Étude générale de la complexité moyenne du Branch and Bound pour le problème du stable max appliqué à des graphes aléatoires suivant une loi binomiale

Nicolas Bourgeois, Rémi Catellier, Tom Denat, Vangelis Paschos,

9 mai 2017

Introduction

- Pourquoi étudier la complexité en cas moyen des problèmes combinatoires ?
- La complexité au pire cas offre une garantie.
- Néanmoins elle est parfois peu représentative du nombre véritable de calculs.
- Exemple : l'algorithme du simplexe est exponentiel.

Introduction

- Pourquoi étudier la complexité en cas moyen des problèmes combinatoires ?
- La complexité au pire cas offre une garantie.
- Néanmoins elle est parfois peu représentative du nombre véritable de calculs.
- Exemple : l'algorithme du simplexe est exponentiel.

Introduction

- Pourquoi étudier la complexité en cas moyen des problèmes combinatoires ?
- La complexité au pire cas offre une garantie.
- Néanmoins elle est parfois peu représentative du nombre véritable de calculs.
- Exemple : l'algorithme du simplexe est exponentiel.

Introduction

- Pourquoi étudier la complexité en cas moyen des problèmes combinatoires ?
- La complexité au pire cas offre une garantie.
- Néanmoins elle est parfois peu représentative du nombre véritable de calculs.
- Exemple : l'algorithme du simplexe est exponentiel.

Introduction

- Pourquoi étudier la complexité en cas moyen des problèmes combinatoires ?
- La complexité au pire cas offre une garantie.
- Néanmoins elle est parfois peu représentative du nombre véritable de calculs.
- Exemple : l'algorithme du simplexe est exponentiel.

Plan de la présentation

- Présentation du problème.
- Étude de la complexité de l'algorithme de recherche exhaustive des stables.
- Étude de la complexité de l'algorithme de recherche du stable max.
- Discussions

Plan de la présentation

- Présentation du problème.
- Étude de la complexité de l'algorithme de recherche exhaustive des stables.
- Étude de la complexité de l'algorithme de recherche du stable max.
- Discussions

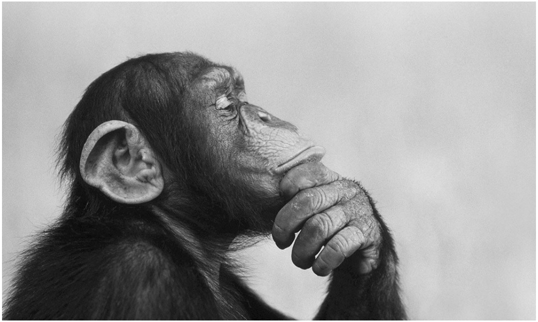
Plan de la présentation

- Présentation du problème.
- Étude de la complexité de l'algorithme de recherche exhaustive des stables.
- Étude de la complexité de l'algorithme de recherche du stable max.
- Discussions

Plan de la présentation

- Présentation du problème.
- Étude de la complexité de l'algorithme de recherche exhaustive des stables.
- Étude de la complexité de l'algorithme de recherche du stable max.
- Discussions

Présentation du problème



Graphe aléatoire

- Un graphe généré par un processus aléatoire.
- Le premier modèle de graphes aléatoires a été popularisé par Paul Erdős et Alfréd Rényi dans une série d'articles publiés entre 1959 et 1968.

Graphe aléatoire

- Un graphe généré par un processus aléatoire.
- Le premier modèle de graphes aléatoires a été popularisé par Paul Erdős et Alfréd Rényi dans une série d'articles publiés entre 1959 et 1968.

Graphe aléatoire

- Un graphe généré par un processus aléatoire.
- Le premier modèle de graphes aléatoires a été popularisé par Paul Erdős et Alfréd Rényi dans une série d'articles publiés entre 1959 et 1968.

Le graphes aléatoire binomial

- Généralement noté $G(n, p)$ avec n le nombre de sommets fixe, et p la probabilité d'occurrence des arêtes.
- Chacune des $\frac{n(n-1)}{2}$ potentielles arêtes est présente avec probabilité p, absente avec probabilité 1-p.
- Indépendance entre les arêtes.
- Le nombre d'arêtes suit une loi binomiale de paramètres $\frac{n(n-1)}{2}$ et p.

Le graphes aléatoire binomial

- Généralement noté $G(n,p)$ avec n le nombre de sommets fixe, et p la probabilité d'occurrence des arêtes.
- Chacune des $\frac{n(n-1)}{2}$ potentielles arêtes est présente avec probabilité p, absente avec probabilité 1-p.
- Indépendance entre les arêtes.
- Le nombre d'arêtes suit une loi binomiale de paramètres $\frac{n(n-1)}{2}$ et p.

Le graphes aléatoire binomial

- Généralement noté $G(n, p)$ avec n le nombre de sommets fixe, et p la probabilité d'occurrence des arêtes.
- Chacune des $\frac{n(n-1)}{2}$ potentielles arêtes est présente avec probabilité p, absente avec probabilité 1-p.
- Indépendance entre les arêtes.
- Le nombre d'arêtes suit une loi binomiale de paramètres $\frac{n(n-1)}{2}$ et p.

