Le Laplacien massique Z-invariant sur les graphes isoradiaux

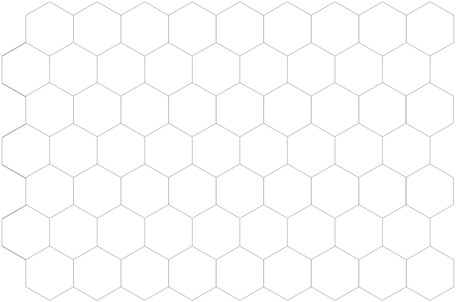
Béatrice de Tilière
Université Pierre et Marie Curie

en collaboration avec C. Boutillier, K. Raschel

Séminaire de Probabilités - Statistiques, Université Paris 13
11 mars 2015

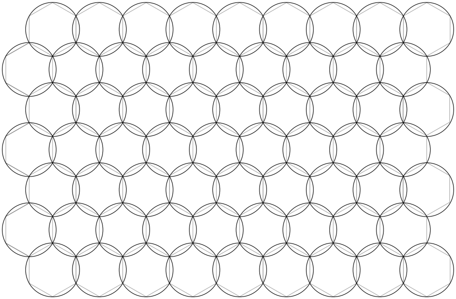
Graphes isoradiaux

- Un graphe G est isoradial s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



Graphes isoradiaux

- Un graphe G est isoradial s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).

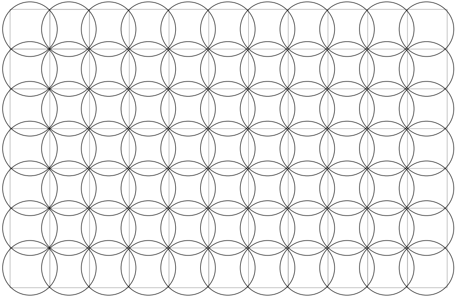


Graphes isoradiaux

- Un graphe G est isoradial s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).

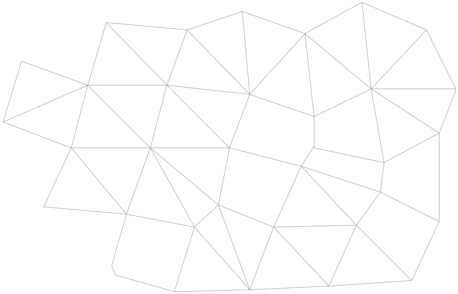
Graphes isoradiaux

- Un graphe G est isoradial s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



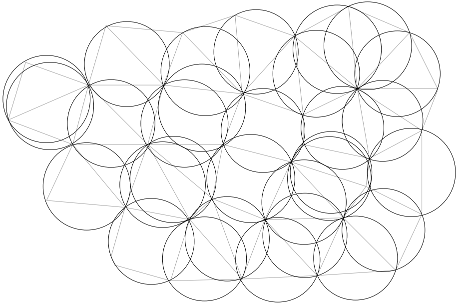
Graphes isoradiaux

- Un graphe G est isoradial s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



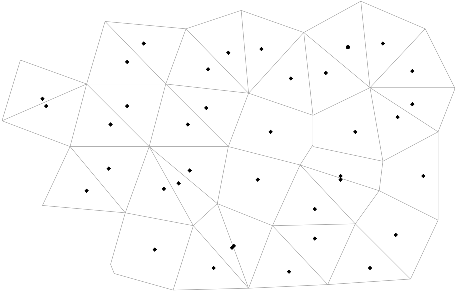
Graphes isoradiaux

- Un graphe G est isoradial s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



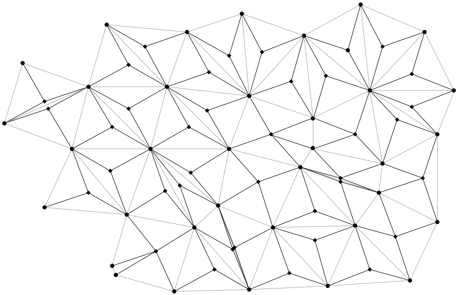
Graphe de losanges associé, angles

- On prend les centres des cercles circonscrits.



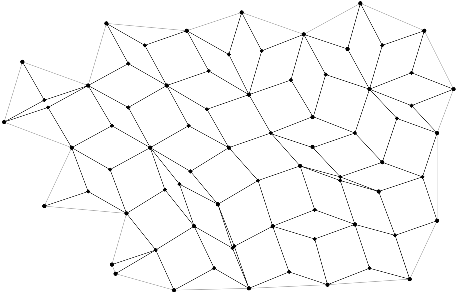
Graphe de losanges associé, angles

- On relie les centres des cercles aux sommets du graphe G.
  $\Rightarrow$ Graphe de losanges associé $\mathsf{G}^\diamond$.



