

CONSTELLATIONS NON-ORIENTÉES ET POLYNÔMES DE JACK

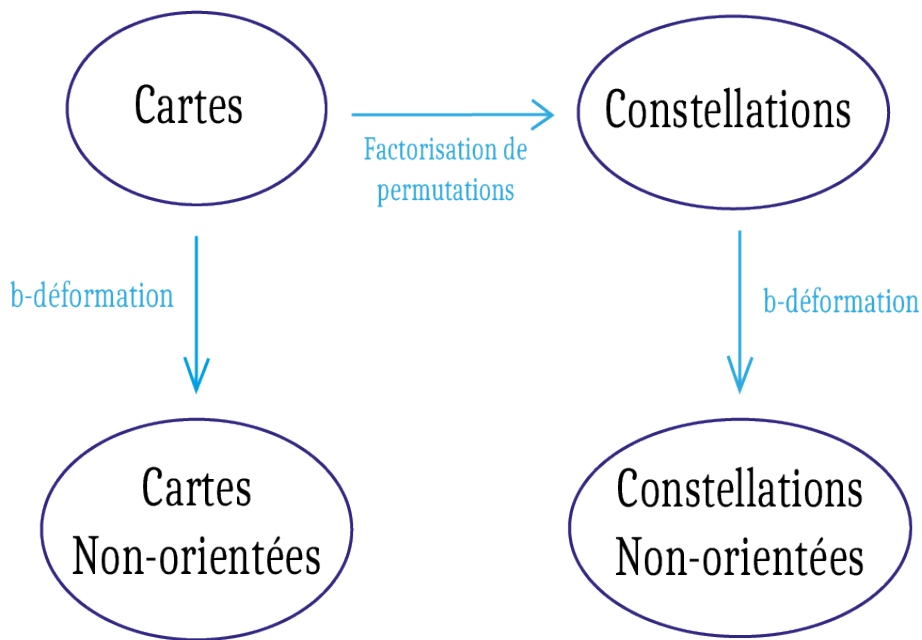
Victor Nador

IMPAN Cracovie

January 25, 2024



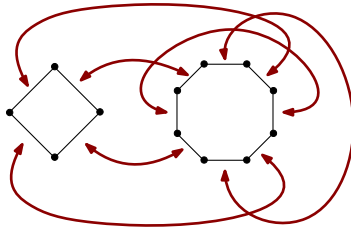
DEUX GÉNÉRALISATIONS DES CARTES



CARTES ORIENTABLES COMME ASSEMBLAGE DE POLYGONES

Definition 0.1 (Cartes orientables comme assemblage de polygones)

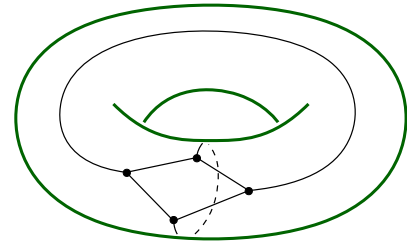
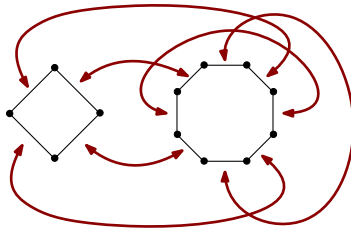
Une carte orientable \mathcal{M} est une collection de k polygones orientés $\{\mathcal{P}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ tel que \mathcal{P}_i est un r_i -gone avec r_i côtés $\mathcal{E}^{(i)} = \{e_1^{(i)}, \dots, e_{r_i}^{(i)}\}$ et un appariement m sur l'ensemble des côtés $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{E}^{(i)}$.



CARTES ORIENTABLES COMME ASSEMBLAGE DE POLYGONES

Definition 0.1 (Cartes orientables comme assemblage de polygones)

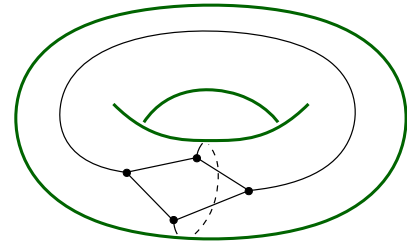
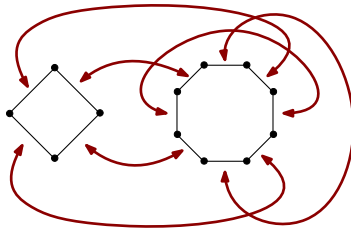
Une carte orientable \mathcal{M} est une collection de k polygones orientés $\{\mathcal{P}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ tel que \mathcal{P}_i est un r_i -gone avec r_i côtés $\mathcal{E}^{(i)} = \{e_1^{(i)}, \dots, e_{r_i}^{(i)}\}$ et un appariement m sur l'ensemble des côtés $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{E}^{(i)}$.



CARTES ORIENTABLES COMME ASSEMBLAGE DE POLYGONES

Definition 0.1 (Cartes orientables comme assemblage de polygones)

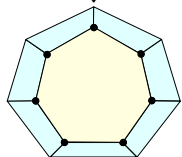
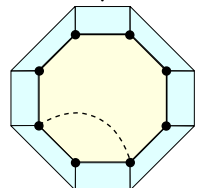
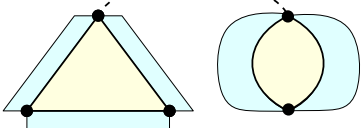
Une carte orientable \mathcal{M} est une collection de k polygones orientés $\{\mathcal{P}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ tel que \mathcal{P}_i est un r_i -gones avec r_i côtés $\mathcal{E}^{(i)} = \{e_1^{(i)}, \dots, e_{r_i}^{(i)}\}$ et un appariement m sur l'ensemble des côtés $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{E}^{(i)}$.



- ▶ $F^g(t, \mathbf{p})$ série génératrice des cartes connectées de genre g avec poids
 - t sur les arêtes
 - p_i sur les faces de longueur i
- ▶ $F_n^g(t, \mathbf{p}) = [t^n] F^g(t, \mathbf{p})$.
- ▶ $F_{n,k}^g$ cartes de tailles n , genre g avec une face racine de taille k .

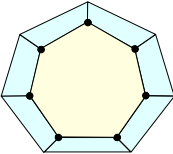
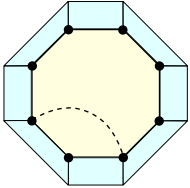
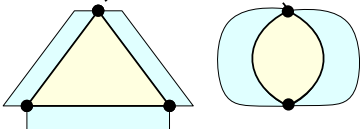
EQUATIONS DE TUTTE ET ALGÈBRE DE VIRASORO

► Les **équations de Tutte** permettent d'énumérer les cartes avec une face racine

$$F_{n,k+1}^g = \underbrace{\sum_{i \geq 3} \rho_i F_{n-1,k+i-1}^g}_{\text{Diagram 1}} + \underbrace{\sum_{\substack{0 \leq \ell \leq k-1 \\ g_1 + g_2 = g \\ n_1 + n_2 = n-1}} F_{n_1, \ell}^{g_1} F_{n_2, k-1-\ell}^{g_2}}_{\text{Diagram 2}} + \sum_{0 \leq \ell \leq k-1} F_{n-1, \ell, k-1-\ell}^{g-1}$$




EQUATIONS DE TUTTE ET ALGÈBRE DE VIRASORO

- ▶ Les **équations de Tutte** permettent d'énumérer les cartes avec une face racine

$$F_{n,k+1}^g = \underbrace{\sum_{i \geq 3} p_i F_{n-1,k+i-1}^g}_{\text{Diagram 1}} + \underbrace{\sum_{\substack{0 \leq \ell \leq k-1 \\ g_1 + g_2 = g \\ n_1 + n_2 = n-1}} F_{n_1,\ell}^{g_1} F_{n_2,k-1-\ell}^{g_2}}_{\text{Diagram 2}} + \sum_{0 \leq \ell \leq k-1} F_{n-1,\ell,k-1-\ell}^{g-1}$$




- ▶ Elles peuvent être reformulées sous forme d'**opérateur différentiel** sur la série génératrice:

$$\underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^{k-1} \ell(k-1-\ell) \frac{\partial}{\partial p_\ell} \frac{\partial}{\partial p_{k-1-\ell}} + \sum_{i \geq 2} p_i (i+k-1) \frac{\partial}{\partial p_{k+i-1}} \right)}_{L_k} \cdot F(t, \mathbf{p}) = 0$$

- ▶ Ces opérateurs forment une (demi-) **algèbre de Virasoro**

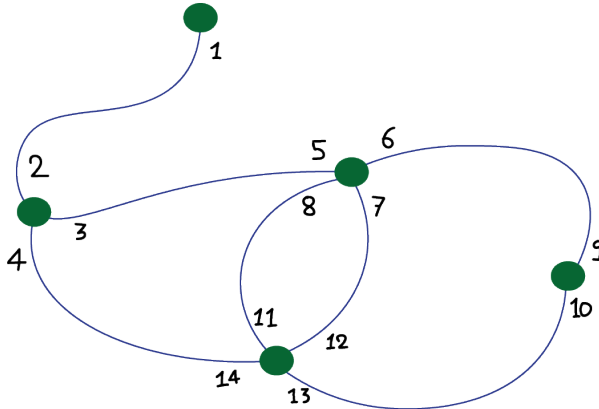
$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m-1} \quad \forall n, m \geq 1$$

CARTES ORIENTABLES COMME FACTORISATION DE PERMUTATIONS

Definition 0.2 (Cartes comme factorisation de permutation)

Une carte orientable \mathcal{M} est un triplet de permutation $(\sigma, \alpha, \phi) \in \mathfrak{S}_{2n}$ tel que

- ▶ α est une involution sans point fixe,
- ▶ $\sigma\alpha = \phi$.

