Institut Galilée
Année 2017-2018

Logique
Licence 1

Contrôle de Logique

Vendredi 23 Février 2018 12h - 14h
Aucun document n'est autorisé

! ! !Il est important de JUSTIFIER chacune de vos réponses ! ! ! Total des points : 21,5

Exercice 1 *(3,5 = 0,5 + 1 + 2 pts) Soit F la formule $(\neg A \Rightarrow \neg C) \vee ((A \wedge B) \Rightarrow C)$.*

1. *Donner l'ensemble des sous-formules de F.*
2. *Calculer (et justifier) la hauteur et la longueur de F.*
3. *(substitution) Soit $G = \neg A \vee \neg C$, que sont les formules $F[G/B]$, $F[G/A][A/C]$, $F[A/C][G/A]$, $F[G/A, A/C]$?*

Exercice 2 *(3 = 0,5 + 2,5 pts) On considère la formule $F = \neg(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge (\neg B \Rightarrow A))$*

1. *Donner la table de vérité de F.*
2. *En déduire une formule sous forme normale disjonctive équivalente à F.*

Exercice 3 *(6 pts) Les formules suivantes sont-elles des tautologies ? On utilisera une table de vérité, certaines distributions de valeurs de vérité, un raisonnement sur les valuations ou les propriétés sur la substitution de formules ou un raisonnement ou des équivalences de formules.*
Dans chacun des cas où la formule est une tautologie, donner une preuve du séquent associé dans le calcul des séquents LK.

1. $(A \wedge \neg B) \vee (((C \Rightarrow A) \wedge C) \Rightarrow B)$
2. $((X \vee Y) \wedge \neg Y) \vee (((Z \Rightarrow (X \vee Y)) \wedge Z) \Rightarrow Y)$
3. $(A \Rightarrow ((B \vee \neg C) \wedge \neg(A \Rightarrow F))) \vee ((D \wedge \neg E) \vee (A \vee C))$

Rappel : le séquent associé à une formule F est $\vdash F$.

Exercice 4 *(4 = 0,5 + 0,5 + 3 pts) Soit F une formule de la logique propositionnelle, on note $\mathcal{V}(F)$ l'ensemble des occurrences de variables propositionnelles présentes dans F.*

1. *Déterminez $\mathcal{V}(\neg F)$ en fonction de $\mathcal{V}(F)$.*
2. *Déterminez $\mathcal{V}(F \vee G)$ en fonction de $\mathcal{V}(F)$ et de $\mathcal{V}(G)$.*
3. *Pour toute formule F, en se servant entre autres des propriétés précédentes, définir $\mathcal{V}(F)$ par induction structurelle.*

Exercice 5 *(2,5 pts) Montrer que si les formules associées aux séquents prémisses de la règle suivante sont des tautologies, alors la formule associée au séquent conclusion est une tautologie :*

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\mathit{coupure})$$

Rappel : la formule associée au séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est $(\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$.

Exercice 6 *(2,5 = 0,5 + 2 pts) On considère la constante logique 'faux' noté $\perp$ dont la valeur de vérité est toujours Faux.*

1. *Montrez que $\neg A$ et $A \Rightarrow \perp$ ont même table de vérité.*
2. *Montrez par induction structurelle que toute formule construite avec les connecteurs $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$ est équivalente à une formule construite seulement avec les connecteurs $\vee, \wedge, \Rightarrow$ et la constante logique $\perp$.*

Calcul des séquents LK pour la logique propositionnelle :

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\texttt{axiome}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\texttt{coupure})$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2} \;(\texttt{d-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \;(\texttt{d-aff.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \;(\texttt{d-cont.})$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} \;(\texttt{g-échange}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \;(\texttt{g-aff.}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \;(\texttt{g-cont.})$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \;(\texttt{d-négation}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \;(\texttt{g-négation})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \;(\texttt{d-implication}) \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \;(\texttt{g-implication})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \;(\texttt{d-et}) \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \;(\texttt{g-et}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \;(\texttt{d-ou}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \;(\texttt{g-ou})$$