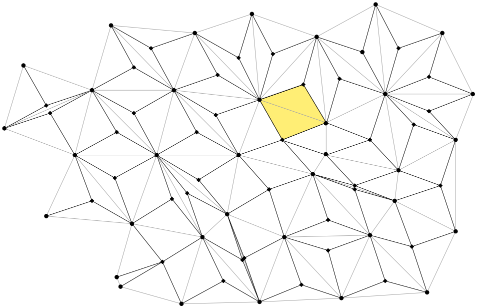
Graphe de losanges associé, angles

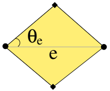
- On relie les centres des cercles aux sommets du graphe G.
  $\Rightarrow$ Graphe de losanges associé $\mathsf{G}^{\diamond}$.



Graphe de losanges associé, angles

- On associe à chaque arête e, le demi-angle θ_e du losange correspondant.

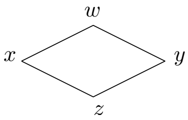




Analyse complexe discrète

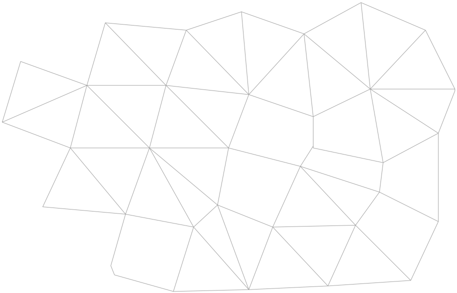
- Soit f une fonction définie sur les sommets de G et G^*.
- Elle est *holomorphe discrète* si, pour tout losange $xwyz$,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\frac{f(w)-f(z)}{w-z}.$$



Mécanique statistique sur les graphes isoradiaux

- Graphe isoradial $\mathsf{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{E})$, fini.



- Ensemble de configurations sur G : $\mathcal{C}(\mathsf{G})$.

Mécanique statistique sur les graphes isoradiaux

- Paramètres :

  Fonction de poids w positive sur les arêtes / les sommets

  $$\boxed{w \text{ dépend des angles } (\theta_{\mathsf{e}})_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}}$$

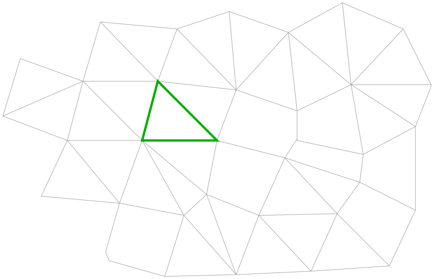
- À une configuration C, on associe une énergie $\mathcal{E}_w(\mathsf{C})$.
- Probabilité de Boltzmann sur les configurations :

$$\forall\, \mathsf{C} \in \mathcal{C}(\mathsf{G}), \quad \mathbb{P}(\mathsf{C}) = \frac{e^{-\mathcal{E}_w(\mathsf{C})}}{Z(\mathsf{G}, w)},$$

où $Z(\mathsf{G}, w) = \sum_{\mathsf{C}\in\mathcal{C}(\mathsf{G})} e^{-\mathcal{E}_w(\mathsf{C})}$ est la fonction de partition.

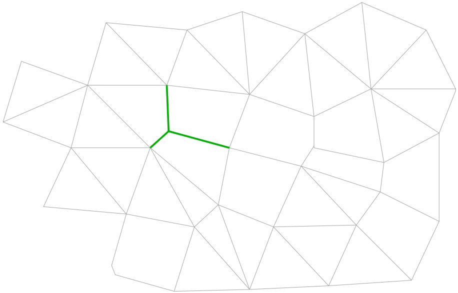
Modèle Z-invariant (Baxter)

- Transformation $\Delta - Y$ préserve l'isoradialité.



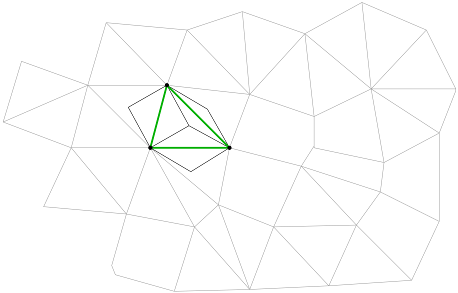
Modèle Z-invariant (Baxter)

- Transformation $\Delta - Y$ préserve l'isoradialité.