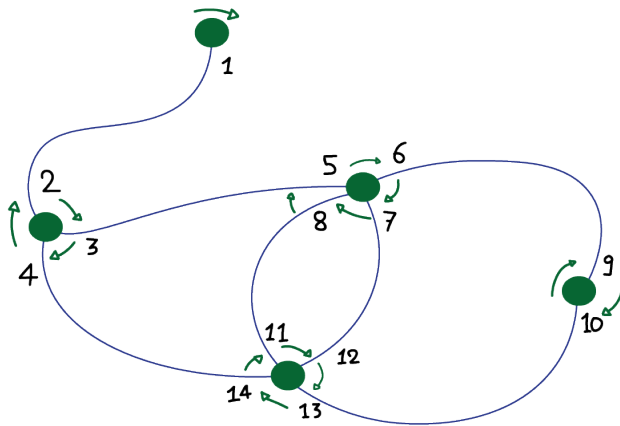


CARTES ORIENTABLES COMME FACTORISATION DE PERMUTATIONS

Definition 0.2 (Cartes comme factorisation de permutation)

Une carte orientable \mathcal{M} est un triplet de permutation $(\sigma, \alpha, \phi) \in \mathfrak{S}_{2n}$ tel que

- ▶ α est une involution sans point fixe,
- ▶ $\sigma\alpha = \phi$.



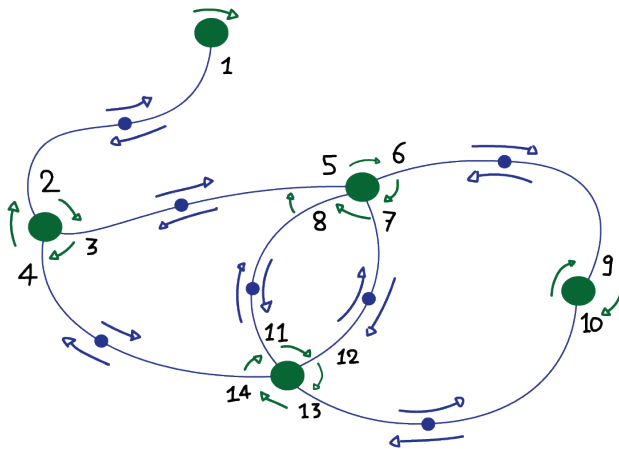
$$\sigma = (1)(234)(5678) \\ (910)(11121314)$$

CARTES ORIENTABLES COMME FACTORISATION DE PERMUTATIONS

Definition 0.2 (Cartes comme factorisation de permutation)

Une carte orientable \mathcal{M} est un triplet de permutation $(\sigma, \alpha, \phi) \in \mathfrak{S}_{2n}$ tel que

- ▶ α est une involution sans point fixe,
- ▶ $\sigma\alpha = \phi$.



$$\sigma = (1)(234)(5678) \\ (910)(11121314)$$

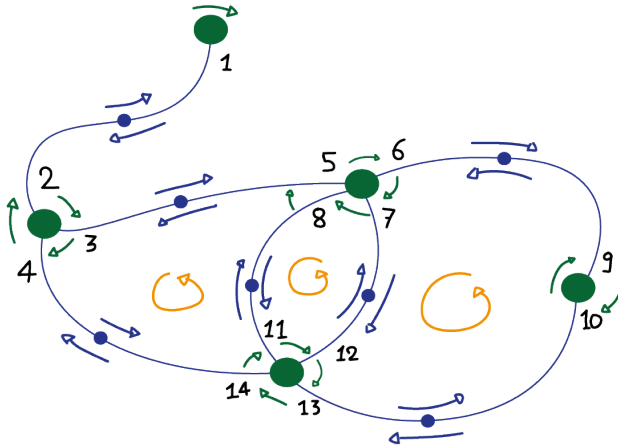
$$\alpha = (12)(35)(69)(811)(712) \\ (1013)(414)$$

CARTES ORIENTABLES COMME FACTORISATION DE PERMUTATIONS

Definition 0.2 (Cartes comme factorisation de permutation)

Une carte orientable \mathcal{M} est un triplet de permutation $(\sigma, \alpha, \phi) \in \mathfrak{S}_{2n}$ tel que

- ▶ α est une involution sans point fixe,
- ▶ $\sigma\alpha = \phi$.



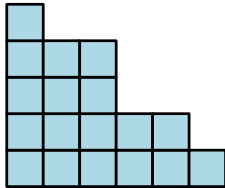
$$\sigma = (1)(234)(5678) \\ (910)(11121314)$$

$$\alpha = (12)(35)(69)(811)(712) \\ (1013)(414)$$

$$\phi = (1259134)(711) \\ (3148)(10612)$$

L'ANNEAU DES POLYNÔMES SYMÉTRIQUES

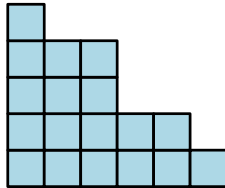
- ▶ Différentes bases de l'anneau des fonctions symétriques $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$: [\[Macdonald 79\]](#)



$$\lambda = (6, 5, 3, 3, 1)$$

L'ANNEAU DES POLYNÔMES SYMÉTRIQUES

- ▶ Différentes bases de l'anneau des fonctions symétriques $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$: [Macdonald 79]



$$\lambda = (6, 5, 3, 3, 1)$$

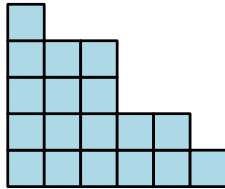
Sommes de puissances

$$\forall k \geq 0 \quad p_k(\mathbf{x}) = \sum_i x_i^k$$

$$\forall \lambda \vdash \quad p_\lambda(\mathbf{x}) = \prod_{i \geq 1} p_{\lambda_i}(\mathbf{x})$$

L'ANNEAU DES POLYNÔMES SYMÉTRIQUES

- Différentes bases de l'anneau des fonctions symétriques $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$: [Macdonald 79]



$$\lambda = (6, 5, 3, 3, 1)$$

Sommes de puissances

$$\forall k \geq 0 \quad p_k(\mathbf{x}) = \sum_i x_i^k$$

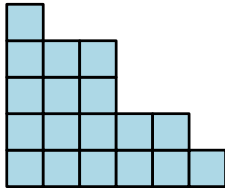
$$\forall \lambda \vdash \quad p_\lambda(\mathbf{x}) = \prod_{i \geq 1} p_{\lambda_i}(\mathbf{x})$$

Polynômes de Schur

$$\begin{aligned} s_\lambda(\mathbf{x}) &= \sum_{\mu \vdash \lambda} \frac{x_\mu^\lambda}{z_\mu} p_\mu(\mathbf{x}) \\ &= s_\lambda(p_\mu) \end{aligned}$$

L'ANNEAU DES POLYNÔMES SYMÉTRIQUES

- Différentes bases de l'anneau des fonctions symétriques $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$: [Macdonald 79]



$$\lambda = (6, 5, 3, 3, 1)$$

Sommes de puissances

$$\forall k \geq 0 \quad p_k(\mathbf{x}) = \sum_i x_i^k$$

$$\forall \lambda \vdash \quad p_\lambda(\mathbf{x}) = \prod_{i \geq 1} p_{\lambda_i}(\mathbf{x})$$

