

Contrôle de Logique

Mercredi 25 Juin 2014 13h - 15h
Aucun document n'est autorisé

!!! Il est important de JUSTIFIER chacune de vos réponses !!!

Exercice 1 (2 pts)

Représenter le diagramme d'Euler pour le syllogisme suivant. Est-il valide ? Justifiez votre réponse.

- Tous les chiens ont quatre pattes ;
- Or les oiseaux ont deux pattes ;
- Donc les oiseaux sont des chiens.

Exercice 2 (6 = 2 + 2 + 2 pts)

On considère la formule F suivante : $\neg(\neg(A \vee \neg B) \wedge (B \Rightarrow \neg A))$

1. La formule F est-elle une tautologie ?
2. Mettre la formule F sous forme normale conjonctive
3. Mettre la formule F sous forme normale disjonctive

Exercice 3 (2 pts)

On considère la fonction booléenne ci-dessous. Quelle est la formule dont f détermine la table de vérité ?

A	B	C	$f(A, B, C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Exercice 4 (6 = 1,5 + (1,5 + 1,5 + 1,5) pts)

1. Rappeler ce qu'est une distribution de valeurs de vérité. Rappeler quand une formule est prouvable. Rappeler quand un ensemble de formules est consistant.
2. Les formules suivantes ont-elles prouvables ? Si oui, on en donnera une preuve avec le calcul des séquents de LK, sinon on proposera des valeurs de vérité pour A , B et C qui rendent la formule fausse.
 - (a) $\neg\neg A \Rightarrow A$
 - (b) $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
 - (c) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Exercice 5 (4 pts)

On rajoute au système LK une constante noté \perp (appelé bottom) et les deux règles suivantes :

$$\frac{}{\perp, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \perp, \Delta}$$

Montrer par induction sur la hauteur de la preuve que si $\Gamma \vdash \perp, \Delta$ est prouvable alors $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable.

Calcul des séquents LK pour la logique propositionnelle :

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A} \text{ (axiome)} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (coupure)}$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2} \text{ (d-échange)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (d-aff.)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (d-cont.)}$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} \text{ (g-échange)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ (g-aff.)} \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ (g-cont.)}$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \text{ (d-négation)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \text{ (g-négation)}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \text{ (d-implication)} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \Rightarrow B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (g-implication)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B} \text{ (d-et)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \text{ (d-ou}_1\text{)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \text{ (d-ou}_2\text{)}$$

$$\frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \vee B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (g-ou)} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \text{ (g-et}_1\text{)} \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \text{ (g-et}_2\text{)}$$