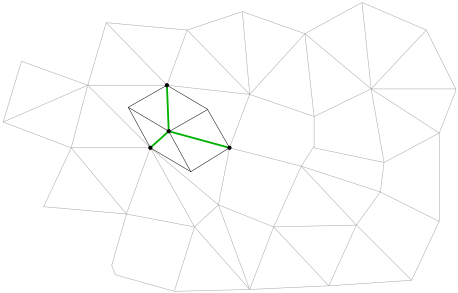
Modèle Z-invariant (Baxter)

- Transformation $\Delta - Y$ préserve l'isoradialité.

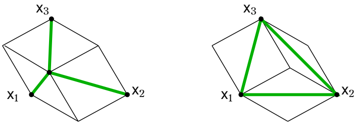


Modèle Z-invariant (Baxter)

- Transformation $\Delta - Y$ préserve l'isoradialité.



Modèle Z-invariant



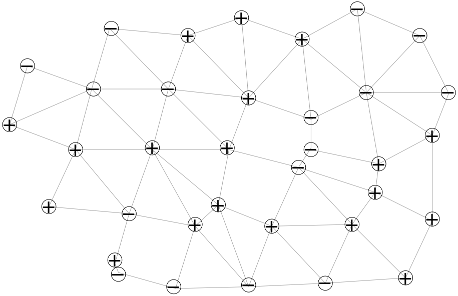
- Décomposition de la fonction de partition sur les configurations possibles en $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3$.
- Le modèle est Z-invariant (Baxter) s'il existe une constante $\mathcal{C}$, telle que pour toute configuration au bord $\mathsf{C}(\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3)$:

$$Z(\mathsf{G}_{\mathsf{Y}}, w, \mathsf{C}(\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3)) = \mathcal{C}\, Z(\mathsf{G}_{\Delta}, w, \mathsf{C}(\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3)).$$

- Conséquences :
  $\Rightarrow$ Probabilités non-affectées par les transformations locales du graphe
  $\Rightarrow$ Expression pour les probabilités qui ne dépend que de la géométrie locale du graphe.

Modèle d'Ising Z-invariant

- Graphe isoradial fini G.



- Une configuration de spins σ associe à chaque sommet x du graphe G un spin $\sigma_{\mathsf{x}} \in \{-1, 1\}$.

$$\Rightarrow \mathcal{C}(\mathsf{G}) = \{-1, 1\}^{\mathsf{V}} = \text{ensemble des configurations de spins.}$$

Modèle d'Ising Z-invariant

- Constantes de couplage $J = (J(\theta_{\mathsf{e}}))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}$.
- Énergie d'une configuration de spins : $\mathcal{E}_J(\sigma) = -\sum_{e=\mathsf{xy}\in\mathsf{E}} J(\theta_{\mathsf{e}})\sigma_{\mathsf{x}}\sigma_{\mathsf{y}}$.
- Probabilité de Boltzmann d'Ising :

$$\forall\, \sigma \in \{-1,1\}^{\mathsf{V}}, \quad \mathbb{P}_{\text{Ising}}(\sigma) = \frac{e^{-\mathcal{E}_J(\sigma)}}{Z_{\text{Ising}}(\mathsf{G},J)},$$

où $Z_{\text{Ising}}(\mathsf{G},J) = \sum_{\sigma\in\{-1,1\}^{\mathsf{V}}} e^{-\mathcal{E}_J(\sigma)}$ est la fonction de partition.

Modèle d'Ising Z-invariant sur les graphes isoradiaux

- Baxter : Le modèle d'Ising est Z-invariant si

$$\forall\, \mathsf{e} \in \mathsf{E},\ J(\theta_{\mathsf{e}}) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + \mathrm{sn}\left(\frac{2K}{\pi}\theta_{\mathsf{e}}|k\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{2K}{\pi}\theta_{\mathsf{e}}|k\right)} \right),\ k \in [0,1).$$

  - $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin \tau}} \mathrm{d}\tau$: intégrale elliptique complète de $1^{\text{ère}}$ espèce.
  - sn, cn : fonctions elliptiques de Jacobi.

- Si $k = 0$: $\forall\, \mathsf{e} \in \mathsf{E},\ J(\theta_{\mathsf{e}}) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + \sin \theta_{\mathsf{e}}}{\cos \theta_{\mathsf{e}}} \right)$.

  - Le modèle est critique (Li / Duminil-Copin - Cimasoni), invariant conforme (Chelkak - Smirnov).
  - Expression locale pour les probabilités du modèle de dimères correspondant (Boutillier - dT).