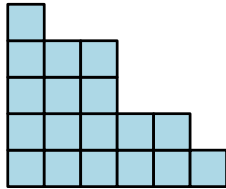
Polynômes de Schur

$$\begin{aligned} s_\lambda(\mathbf{x}) &= \sum_{\mu \vdash \lambda} \frac{x_\mu^\lambda}{z_\mu} p_\mu(\mathbf{x}) \\ &= s_\lambda(p_\mu) \end{aligned}$$

- La **série génératrice des cartes biparties** avec poids
- t sur chaque arête de la carte
 - $\mathbf{q}^{(0)}$ (resp. $\mathbf{q}^{(1)}$) sur chaque sommet de couleur 0 (resp. de couleur 1)
 - \mathbf{p} sur les faces de la cartes

L'ANNEAU DES POLYNÔMES SYMÉTRIQUES

- ▶ Différentes bases de l'anneau des fonctions symétriques $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$: [Macdonald 79]



$$\lambda = (6, 5, 3, 3, 1)$$

Sommes de puissances

$$\forall k \geq 0 \quad p_k(\mathbf{x}) = \sum_i x_i^k$$

$$\forall \lambda \vdash \quad p_\lambda(\mathbf{x}) = \prod_{i \geq 1} p_{\lambda_i}(\mathbf{x})$$

Polynômes de Schur

$$\begin{aligned} s_\lambda(\mathbf{x}) &= \sum_{\mu \vdash \lambda} \frac{x_\mu^\lambda}{z_\mu} p_\mu(\mathbf{x}) \\ &= s_\lambda(p_\mu) \end{aligned}$$

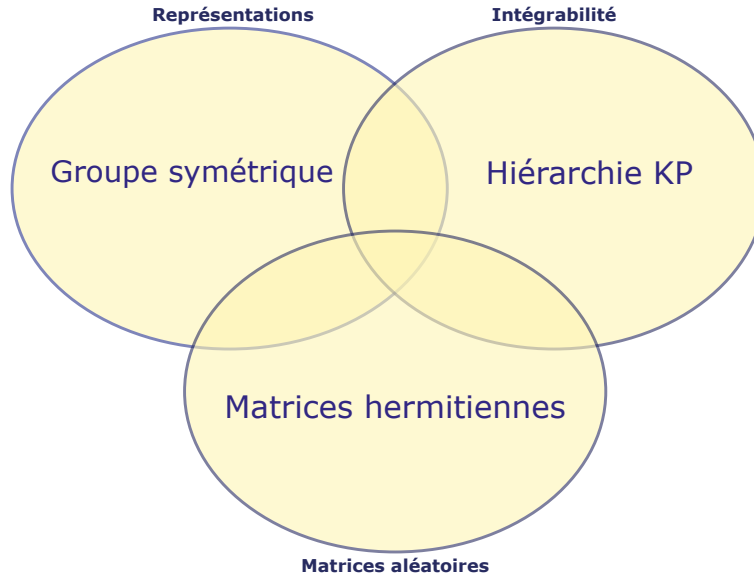
- ▶ La **série génératrice des cartes biparties** avec poids
 - t sur chaque arête de la carte
 - $\mathbf{q}^{(0)}$ (resp. $\mathbf{q}^{(1)}$) sur chaque sommet de couleur 0 (resp. de couleur 1)
 - \mathbf{p} sur les faces de la cartes

se développe sur les **polynômes de Schur** comme

$$Z_2(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{\mu \vdash n} \frac{(n!)^2}{d_\mu} s_\mu(\mathbf{q}^{(0)}) s_\mu(\mathbf{q}^{(1)}) s_\mu(\mathbf{p})$$

UN OBJET AUX MULTIPLES FACETTES

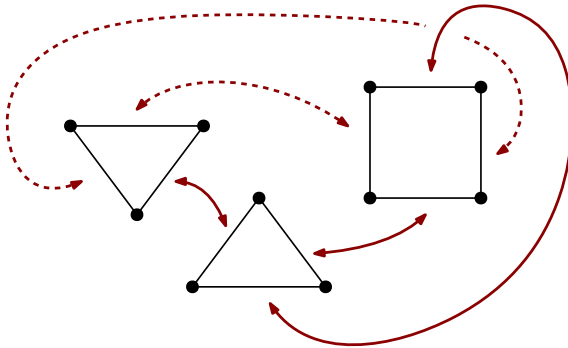
- ▶ Les cartes orientables sont à l'intersection de différents domaines.



CARTES NON-ORIENTÉES COMME ASSEMBLAGE DE POLYGONES

Definition 0.3 (Cartes non-orientées comme assemblage de polygones)

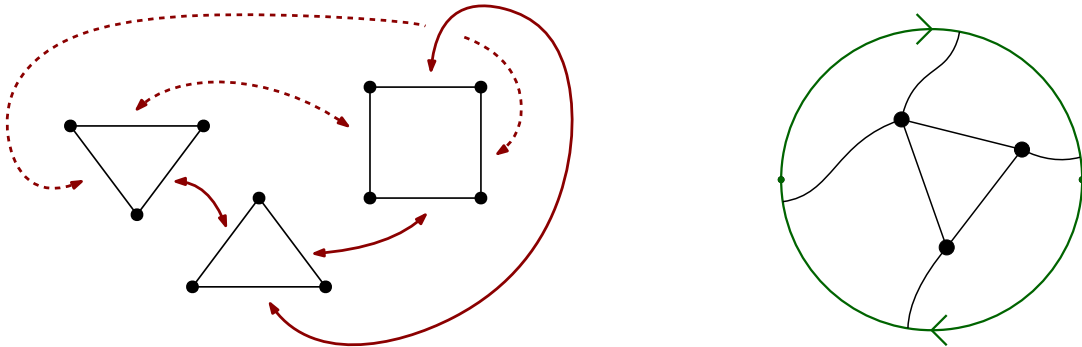
Une carte non-orientée \mathcal{M} est une collection de k polygones $\{\mathcal{P}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ tel que \mathcal{P}_i est un r_i -gones avec r_i côtés $\mathcal{E}^{(i)} = \{e_1^{(i)}, \dots, e_{r_i}^{(i)}\}$ et un appariement signé \tilde{m} sur l'ensemble des côtés $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{E}^{(i)}$.



CARTES NON-ORIENTÉES COMME ASSEMBLAGE DE POLYGONES

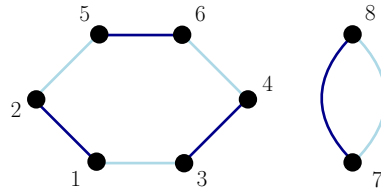
Definition 0.3 (Cartes non-orientées comme assemblage de polygones)

Une carte non-orientée \mathcal{M} est une collection de k polygones $\{\mathcal{P}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ tel que \mathcal{P}_i est un r_i -gones avec r_i côtés $\mathcal{E}^{(i)} = \{e_1^{(i)}, \dots, e_{r_i}^{(i)}\}$ et un appariement signé \tilde{m} sur l'ensemble des côtés $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{E}^{(i)}$.



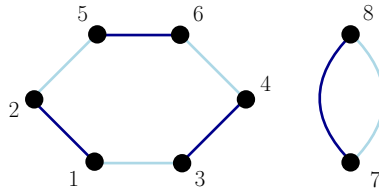
CARTES NON-ORIENTÉES COMME APPARIEMENTS

- Pour m, m' deux appariements, on note $\Lambda(m, m')$ le graphe ayant pour arêtes les paires de m et m' et $\Lambda(m, m')$ la partition associé aux cycles de $G(m, m')$.



CARTES NON-ORIENTÉES COMME APPARIEMENTS

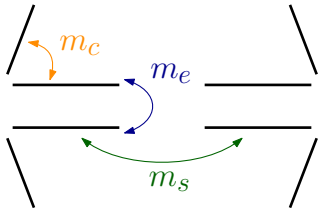
- Pour m, m' deux appariements, on note $\Lambda(m, m')$ le graphe ayant pour arêtes les paires de m et m' et $\Lambda(m, m')$ la partition associé aux cycles de $G(m, m')$.



