Institut Galilée
Année 2015-2016

Logique
Licence 1

Contrôle de Logique

Vendredi 24 Juin 2016 10h - 12h
Aucun document n'est autorisé

! ! ! Il est important de JUSTIFIER chacune de vos réponses ! ! !

Exercice 1 *(2 pts)*
Représenter le diagramme d'Euler pour le syllogisme suivant. Est-il valide ? Justifiez votre réponse.
Il existe un poisson qui a des nageoires ;
Or tous les saumons sont des poissons ;
Donc tous les saumons ont des nageoires.
Si la conclusion ne découle pas de ce syllogisme, trouvez le syllogisme qui permettrait d'avoir cette conclusion.

Exercice 2 *(6 = 3*2 pts)*

1. *Donner pour chacune des formules suivantes la table de vérité. Les formules sont-elles des tautologies ?*
2. *Mettre chacune des formules sous forme normale disjonctive.*
3. *Mettre chacune des formules sous forme normale conjonctive.*

— $(A \Rightarrow \neg(B \Rightarrow C)) \wedge (A \Rightarrow (B \wedge \neg C))$
— $((A \vee B) \Rightarrow \neg(B \wedge \neg C)) \vee ((B \vee C) \Rightarrow \neg A)$

Exercice 3 *(2 pts)*
On considère la fonction booléenne ci-dessous. Donner une formule dont f détermine la table de vérité ?

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Exercice 4 *(4 = 1 + 1 + 1 + 1 pts)*
Les formules suivantes sont-elles prouvables dans LK ? Si oui, on en donnera une preuve avec le calcul des séquents de LK, sinon on proposera des valeurs de vérité pour A, B et C qui rendent la formule fausse.

1. $(A \vee \neg A) \wedge (A \vee B)$
2. $(A \wedge \neg A) \vee (A \wedge B)$
3. $(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow (\neg(A \wedge B))$
4. $(((\neg A \vee \neg B) \vee C) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Exercice 5 *(2 pts) Montrer que si les formules associées aux séquents prémisses de la règle suivante sont des tautologies, alors la formule associée au séquent conclusion est une tautologie :*

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \ (d\text{-}et)$$

Exercice 6 *(4 pts)*
On rajoute au système LK une constante notée $\mathbf{1}$ et les deux règles suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{1} \vdash \Delta} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{1}, \Delta}$$

Montrer par induction sur la hauteur de la preuve que si $\Gamma, \mathbf{1} \vdash \Delta$ est prouvable alors $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable.

Calcul des séquents LK pour la logique propositionnelle :

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\texttt{axiome}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\texttt{coupure})$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ (\texttt{d-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\texttt{d-aff.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\texttt{d-cont.})$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\texttt{g-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-aff.}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-cont.})$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ (\texttt{d-négation}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-négation})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\ (\texttt{d-implication}) \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-implication})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ (\texttt{d-et}) \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ (\texttt{d-ou}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-ou})$$

Calcul des séquents LJ pour la logique propositionnelle : (Δ est au plus une formule)

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\texttt{axiome}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\texttt{coupure})$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ (\texttt{d-aff.}) \qquad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\texttt{g-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-aff.}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\texttt{g-cont.})$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\texttt{d-négation}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash}\ (\texttt{g-négation})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\texttt{d-implication}) \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-implication})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\texttt{d-et}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\texttt{d-ou}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\texttt{d-ou}_2)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-ou}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}_1) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\texttt{g-et}_2)$$