- $k \neq 0$: travaux en cours (Boutillier - dT - Raschel).

Le Laplacien sur les graphes planaires critiques (Kenyon)

- Graphe isoradial infini G.
- Conductances : $\rho = (\tan(\theta_{\mathsf{e}}))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}$.
- Soit Δ le Laplacien discret sur G représenté par la matrice Δ :

$$\forall\, \mathsf{x},\mathsf{y} \in \mathsf{V}, \quad \Delta(\mathsf{x},\mathsf{y}) = \begin{cases} \rho(\theta_{\mathsf{xy}}) & \text{si } \mathsf{x} \sim \mathsf{y} \\ -\sum_{\mathsf{y}\sim\mathsf{x}} \rho(\theta_{\mathsf{xy}}) & \text{si } \mathsf{x} = \mathsf{y} \\ 0 \text{ sinon.} & \end{cases}$$

- Le Laplacien Δ est un opérateur de $\mathbb{C}^{\mathsf{V}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathsf{V}}$, tel que :

$$\forall f \in \mathbb{C}^{\mathsf{V}}, \quad (\Delta f)(\mathsf{x}) = \sum_{\mathsf{y}\in\mathsf{V}} \Delta(\mathsf{x},\mathsf{y}) f(\mathsf{y}) = \sum_{\mathsf{y}\sim\mathsf{x}} \rho(\theta_{\mathsf{xy}})(f(\mathsf{y}) - f(\mathsf{x})).$$

- La restriction à G d'une fonction holomorphe discrète est harmonique discrète.

Laplacien sur les graphes planaires critiques (Kenyon)

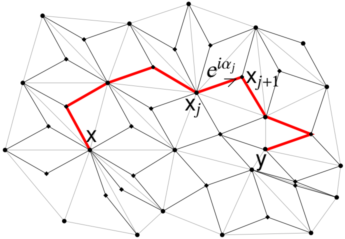
- La fonction de Green G est l'inverse du Laplacien : $\Delta G = \mathrm{Id}$.
- Fonction exponentielle discrète (Mercat) :

$\mathrm{Exp} : \mathsf{V}^\diamond \times \mathsf{V}^\diamond \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Soit $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathsf{V}^\diamond$.

Chemin dans $\mathsf{E}^\diamond$: $\mathsf{x} = \mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n = \mathsf{y}$,

$$\mathrm{Exp}_{\mathsf{x}_j,\mathsf{x}_{j+1}}(\lambda) = \frac{(\lambda + e^{i\alpha_j})}{(\lambda - e^{i\alpha_j})}$$

$$\mathrm{Exp}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n-1} \mathrm{Exp}_{\mathsf{x}_j,\mathsf{x}_{j+1}}(\lambda).$$



Théorème (Kenyon)

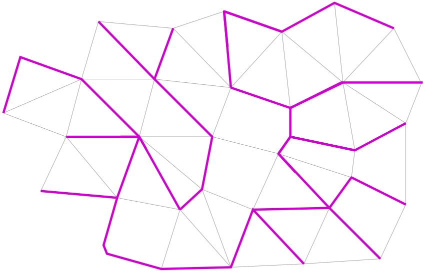
La fonction de Green G admet l'expression explicite suivante :

$$\forall\, \mathsf{x},\, \mathsf{y} \in \mathsf{V}, \quad G(\mathsf{x},\mathsf{y}) = -\frac{1}{8\pi^2 i} \oint_\gamma \mathrm{Exp}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\lambda) \log(\lambda)\, d\lambda,$$

où γ est un contour dans $\mathbb{C}$, contenant les pôles de $\mathrm{Exp}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}$.

Lien avec la mécanique statistique : arbres couvrants

- On suppose G fini.
- Un arbre couvrant de G : sous-ensemble d'arêtes touchant tous les sommets du graphe, connexe et ne contenant pas de cycle.



$$\Rightarrow \mathcal{T}(\mathsf{G}) = \text{ensemble des arbres couvrants de } \mathsf{G}.$$

- Probabilité de Boltzmann des arbres :

$$\forall\, \mathsf{T} \in \mathcal{T}(\mathsf{G}), \quad \mathbb{P}_{\mathrm{arbre}}(\mathsf{T}) = \frac{\prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{T}} \rho(\theta_{\mathsf{e}})}{Z_{\mathrm{arbre}}(\mathsf{G},\rho)}.$$

Lien avec la mécanique statistique : arbres couvrants

Théorème (Kirchhoff)

$$Z_{\text{arbre}}(\mathsf{G}, \rho) = \det \Delta^{(\mathsf{r})},$$

où $\Delta^{(r)}$ *est la matrice* Δ *dont on a enlevé la ligne et la colonne correspondant à un sommet* r.