Definition 0.4 (Cartes non-orientées comme appariements)

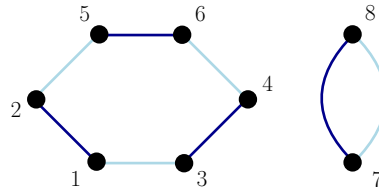
Une carte non-orientée \mathcal{M} est un triplet de matchings $(m_s, m_c, m_e) \in \llbracket 1, 4n \rrbracket$ tel que

- $\Lambda(m_s, m_e) = [2^n]$



CARTES NON-ORIENTÉES COMME APPARIEMENTS

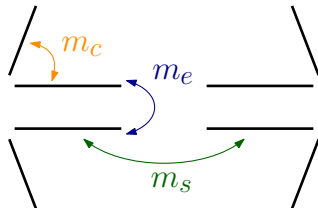
- Pour m, m' deux appariements, on note $\Lambda(m, m')$ le graphe ayant pour arêtes les paires de m et m' et $\Lambda(m, m')$ la partition associé aux cycles de $G(m, m')$.



Definition 0.4 (Cartes non-orientées comme appariements)

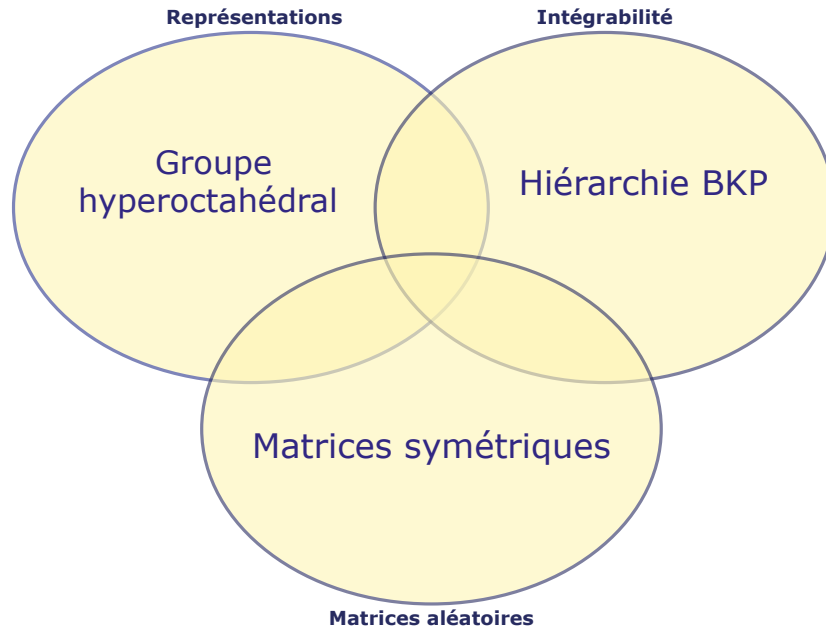
Une carte non-orientée \mathcal{M} est un triplet de matchings $(m_s, m_c, m_e) \in \llbracket 1, 4n \rrbracket$ tel que

- $\Lambda(m_s, m_e) = [2^n]$



- Comptées par la **paire de Gelfand** du **group hyperoctaédrique**
- Correspond aux **polynômes zonaux**

DIFFÉRENTES PERSPECTIVES SUR LES CARTES NON-ORIENTÉ



LA b -DÉFORMATION POUR LES CARTES

- ▶ Les **polynômes de Schur** s_λ peuvent être déformés en **polynômes de Jack** $P_\lambda^{(b)}$ [Jack 79].

$$\langle P_\lambda^{(b)} | P_\mu^{(b)} \rangle = 0 \quad \lambda \neq \mu$$

$$P_\lambda^{(b)} = m_\lambda + \sum_{\mu \prec \lambda} a_\mu^\lambda(b) m_\mu$$

LA b -DÉFORMATION POUR LES CARTES

- Les **polynômes de Schur** s_λ peuvent être déformés en **polynômes de Jack** $P_\lambda^{(b)}$ [Jack 79].

$$\langle P_\lambda^{(b)} | P_\mu^{(b)} \rangle = 0 \quad \lambda \neq \mu \qquad P_\lambda^{(b)} = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} a_\mu^\lambda(b) m_\mu$$

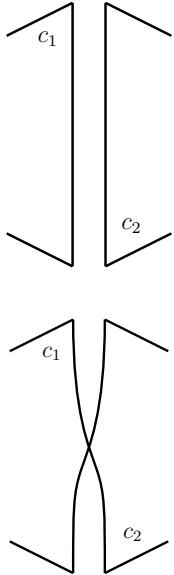
$$\begin{aligned} Z_2(t, \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{p}, b) &= \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{\langle P_\lambda^{(b)}, P_\lambda^{(b)} \rangle_b} P_\lambda^{(b)}(\mathbf{q}^{(0)}) P_\lambda^{(b)}(\mathbf{q}^{(1)}) P_\lambda^{(b)}(\mathbf{p}) \qquad b \in]-1; +\infty[\\ &= \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{\lambda, \mu, \nu \vdash n} \frac{c_{\mu\nu}^\lambda(b)}{(1+b)^{\ell(\lambda)} z_\lambda} p_\lambda(\mathbf{q}^{(0)}) p_\mu(\mathbf{q}^{(1)}) p_\nu(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

- Deux (trois) valeurs bien connues:
- $b = 0$ correspondant aux **polynômes de Schur** et aux **cartes orientables**
 - $b = 1$ associé aux **polynômes zonaux** et aux **cartes non-orientées**
 - ($b = -\frac{1}{2}$ liée au cas $b = 1$ par des relations de dualité)

Conjecture 1 (b -conjecture [Goulden-Jackson 96])

Les coefficients $c_{\mu\nu}^\lambda(b)$ sont des polynômes en b à coefficients entiers. Le paramètre b admet une interprétation combinatoire liée à la non-orientabilité de la carte.

MESURE DE NON-ORIENTABILITÉ



Definition 0.5 (Mesure de non-orientabilité (entière) [Chapuy-Dolega 22])

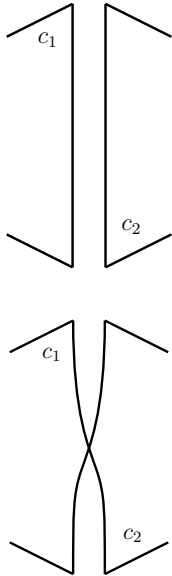
Une mesure de non-orientabilité est une fonction

$$\rho : \mathcal{M}, e \rightarrow \rho(\mathcal{M}, e) \in \mathbb{Q}[b]$$

tel que

1. $\rho(\mathcal{M}, e)$ dépend seulement de la composante connexe de \mathcal{M} contenant e .
2. Pour $\mathcal{N} = \mathcal{M} \setminus \{e\}$ et c_1, c_2 les coins de \mathcal{N} de sorte que \mathcal{M} est obtenue à partir de \mathcal{N} en insérant une arête entre c_1 et c_2 ,
 - (a) Si c_1, c_2 dans **différentes c.c.** de \mathcal{N} alors $\rho(\mathcal{M}, e) = 1$.
 - (b) Si c_1, c_2 dans la **même c.c.** mais **différentes faces**, on note \tilde{e} l'autre arête que l'on peut insérer entre c_1 et c_2 . Alors, $\rho(\mathcal{M}, e) + \rho(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{e}) = 1 + b$.
 - (c) Si c_1, c_2 sont dans la **même face**, alors $\rho(\mathcal{M}, e) = 1$ si \mathcal{N} a une face de moins que \mathcal{M} , et $\rho(\mathcal{M}, e) = b$ si \mathcal{N} a le même nombre de face que \mathcal{M} .

MESURE DE NON-ORIENTABILITÉ



Definition 0.5 (Mesure de non-orientabilité (entière) [Chapuy-Dolega 22])

