont.})$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ (\texttt{d-négation}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-négation})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\ (\texttt{d-implication}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-implication})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ (\texttt{d-et}) \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\texttt{d-ou}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-ou})$$

Calcul des séquents LJ pour la logique propositionnelle : (Δ est au plus une formule)

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\texttt{axiome}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\texttt{coupure})$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ (\texttt{d-aff.}) \qquad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\texttt{g-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-aff.}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-cont.})$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\texttt{d-négation}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash}\ (\texttt{g-négation})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\texttt{d-implication}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-implication})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\texttt{d-et}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\texttt{d-ou}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\texttt{d-ou}_2)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-ou}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}_1) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}_2)$$

Système de types simples :

$$\frac{}{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash x_i : A_i} \qquad \frac{x : A, \Gamma \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x.t : A \Rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash tu : B}$$