Théorème (Burton - Pemantle)

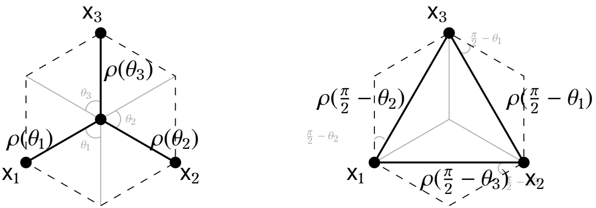
Pour tout sous-ensemble d'arêtes $\{\mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_k\}$ *de* G *:*

$$\mathbb{P}_{\text{arbre}}(\mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_k) = \det[(H(\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_j))_{1 \leq i,j \leq k}],$$

où H *est la matrice d'impédance de transfert. Les coefficients sont des différences de fonctions de Green.*

- Résultats de Kenyon donne formule locale pour $\mathbb{P}_{\text{arbre}}$ et pour l'énergie libre quand le graphe est infini.

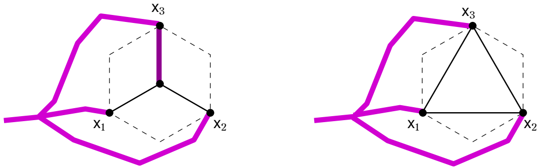
Z-INVARIANCE POUR LES ARBRES COUVRANTS



Décomposer $Z_{\text{arbre}}(\mathsf{G}, \rho)$ sur les configurations possibles en $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3$:

- $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3$ sont connectés à r.
- $\mathsf{x}_i, \mathsf{x}_j$ sont connectés à r, x_k ne l'est pas.
- x_i est connecté à r, $\mathsf{x}_j, \mathsf{x}_k$ ne le sont pas.
- Aucun des sommets n'est connecté à r.

Z-INVARIANCE POUR LES ARBRES COUVRANTS



Exemple : $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3$ sont connectés à r

	C_{Y}	C_{Δ}
$\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3\}$	$\sum_{\ell=1}^{3} \rho(\theta_\ell)$	1
$\{\mathsf{x}_i, \mathsf{x}_j\}$	$\rho(\theta_k)(\sum_{\ell\neq k} \rho(\theta_\ell))$	$\sum_{\ell\neq k} \rho(\frac{\pi}{2} - \theta_\ell)$
$\{\mathsf{x}_i\}$	$\prod_{\ell=1}^{3} \rho(\theta_\ell)$	$\sum_{\ell=1}^{3} \prod_{\ell'\neq\ell} \rho(\frac{\pi}{2} - \theta_{\ell'})$
$\{\emptyset\}$	0	0

LEMME

Le modèle des arbres couvrants muni des conductances $\rho = (\tan(\theta_{\mathsf{e}}))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}$ est Z-invariant.

En dehors du point critique ? Laplacien massique

- Soit $k \in [0,1)$ (le module elliptique), $k' = \sqrt{1-k^2}$, $\bar{\theta}_{\mathsf{e}} = \frac{2K}{\pi}\theta_{\mathsf{e}}$.
- On définit les conductances et les masses sur G :

$$\forall\, \mathsf{e} \in \mathsf{E},\ \rho(\theta_{\mathsf{e}}) = \mathrm{sc}(\bar{\theta}_{\mathsf{e}} \,|\, k)$$
$$\forall\, \mathsf{x} \in \mathsf{V},\ m^2(\mathsf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}(\bar{\theta}_j|k) - \frac{2}{k'}(K-E) - \sum_{j=1}^{n} \rho(\bar{\theta}_j|k).$$

  - $E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin\tau}\,\mathrm{d}\tau$: intégrale elliptique comp. de 2^{nde} espèce.
  - $\mathrm{A}(u|k) = -\frac{i}{k'}\mathrm{E}(iu|k')$.
  - $\mathrm{E}(u|k) = \int_0^u \mathrm{dn}^2(v|k)\mathrm{d}v$: Fonction epsilon de Jacobi.