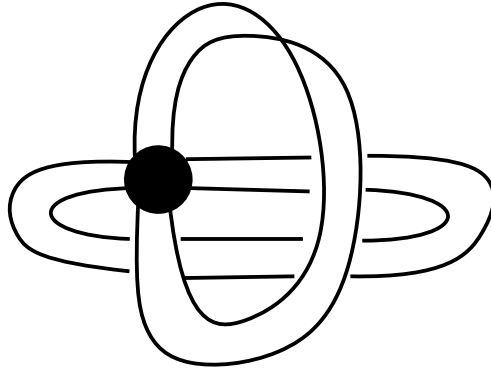
Une mesure de non-orientabilité est une fonction

$$\rho : \mathcal{M}, e \rightarrow \rho(\mathcal{M}, e) \in \mathbb{Q}[b]$$

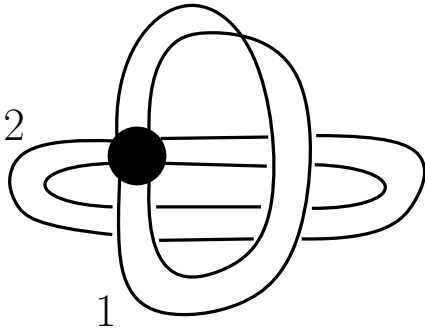
tel que

1. $\rho(\mathcal{M}, e)$ dépend seulement de la composante connexe de \mathcal{M} contenant e .
2. Pour $\mathcal{N} = \mathcal{M} \setminus \{e\}$ et c_1, c_2 les coins de \mathcal{N} de sorte que \mathcal{M} est obtenue à partir de \mathcal{N} en insérant une arête entre c_1 et c_2 ,
 - (a) Si c_1, c_2 dans **différentes c.c.** de \mathcal{N} alors $\rho(\mathcal{M}, e) = 1$.
 - (b) Si c_1, c_2 dans la **même c.c.** mais **différentes faces**, on note \tilde{e} l'autre arête que l'on peut insérer entre c_1 et c_2 . Alors, $\rho(\mathcal{M}, e) + \rho(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{e}) = 1 + b$.
 - (c) Si c_1, c_2 sont dans la **même face**, alors $\rho(\mathcal{M}, e) = 1$ si \mathcal{N} a une face de moins que \mathcal{M} , et $\rho(\mathcal{M}, e) = b$ si \mathcal{N} a le même nombre de face que \mathcal{M} .
3. Si \mathcal{M} orientable alors $\rho(\mathcal{M}, e) = 1$ **(Mesure entière)**

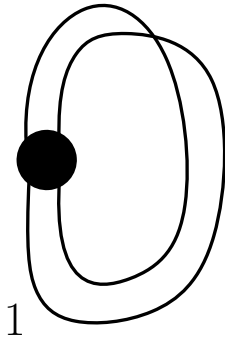
DIFFICULTÉS COMBINATOIRE LIÉS À LA b -DÉFORMATION (1)



DIFFICULTÉS COMBINATOIRE LIÉS À LA b -DÉFORMATION (1)



DIFFICULTÉS COMBINATOIRE LIÉS À LA b -DÉFORMATION (1)



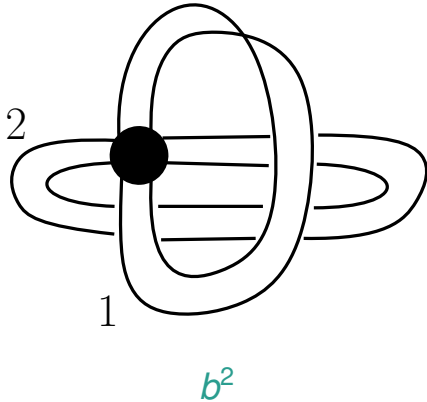
(c), $F \rightarrow F$

DIFFICULTÉS COMBINATOIRE LIÉS À LA b -DÉFORMATION (1)

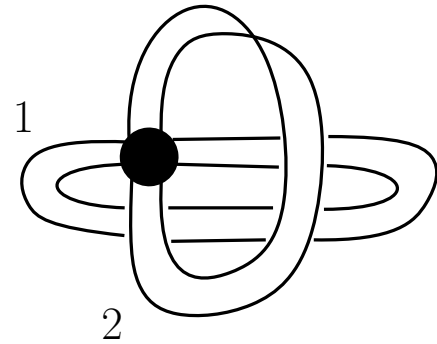
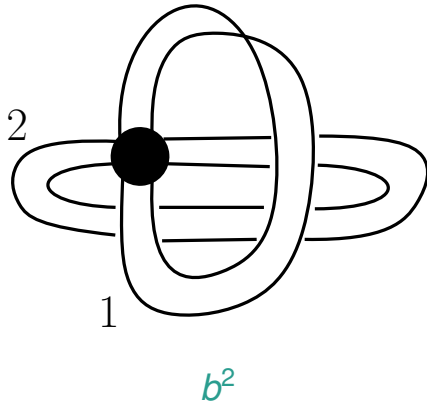


(c), $F \rightarrow F$

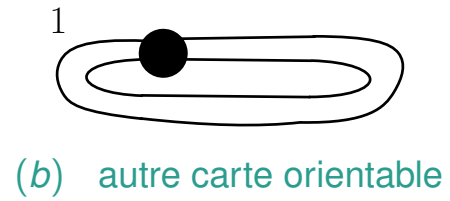
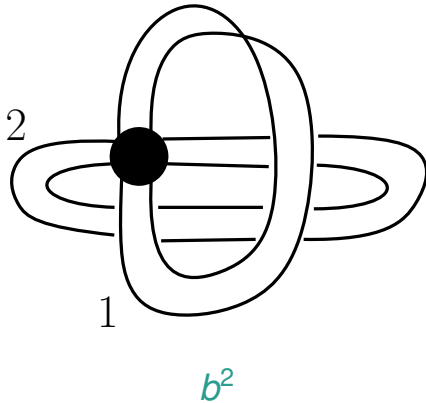
DIFFICULTÉS COMBINATOIRE LIÉS À LA b -DÉFORMATION (1)



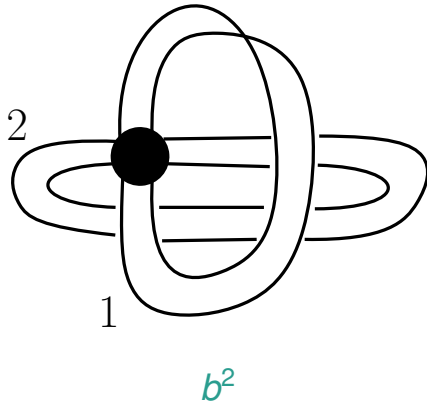
DIFFICULTÉS COMBINATOIRE LIÉS À LA b -DÉFORMATION (1)



DIFFICULTÉS COMBINATOIRE LIÉS À LA b -DÉFORMATION (1)

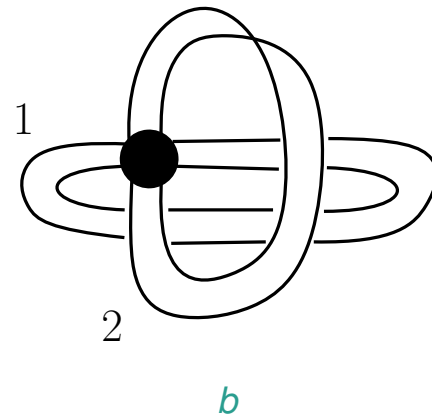
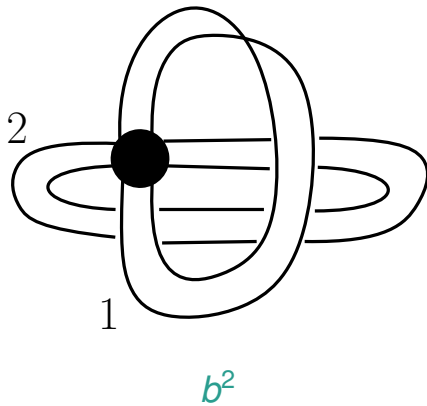


DIFFICULTÉS COMBINATOIRE LIÉS À LA b -DÉFORMATION (1)



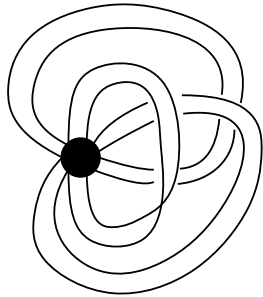
(c), $F \rightarrow F - 1$

DIFFICULTÉS COMBINATOIRE LIÉS À LA b -DÉFORMATION (1)

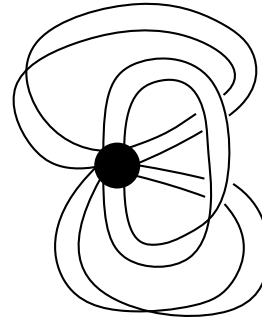


DIFFICULTÉS COMBINATOIRE LIÉS À LA b -DÉFORMATION (2)

- ▶ Une **carte enracinée et son dual** ne donnent **pas le même polynôme en b**



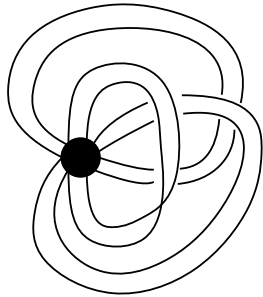
$$b^3 + b^2 + b$$



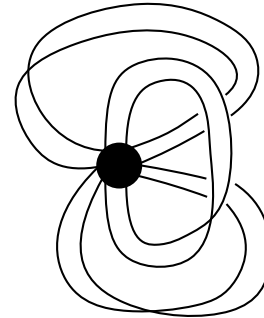
$$b^3 + 2b^2$$

DIFFICULTÉS COMBINATOIRE LIÉS À LA b -DÉFORMATION (2)

- ▶ Une **carte enracinée et son dual** ne donnent **pas le même polynôme en b**



$$b^3 + b^2 + b$$



$$b^3 + 2b^2$$

Theorème 1 (Thm 3.35 [Lacroix 09 (PhD Thesis)])

Une mesure de non-orientabilité ne peut pas être additive pour les sommes connexes et invariant par dualité des cartes enracinées.

