

Contrôle de Logique

Mardi 23 Juin 2015 14h - 16h
Aucun document n'est autorisé

!!! Il est important de JUSTIFIER chacune de vos réponses !!!

Exercice 1 (2 pts)

Représenter le diagramme d'Euler pour le syllogisme suivant. Est-il valide ? Justifiez votre réponse.

- Tous les mammifères ont un coeur ;
- Or il existe un chien qui est un mammifère ;
- Donc tous les chiens ont un coeur.

Si la conclusion ne découle pas de ce syllogisme, trouvez le syllogisme qui permettrait d'avoir cette conclusion.

Exercice 2 (2 pts)

Les formules suivantes sont-elles des tautologies ?

1. $\neg\neg A \vee \neg A$
2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \vee (A \Rightarrow (B \wedge \neg C))$

Exercice 3 (6 = 2 + 2 + 2 pts)

On considère la formule F suivante : $((A \vee B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Rightarrow B$

1. La formule F est-elle une tautologie ?
2. Mettre la formule F sous forme normale conjonctive
3. Mettre la formule F sous forme normale disjonctive

Exercice 4 (6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 pts)

1. Rappeler quand un système de déduction est correct, quand un système de déduction est complet.
2. Les formules suivantes ont-elles prouvables ? Si oui, on en donnera une preuve avec le calcul des séquents de LK, sinon on proposera des valeurs de vérité pour A , B et C qui rendent la formule fausse.
 - (a) $A \vdash A \vee B$
 - (b) $A \vdash A \wedge B$
 - (c) $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$
 - (d) $\vdash (\neg X \vee \neg Y) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$
 - (e) $((A \wedge B) \Rightarrow C) \wedge (\neg A \vee B) \vdash A \Rightarrow C$

Exercice 5 (4 pts)

Soient $\Gamma \vdash \Delta$ un séquent quelconque. Soit F une formule et X une variable propositionnelle. Montrer par récurrence sur la hauteur de la preuve que si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK alors $\Gamma[F/X] \vdash \Delta[F/X]$ est prouvable.

Calcul des séquents LK pour la logique propositionnelle :

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A} \text{ (axiome)} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (coupure)}$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2} \text{ (d-échange)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (d-aff.)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (d-cont.)}$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} \text{ (g-échange)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ (g-aff.)} \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ (g-cont.)}$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \text{ (d-négation)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \text{ (g-négation)}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \text{ (d-implication)} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \Rightarrow B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (g-implication)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B} \text{ (d-et)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \text{ (d-ou}_1\text{)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \text{ (d-ou}_2\text{)}$$

$$\frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \vee B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (g-ou)} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \text{ (g-et}_1\text{)} \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \text{ (g-et}_2\text{)}$$