Famille de Laplaciens massiques

- Soit $k \in [0,1)$.
  Soit G un graphe isoradial infini, muni des poids ρ, m^2.
- Soit $\Delta^{m(k)}$ le Laplacien massique sur G représenté par la matrice :

$$\forall\, \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathsf{V}, \quad \Delta^{m(k)}(\mathsf{x},\mathsf{y}) = \begin{cases} \rho(\theta_{\mathsf{xy}}) & \text{si } \mathsf{x} \sim \mathsf{y} \\ -m^2(x) - \sum_{\mathsf{y}\sim\mathsf{x}} \rho(\theta_{\mathsf{xy}}) & \text{si } \mathsf{x} = \mathsf{y} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Le Laplacien massique $\Delta^{m(k)}$ est un opérateur :

$$\forall f \in \mathbb{C}^{\mathsf{V}}, \quad (\Delta^{m(k)} f)(\mathsf{x}) = \sum_{\mathsf{y}\sim\mathsf{x}} \rho(\theta_{\mathsf{xy}})(f(\mathsf{y}) - f(\mathsf{x})) + m^2(x) f(x).$$

- La fonction de Green massique $G^{m(k)}$ est l'inverse du Laplacien massique : $\Delta^{m(k)} G^{m(k)} = \mathrm{Id}$.

Fonction exponentielle discrète massique

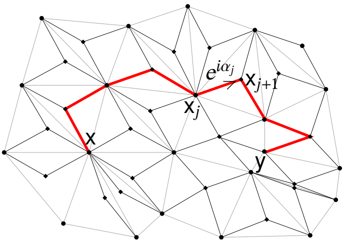
- **Fonction exponentielle discrète massique.** Soit $\mathbb{T}(k) = \mathbb{C}/(4K\mathbb{Z} + i4K'\mathbb{Z})$.

$\mathrm{Exp}(\cdot|k) : \mathsf{V}^\diamond \times \mathsf{V}^\diamond \times \mathbb{T}(k) \to \mathbb{C}$. Soit $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathsf{V}^\diamond$.

Chemin dans $\mathsf{E}^\diamond$: $\mathsf{x} = \mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n = \mathsf{y}$,

$$\mathrm{Exp}_{\mathsf{x}_j,\mathsf{x}_{j+1}}(u|k) = -i\sqrt{k'}\,\mathrm{sc}(u_{\bar\alpha_j}),\ \ u_{\bar\alpha_j} = \frac{u-\bar\alpha_j}{2}.$$

$$\mathrm{Exp}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(u|k) = \prod_{j=1}^{n-1} \mathrm{Exp}_{\mathsf{x}_j,\mathsf{x}_{j+1}}(u|k).$$



Lemme

La fonction exponentielle discrète massique est bien définie, i.e., indépendante du choix de chemin de x *à* y.

Proposition

Pour tout $u \in \mathbb{T}(k)$, *pour tout* $\mathsf{y} \in \mathsf{V}$, *la fonction* $\mathrm{Exp}_{(\cdot,y)}(u|k) \in \mathbb{C}^{\mathsf{V}}$ *est harmonique massique :* $\Delta^m \mathrm{Exp}_{(\cdot,y)}(u|k) = 0$.

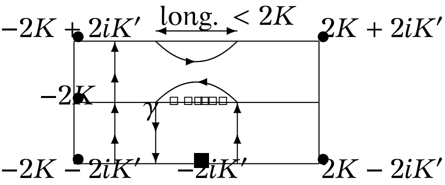
Expression locale pour la fonction de Green massique

Théorème

Pour tous sommets x, y *du graphe* G,

$$G^{m(k)}(\mathsf{x},\mathsf{y}) = -\frac{k'}{4i\pi}\oint_{\gamma_{x,y}} H(u|k)\,\mathrm{Exp}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(u|k)\mathrm{d}u,$$

où $\gamma_{x,y}$ est le contour ci-dessous, $H(u|k) = \frac{u}{4K} + \frac{K'}{\pi}Z(u/2|k)$ et Z est la fonction zeta de Jacobi.



Tore $\mathbb{T}(k)$, contour d'intégration $\gamma_{x,y}$. Les carrés blancs sont les pôles de $\mathrm{Exp}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\,\cdot\,|k)$, le carré noir est le pôle de H.

Idée de la preuve, conséquences

Idée de la preuve (Kenyon)

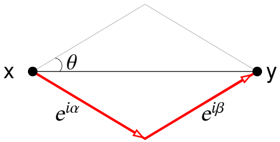
- Montrer que $\forall\, \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathsf{V},\ \Delta^{m(k)} G^{m(k)}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \delta(\mathsf{x}, \mathsf{y})$.
- Si $\mathsf{x} \neq \mathsf{y}$, déformer les contours en un contour commun et utiliser le fait que les fonctions exponentielles sont dans le noyau de Δ^m.
- Si $\mathsf{x} = \mathsf{y}$, Calcul explicite de résidus. Utiliser le saut de la fonction H sur le tore $\mathbb{T}(k)$.