CONSTELLATIONS ORIENTABLES

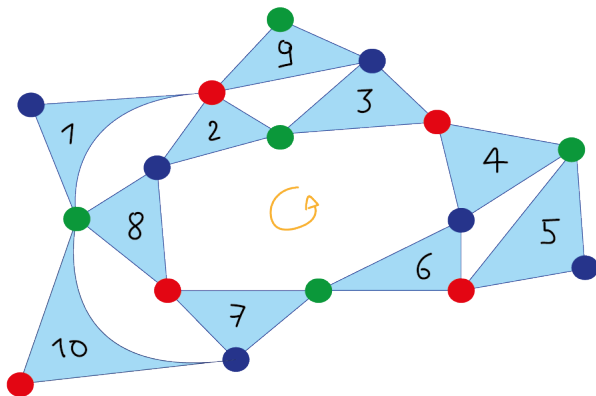
- ▶ Les constellations généralisent les cartes biparties **un nombre $m + 1 \geq 3$ de permutations**

$$\sigma_0 \dots \sigma_{m-1} = \phi$$

CONSTELLATIONS ORIENTABLES

- Les constellations généralisent les cartes biparties **un nombre $m + 1 \geq 3$ de permutations**

$$\sigma_0 \dots \sigma_{m-1} = \phi$$



$$\sigma_0 = (219)(34)(56) \\ (78)(10)$$

$$\sigma_1 = (1810)(67)(54) \\ (23)(9)$$

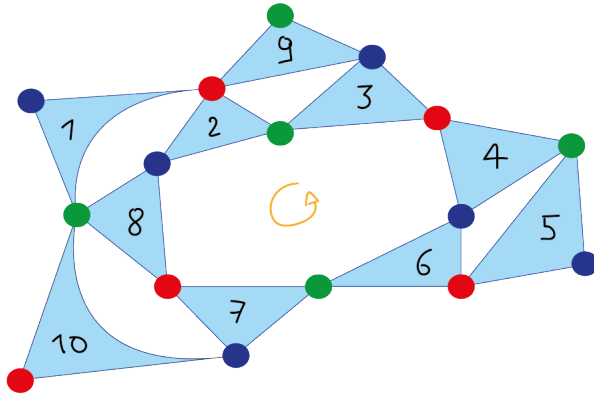
$$\sigma_2 = (1)(28)(39) \\ (710)(46)(5)$$

$$\phi = (2)(35101)(7) \\ (9)(6)(84)$$

CONSTELLATIONS ORIENTABLES

- Les constellations généralisent les cartes biparties **un nombre $m + 1 \geq 3$ de permutations**

$$\sigma_0 \dots \sigma_{m-1} = \phi$$



$$\sigma_0 = (219)(34)(56) \\ (78)(10)$$

$$\sigma_1 = (1810)(67)(54) \\ (23)(9)$$

$$\sigma_2 = (1)(28)(39) \\ (710)(46)(5)$$

$$\phi = (2)(35101)(7) \\ (9)(6)(84)$$

- Leur série génératrice s'écrit

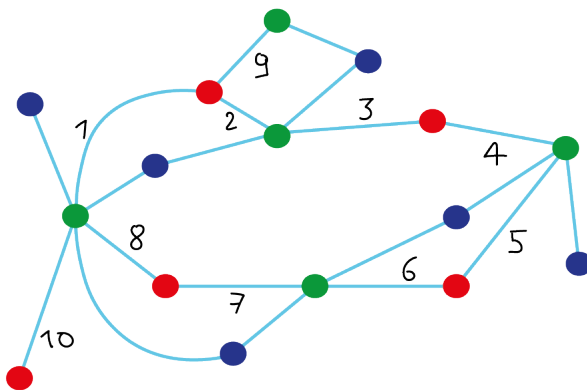
$$Z_m(t, \mathbf{q}^{(0)}, \dots, \mathbf{q}^{(m-1)}, \mathbf{p}) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{\mu \vdash n} \frac{n!^m}{d_\mu^{m-1}} s_\mu(\mathbf{q}^{(0)}) \dots s_\mu(\mathbf{q}^{(m-1)}) s_\mu(\mathbf{p})$$

CONSTELLATIONS NON-ORIENTABLES

Definition 0.6 (Constellations généralisées [Chapuy-Dolega 22])

Une m -constellation \mathcal{C} est une carte équipée d'une coloration de ses sommets à valeurs dans $\llbracket 0, m-1 \rrbracket$ telle que

- ▶ Les sommets de couleur 0 (resp. $m-1$) sont adjacents à des sommets de couleur 1 (resp. $m-2$),
- ▶ Chaque coin d'un sommet de couleur $i \in \llbracket 1, m-2 \rrbracket$ sépare un sommet de couleur $i-1$ et un sommet de couleur $i+1$.



LE b -POIDS POUR LES CONSTELLATIONS NON-ORIENTABLES

Algorithme de calcul du b -poids

1. Depuis le sommet racine (de couleur 0)
 - 1.1 Supprimer itérativement les arêtes de couleur 0 à $k - 1$ en collectant leur b -poids
 - 1.2 Répéter sur le prochain coin du sommet racine
2. Une fois le sommet racine initial supprimé, enraciné les composantes connexes résultantes sur le premier sommet de couleur 0 rencontré.
3. Répéter l'algorithme sur les **duals** des cartes enracinées obtenues

LE b -POIDS POUR LES CONSTELLATIONS NON-ORIENTABLES

Algorithme de calcul du b -poids

1. Depuis le sommet racine (de couleur 0)
 - 1.1 Supprimer itérativement les arêtes de couleur 0 à $k - 1$ en collectant leur b -poids
 - 1.2 Répéter sur le prochain coin du sommet racine
2. Une fois le sommet racine initial supprimé, enraciner les composantes connexes résultantes sur le premier sommet de couleur 0 rencontré.
3. Répéter l'algorithme sur les **duals** des cartes enracinées obtenues

$$Z_m^{(b)}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, u_1, \dots, u_{k-1}) = \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{\langle P_\mu^{(b)} | P_\mu^{(b)} \rangle} P_\mu^{(b)}(\mathbf{q}) P_\mu^{(b)}(u_1) \dots P_\mu^{(b)}(u_{m-1}) P_\mu^{(b)}(\mathbf{p})$$

LE b -POIDS POUR LES CONSTELLATIONS NON-ORIENTABLES

Algorithme de calcul du b -poids

1. Depuis le sommet racine (de couleur 0)
 - 1.1 Supprimer itérativement les arêtes de couleur 0 à $k - 1$ en collectant leur b -poids
 - 1.2 Répéter sur le prochain coin du sommet racine
2. Une fois le sommet racine initial supprimé, enraciner les composantes connexes résultantes sur le premier sommet de couleur 0 rencontré.
3. Répéter l'algorithme sur les **duals** des cartes enracinées obtenues

$$Z_m^{(b)}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, u_1, \dots, u_{k-1}) = \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{\langle P_\mu^{(b)} | P_\mu^{(b)} \rangle} P_\mu^{(b)}(\mathbf{q}) P_\mu^{(b)}(u_1) \dots P_\mu^{(b)}(u_{m-1}) P_\mu^{(b)}(\mathbf{p})$$

- ▶ Dépend du choix d'orientation initiale de la racine
- ▶ Nécessite d'alterner entre primal et dual
- ▶ Identification des polynômes de Jack n'est pas évidente..

CONSTELLATIONS b -DÉFORMÉES

Theorème 2 (Theorème 5.10 [Chapuy-Dolega 22])

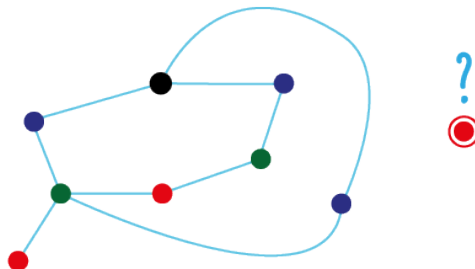
La série génératrice des m -constellations b -déformées, connectées et enracinées

$(1+b) \frac{t\partial}{\partial t} F_m^{(b)} [t, u_1, \dots, u_{m-1}, \mathbf{p}, \mathbf{q}]$ satisfait l'équation d'évolution

$$(1+b) \frac{t\partial}{\partial t} F_m^{(b)} = \Theta_Y \sum_{k \geq 1} t^k q_k \left(Y_+ \prod_{i=1}^{m-1} (u_i + \Lambda_Y) \right)^k \frac{y_0}{1+b} F_m^{(b)}.$$

où

$$\Lambda_Y = (1+b) \sum_{i,j \geq 1} y_{i+j-1} i \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial y_{j-1}} + \sum_{i,j \geq 1} p_i y_{j-1} \frac{\partial}{\partial y_{i+j-1}} + b \sum_{i \geq 1} y_i i \frac{\partial}{\partial y_i}$$



CONSTELLATIONS b -DÉFORMÉES

Theorème 2 (Theorème 5.10 [Chapuy-Dolega 22])

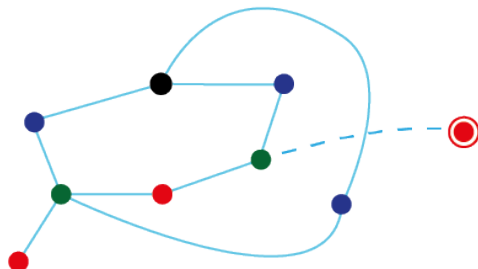
La série génératrice des m -constellations b -déformées, connectées et enracinées

$(1+b)\frac{t\partial}{\partial t}F_m^{(b)}[t, u_1, \dots, u_{m-1}, \mathbf{p}, \mathbf{q}]$ satisfait l'équation d'évolution

$$(1+b)\frac{t\partial}{\partial t}F_m^{(b)} = \Theta_Y \sum_{k \geq 1} t^k q_k \left(Y_+ \prod_{i=1}^{m-1} (u_i + \Lambda_Y) \right)^k \frac{y_0}{1+b} F_m^{(b)}.$$

où

$$\Lambda_Y = (1+b) \sum_{i,j \geq 1} y_{i+j-1} i \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial y_{j-1}} + \sum_{i,j \geq 1} p_i y_{j-1} \frac{\partial}{\partial y_{i+j-1}} + b \sum_{i \geq 1} y_i i \frac{\partial}{\partial y_i}$$



CONSTELLATIONS b -DÉFORMÉES

Theorème 2 (Theorème 5.10 [Chapuy-Dolega 22])

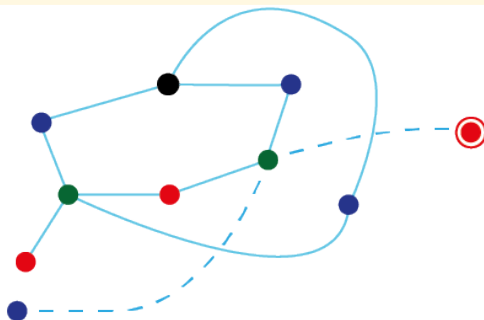
La série génératrice des m -constellations b -déformées, connectées et enracinées

$(1+b) \frac{t \partial}{\partial t} F_m^{(b)} [t, u_1, \dots, u_{m-1}, \mathbf{p}, \mathbf{q}]$ satisfait l'équation d'évolution

$$(1+b) \frac{t \partial}{\partial t} F_m^{(b)} = \Theta_Y \sum_{k \geq 1} t^k q_k \left(Y_+ \prod_{i=1}^{m-1} (u_i + \Lambda_Y) \right)^k \frac{y_0}{1+b} F_m^{(b)}.$$

où

$$\Lambda_Y = (1+b) \sum_{i,j \geq 1} y_{i+j-1} i \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial y_{j-1}} + \sum_{i,j \geq 1} p_i y_{j-1} \frac{\partial}{\partial y_{i+j-1}} + b \sum_{i \geq 1} y_i i \frac{\partial}{\partial y_i}$$



CONSTELLATIONS b -DÉFORMÉES

Theorème 2 (Theorème 5.10 [Chapuy-Dolega 22])

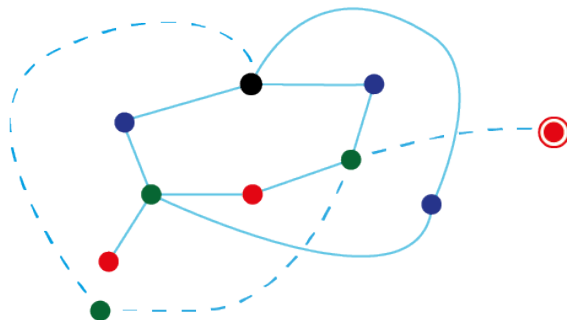
La série génératrice des m -constellations b -déformées, connectées et enracinées

$(1+b) \frac{t \partial}{\partial t} F_m^{(b)} [t, u_1, \dots, u_{m-1}, \mathbf{p}, \mathbf{q}]$ satisfait l'équation d'évolution

$$(1+b) \frac{t \partial}{\partial t} F_m^{(b)} = \Theta_Y \sum_{k \geq 1} t^k q_k \left(Y_+ \prod_{i=1}^{m-1} (u_i + \Lambda_Y) \right)^k \frac{y_0}{1+b} F_m^{(b)}.$$

où

$$\Lambda_Y = (1+b) \sum_{i,j \geq 1} y_{i+j-1} i \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial y_{j-1}} + \sum_{i,j \geq 1} p_i y_{j-1} \frac{\partial}{\partial y_{i+j-1}} + b \sum_{i \geq 1} y_i i \frac{\partial}{\partial y_i}$$



CONSTELLATIONS b -DÉFORMÉES

Theorème 2 (Theorème 5.10 [Chapuy-Dolega 22])

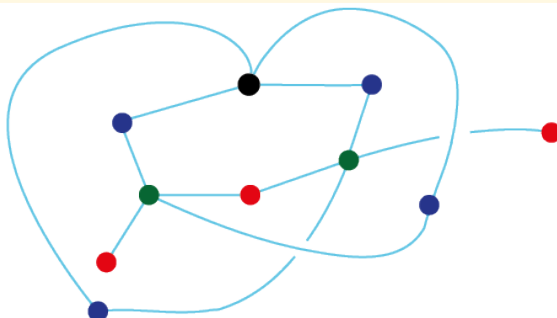
La série génératrice des m -constellations b -déformées, connectées et enracinées

$(1+b)\frac{t\partial}{\partial t}F_m^{(b)}[t, u_1, \dots, u_{m-1}, \mathbf{p}, \mathbf{q}]$ satisfait l'équation d'évolution

$$(1+b)\frac{t\partial}{\partial t}F_m^{(b)} = \Theta_Y \sum_{k \geq 1} t^k q_k \left(Y_+ \prod_{i=1}^{m-1} (u_i + \Lambda_Y) \right)^k \frac{y_0}{1+b} F_m^{(b)}.$$

où

$$\Lambda_Y = (1+b) \sum_{i,j \geq 1} y_{i+j-1} i \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial y_{j-1}} + \sum_{i,j \geq 1} p_i y_{j-1} \frac{\partial}{\partial y_{i+j-1}} + b \sum_{i \geq 1} y_i i \frac{\partial}{\partial y_i}$$



DE L'ÉQUATION D'ÉVOLUTION AUX CONTRAINTES

Lemme 1 (Extension du Lemme 2.6 de [Bonzom-Chapuy-Dolęga 23])

Soit $Z \in \mathbb{Q}[\mathbf{p}][[t]]$ et $r \geq 1$ entier tel que:

1. $[t^n]Z$ est un polynôme homogène de degré n en \mathbf{p}
2. Il existe des opérateurs $M^{(1)}, \dots, M^{(r)} \in \mathbb{Q}[[p_1, p_2, \dots, \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \dots]]$ indépendant de t tel que

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{m=1}^r t^{m-1} M^{(m)} Z \quad (1)$$

3. Pour $m = 1, \dots, r$, $M^{(m)}$ s'écrit $M^{(m)} = \sum_{i \geq 1} p_i M_i^{(m)}$ t.q. $L_i := i \frac{\partial}{\partial p_i} - \sum_{m=1}^r t^m M_i^{(m)}$ satisfait

- $[t^n]L_i F$ est homogène de degré $n - i$
- $[L_i, L_j] = t \sum_{k \geq 1} D_{ij}^k L_k$