Conséquences

- Localité.
- Formule asymptotique pour $G^{m(k)}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$, lorsque $|\mathsf{x} - \mathsf{y}| \to \infty$.
- Calculs explicites.

Exemple de calcul

Soit x, y voisins dans G, alors :

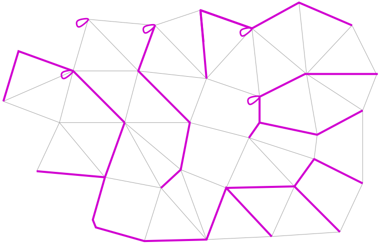


$$\mathrm{Exp}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(u) = -(k')^2 \,\mathrm{sc}(u_{\bar\alpha})\,\mathrm{sc}(u_{\bar\beta}).$$

$$\begin{aligned}
G^{m(k)}(\mathsf{x},\mathsf{y}) &= \frac{(k')^2}{4i\pi}\oint_\gamma H(u)\,\mathrm{sc}(u_{\bar\alpha})\,\mathrm{sc}(u_{\bar\beta})\mathrm{d}u \\
&= \frac{(k')^2}{4i\pi}\oint_\gamma H(u)\,\mathrm{sc}\left(\frac{u}{2}\right)\mathrm{sc}\left(\frac{u-2\bar\theta}{2}\right)\mathrm{d}u, \quad \text{(changement de variables)} \\
&= \frac{H(2K+2\bar\theta)-H(2K)}{\mathrm{sc}(\bar\theta)} - \frac{K'k'}{\pi\,\mathrm{dn}(\bar\theta)}, \quad \text{(résidus en } 2K, 2K+2\bar\theta, 2iK' \\
&= \frac{H(2\bar\theta)}{\mathrm{sc}(\bar\theta)} - \frac{K'\,\mathrm{dn}(\bar\theta)}{\pi}, \quad \text{(formules d'addition pour } H\text{).}
\end{aligned}$$

Formule locale pour les forêts couvrantes

- Une forêt couvrante de G : sous-ensemble d'arêtes touchant tous les sommets du graphe, tel que chaque composante connexe est un arbre enraciné.



$$\Rightarrow \mathcal{F}(\mathsf{G}) = \text{ensemble des forêts couvrantes de } \mathsf{G}.$$

- Probabilité de Boltzmann des forêts :

$$\forall\, \mathsf{F} \in \mathcal{F}(\mathsf{G}), \quad \mathbb{P}_{\text{foret}}(\mathsf{F}) = \frac{\prod_{\mathsf{T} \subset \mathsf{F}, \mathsf{T} \text{enraciné en } \mathsf{x}} (\prod_{\mathsf{e} \in \mathsf{T}} \rho(\theta_{\mathsf{e}})) m^2(\mathsf{x})}{Z_{\text{foret}}(\mathsf{G}, \rho, m^2)}.$$

- Expression explicite pour une mesure sur les forêts couvrantes d'un graphe isoradial infini, périodique ou non, obtenue comme limite faible des mesures sur une exhaustion.