Alors Z satisfait les contraintes

$$L_i Z = 0 \quad \text{for all } i \geq 1. \quad (2)$$

DE L'ÉQUATION D'ÉVOLUTION AUX CONTRAINTES

Lemme 1 (Extension du Lemme 2.6 de [Bonzom-Chapuy-Dolęga 23])

Soit $Z \in \mathbb{Q}[\mathbf{p}][[t]]$ et $r \geq 1$ entier tel que:

1. $[t^n]Z$ est un polynôme homogène de degré n en \mathbf{p}
2. Il existe des opérateurs $M^{(1)}, \dots, M^{(r)} \in \mathbb{Q}[[p_1, p_2, \dots, \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \dots]]$ indépendant de t tel que

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{m=1}^r t^{m-1} M^{(m)} Z \quad (1)$$

3. Pour $m = 1, \dots, r$, $M^{(m)}$ s'écrit $M^{(m)} = \sum_{i \geq 1} p_i M_i^{(m)}$ t.q. $L_i := i \frac{\partial}{\partial p_i} - \sum_{m=1}^r t^m M_i^{(m)}$ satisfait

- $[t^n]L_i F$ est homogène de degré $n - i$
- $[L_i, L_j] = t \sum_{k \geq 1} D_{ij}^k L_k$

Alors Z satisfait les contraintes

$$L_i Z = 0 \quad \text{for all } i \geq 1. \quad (2)$$

Avantage: Valide pour toute valeur de b .

DE L'ÉQUATION D'ÉVOLUTION AUX CONTRAINTES

Lemme 1 (Extension du Lemme 2.6 de [Bonzom-Chapuy-Dolęga 23])

Soit $Z \in \mathbb{Q}[\mathbf{p}][[t]]$ et $r \geq 1$ entier tel que:

1. $[t^n]Z$ est un polynôme homogène de degré n en \mathbf{p}
2. Il existe des opérateurs $M^{(1)}, \dots, M^{(r)} \in \mathbb{Q}[[p_1, p_2, \dots, \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \dots]]$ indépendant de t tel que

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{m=1}^r t^{m-1} M^{(m)} Z \quad (1)$$

3. Pour $m = 1, \dots, r$, $M^{(m)}$ s'écrit $M^{(m)} = \sum_{i \geq 1} p_i M_i^{(m)}$ t.q. $L_i := i \frac{\partial}{\partial p_i} - \sum_{m=1}^r t^m M_i^{(m)}$ satisfait

- $[t^n]L_i F$ est homogène de degré $n - i$
- $[L_i, L_j] = t \sum_{k \geq 1} D_{ij}^k L_k$

Alors Z satisfait les contraintes

$$L_i Z = 0 \quad \text{for all } i \geq 1. \quad (2)$$

Avantage: Valide pour toute valeur de b .

Difficulté: Identifier $M_i^{(k)}$ et calculer les commutateurs.

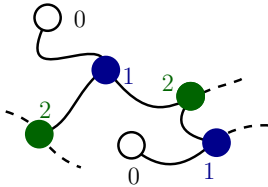
LE LEMME EN PRATIQUE

$$(1 + b) \frac{t \partial}{\partial t} F_m^{(b)} = \Theta_Y \sum_{k \geq 1} t^k q_k \underbrace{\left(Y_+ \prod_{i=1}^{m-1} (u_i + \Lambda_Y) \right)^k}_{M^{(m-1,k)}} \frac{y_0}{1 + b} F_m^{(b)}.$$

- ▶ $M^{(m-1,k)}$ sont les **opérateurs candidats** pour l'application du Lemme (avec $s = t$).
- ▶ Nécessaire de **spécialiser q** à un **nombre fini de variables non-nulles**.
- ▶ **Difficulté du calcul** du commutateur selon le **degré en Λ_Y** de $M^{(m-1,k)}$.

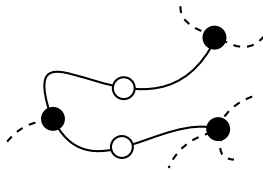
Cartes biparties

$M^{(2,1)}$



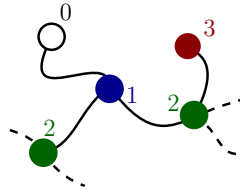
Cartes

$M^{(1,2)}$



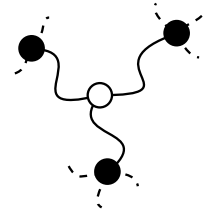
3-constellations

$M^{(3,1)}$



Cartes biparties trivalentes

$M^{(1,3)}$



LES CARTES BIPARTIES ET LES 3-CONSTELLATIONS

Cartes biparties

$$\left[L_i^{(2,1)}, L_j^{(2,1)} \right] = (i - j) L_{i+j-1}^{(2,1)}.$$

LES CARTES BIPARTIES ET LES 3-CONSTELLATIONS

Cartes biparties

$$\left[L_i^{(2,1)}, L_j^{(2,1)} \right] = (i-j)L_{i+j-1}^{(2,1)}.$$

3-constellations

$$\begin{aligned} \left[L_i^{(3,1)}, L_j^{(3,1)} \right] &= 2(i-j) \sum_{k \geq M} J_{M+\mu-1-k}^{(b)} L_k^{(3,1)} + (i-j) \sum_{k=M}^{M+\mu-1} J_{M+\mu-1-k}^{(b)} L_k^{(3,1)} \\ &+ \operatorname{sgn}(i-j) \sum_{k=\mu}^{M-1} (2k - 3\mu + 1) J_{M+\mu-1-k}^{(b)} L_k^{(3,1)} \\ &+ b(i-j)(i+j-1)L_{i+j-1}^{(3,1)}. \end{aligned}$$

LES CARTES BIPARTIES ET LES 3-CONSTELLATIONS

Cartes biparties

$$\left[L_i^{(2,1)}, L_j^{(2,1)} \right] = (i-j)L_{i+j-1}^{(2,1)}.$$

3-constellations

$$\begin{aligned} \left[L_i^{(3,1)}, L_j^{(3,1)} \right] &= 2(i-j) \sum_{k \geq M} J_{M+\mu-1-k}^{(b)} L_k^{(3,1)} + (i-j) \sum_{k=M}^{M+\mu-1} J_{M+\mu-1-k}^{(b)} L_k^{(3,1)} \\ &\quad + \operatorname{sgn}(i-j) \sum_{k=\mu}^{M-1} (2k-3\mu+1) J_{M+\mu-1-k}^{(b)} L_k^{(3,1)} \\ &\quad + b(i-j)(i+j-1)L_{i+j-1}^{(3,1)}. \end{aligned}$$

Theorème 3

Pour $m = 2$ (cartes biparties) ou $m = 3$ (3-constellations), la série $F_{m,1}^{(b)} [t, q, u_1, \dots, u_{d-1}, \mathbf{p}]$ satisfait les contraintes $L_i^{(m,1)} \cdot F_{m,1}^{(b)} [t, q, u_1, \dots, u_{m-1}, \mathbf{p}] = 0$ avec

$$L_i^{(m,1)} = \frac{1}{t} \frac{i\partial}{\partial p_i} - M_i^{(m,1)}.$$

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS

Pour les cartes..

- ▶ Contraintes connues via les β -ensembles dans [\[Adler-van Moerbeke 01\]](#) .

Pour les constellations cubiques..

- ▶ Contraintes connues à $b = 0$ via [\[Fang 16 \(PhD Thesis\)\]](#) et [\[Marshakov-Mirozov-Morozov 11\]](#) .

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS

Pour les cartes..

- ▶ Contraintes connues via les β -ensembles dans [Adler-van Moerbeke 01] .
- ▶ Nouvelle méthode d'origine combinatoire.

Et plus généralement..

- ▶ L'opérateur $\frac{i\partial}{\partial p_i}$ peut s'interpréter combinatoirement comme le marquage d'une face de degré i pour toute valeur de b .

Pour les constellations cubiques..

- ▶ Contraintes connues à $b = 0$ via [Fang 16 (PhD Thesis)] et [Marshakov-Mirozov-Morozov 11] .
- ▶ Premiers résultats sur les contraintes des constellations pour b quelconque.

DES QUESTIONS POUR L'AVENIR

- ▶ Une meilleure manière de calculer nos commutateurs ? (WIP)
- ▶ Interprétation géométrique du b -poids ?
- ▶ Une description via l'algèbre de groupe pour la b -déformation ?
- ▶ Lien avec les hiérarchies intégrables ?

Merci pour votre attention !