Z-INVARIANCE POUR LES FORÊTS COUVRANTES

	C_{Y}	C_{Δ}
$\{x_1,x_2,x_3\}$	$m^2(x_0)+\sum_{\ell=1}^3 \rho(\theta_\ell)$	1
$\{x_i,x_j\}$	$\rho(\theta_k)\left[\sum_{\ell\neq k}\rho(\theta_\ell)\right]+m^2(x_0)\rho(\theta_k)+$ $m^2(x_k)\left[\sum_{\ell=1}^3\rho(\theta_\ell)+m^2(x_0)\right]$	$\sum_{\ell\neq k}\rho(K-\theta_\ell)+m'^2(x_k)$
$\{x_i\}$	$\prod_{\ell=1}^3\rho(\theta_\ell)+m^2(x_0)\prod_{\ell\neq i}\rho(\theta_\ell)+$ $\sum_{\ell\neq i} m^2(x_\ell)\rho(\theta_{\overline{\{i,\ell\}}})\left[\sum_{\ell'\in\{i,\ell\}}\rho(\theta_{\ell'})\right]+$ $m^2(x_0)[m^2(x_k)\rho(\theta_j)+m^2(x_j)\rho(\theta_k)]+$ $\left[\prod_{\ell\neq i} m^2(x_\ell)\right]\left[\sum_{\ell=1}^3\rho(\theta_\ell)+m^2(x_0)\right]$	$\sum_{\ell=1}^3\prod_{\ell'\neq\ell}\rho(K-\theta_{\ell'})+$ $\sum_{\ell\neq i} m'^2(x_\ell)\left[\sum_{\ell'\in\{i,\ell\}}\rho(K-\theta_{\ell'})\right]+\prod_{\ell\neq i} m'^2(x_\ell)$
$\{\emptyset\}$	$\left[\sum_{i=0}^3 m^2(x_i)\right]\left[\prod_{i=1}^3\rho(\theta_i)\right]+m^2(x_0)\sum_{i=1}^3 m^2(x_i)\prod_{\ell\neq i}\rho(\theta_\ell)+$ $\sum_{i=1}^3\left[\prod_{\ell\neq i} m^2(x_\ell)\right]\rho(\theta_i)\left[\sum_{\ell\neq i}\rho(\theta_i)\right]+$ $m^2(x_0)\sum_{i=1}^3\left[\prod_{\ell\neq i} m^2(x_\ell)\right]\rho(\theta_i)+$ $\left[\prod_{i=1}^3 m^2(x_k)\right]\left[\sum_{i=1}^3\rho(\theta_i)+m^2(x_0)\right]$	$\left[\sum_{i=1}^3 m'^2(x_i)\right]\left[\sum_{i=1}^3\prod_{\ell\neq i}\rho(K-\theta_\ell)\right]+$ $\sum_{i=1}^3\left[\prod_{\ell\neq i} m'^2(x_\ell)\right]\left[\sum_{i\neq\ell}\rho(K-\theta_\ell)\right]+$ $\prod_{i=1}^3 m'^2(x_k)$

Z-INVARIANCE POUR LES FORÊTS COUVRANTES

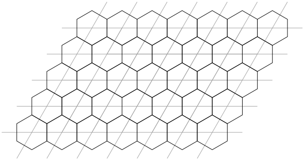
THÉORÈME

Pour tout $k \in [0,1)$, le modèle des forêts couvrantes muni des poids ρ, m^2, est Z-invariant.

- Lorsque $k = 0$, $\rho(\theta_{\mathsf{e}}) = \tan(\theta_{\mathsf{e}}), m^2(\mathsf{x}) = 0$: cas critique.

Si le graphe G est $\mathbb{Z}^2$-périodique

- Graphe isoradial, infini, $\mathbb{Z}^2$-périodique, G.
- Exhaustion torique du graphe G : $\mathsf{G}_n = \mathsf{G}/n\mathbb{Z}^2$.



L'énergie libre est :

$$f(k) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log Z_{\text{foret}}(\mathsf{G}_n, \rho, m^2).$$

Théorème

L'énergie libre est égale à :

$$f(k) = |\mathsf{V}_1| S(K) + \sum_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}_1} \left(\int_0^{\bar{\theta}_{\mathsf{e}}} -4H'(2\omega) \log \mathrm{sc}(\omega) \mathrm{d}\omega + 2H(2\bar{\theta}_{\mathsf{e}}) \log \mathrm{sc}(\bar{\theta}_{\mathsf{e}}) \right).$$

Lorsque $k = 0$, on retrouve le résultat de Kenyon.

Proposition

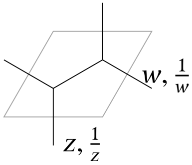
Lorsque $k \to 0$,

$$f(k) = f(0) - k^2 \log(k) \left[\frac{|\mathsf{V}_1|}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{e \in \mathsf{E}_1} \bar{\theta}_e \right] + O(k^2).$$

où $f(0)$ *est l'énergie libre des arbres couvrants.*

Si le graphe G est $\mathbb{Z}^2$-périodique : courbe spectrale.

- Domaine fondamental : G_1.



- $\Delta^m(z,w)$: matrice du Laplacien massique sur G_1, avec poids $z, \frac{1}{z}, w, \frac{1}{w}$.
- Polynôme caractéristique : $P_{\Delta^m}(z,w) = \det \Delta^m(z,w)$.
- Courbe spectrale du Laplacien massique : $\{z, w \in \mathbb{C}^2 : P_{\Delta^m}(z,w) = 0\}$.

Théorème

Pour tout $k \in (0,1)$, la courbe spectrale du Laplacien massique est une courbe de Harnack de genre 1.