Le graphes aléatoire binomial

- Généralement noté $G(n,p)$ avec n le nombre de sommets fixe, et p la probabilité d'occurrence des arêtes.
- Chacune des $\frac{n(n-1)}{2}$ potentielles arêtes est présente avec probabilité p, absente avec probabilité 1-p.
- Indépendance entre les arêtes.
- Le nombre d'arêtes suit une loi binomiale de paramètres $\frac{n(n-1)}{2}$ et p.

Le graphes aléatoire binomial

- Généralement noté $G(n,p)$ avec n le nombre de sommets fixe, et p la probabilité d'occurrence des arêtes.
- Chacune des $\frac{n(n-1)}{2}$ potentielles arêtes est présente avec probabilité p, absente avec probabilité 1-p.
- Indépendance entre les arêtes.
- Le nombre d'arêtes suit une loi binomiale de paramètres $\frac{n(n-1)}{2}$ et p.

Le graphes aléatoire Uniforme

- Généralement noté $G(n, m)$.
- Nombre d'arêtes et de sommets fixes.
- On choisit uniformément un graphe parmi tous les graphes possédant m arêtes sur n sommets.

Le graphes aléatoire Uniforme

- Généralement noté $G(n, m)$.
- Nombre d'arêtes et de sommets fixes.
- On choisit uniformément un graphe parmi tous les graphes possédant m arêtes sur n sommets.

Le graphes aléatoire Uniforme

- Généralement noté $G(n, m)$.
- Nombre d'arêtes et de sommets fixes.
- On choisit uniformément un graphe parmi tous les graphes possédant m arêtes sur n sommets.

Le graphes aléatoire Uniforme

- Généralement noté $G(n, m)$.
- Nombre d'arêtes et de sommets fixes.
- On choisit uniformément un graphe parmi tous les graphes possédant m arêtes sur n sommets.

Le problème du stable

- Recherche de l'ensemble de sommets deux à deux non-adjacents de taille max.
- Problème NP-complet proche du problème de la Clique max ou du Min Set Cover.
- Résolu en $O(2^{0.288n})$.

Le problème du stable

- Recherche de l'ensemble de sommets deux à deux non-adjacents de taille max.
- Problème NP-complet proche du problème de la Clique max ou du Min Set Cover.
- Résolu en $O(2^{0.288n})$.

Le problème du stable

- Recherche de l'ensemble de sommets deux à deux non-adjacents de taille max.
- Problème NP-complet proche du problème de la Clique max ou du Min Set Cover.
- Résolu en $O(2^{0.288n})$.

Le problème du stable

- Recherche de l'ensemble de sommets deux à deux non-adjacents de taille max.
- Problème NP-complet proche du problème de la Clique max ou du Min Set Cover.
- Résolu en $O(2^{0.288n})$.

Travaux précédents

- "Average Case Analysis of NP-complete Problems :Maximum Independent Set and Exhaustive Search Algorithms" de Cyril Banderier, Hsien-Kuei Hwang, Vlady Ravelomanana et Vytas Zacharovas étudiant la complexité moyenne du problème du stable.
- Principale différence : distribution des graphes.

Travaux précédents

- "Average Case Analysis of NP-complete Problems :Maximum Independent Set and Exhaustive Search Algorithms" de Cyril Banderier, Hsien-Kuei Hwang, Vlady Ravelomanana et Vytas Zacharovas étudiant la complexité moyenne du problème du stable.
- Principale différence : distribution des graphes.

Travaux précédents

- "Average Case Analysis of NP-complete Problems :Maximum Independent Set and Exhaustive Search Algorithms" de Cyril Banderier, Hsien-Kuei Hwang, Vlady Ravelomanana et Vytas Zacharovas étudiant la complexité moyenne du problème du stable.
- Principale différence : distribution des graphes.

Le Branch and Bound

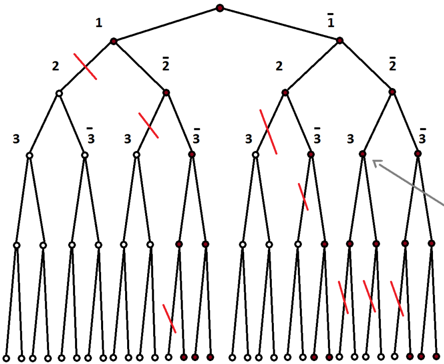
- Algorithme d'énumération utilisé pour les problèmes d'optimisation.
- Partitionnement progressif de l'ensemble des solutions.

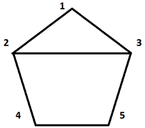
Le Branch and Bound

- Algorithme d'énumération utilisé pour les problèmes d'optimisation.
- Partitionnement progressif de l'ensemble des solutions.

Le Branch and Bound

- Algorithme d'énumération utilisé pour les problèmes d'optimisation.
- Partitionnement progressif de l'ensemble des solutions.





Solution partielle du troisième étage représentant les stables contenant le sommet 3 mais pas les sommets 1 et 2

Notations

- $C_{n,p}$: Complexité moyenne du Branch and Bound pour la recherche exhaustive de tous les stables, appliqué à un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- $\Delta_{n,p}$: Espérance du nombre de stables d'un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- $NS_{n,p}$: Nombre de stables d'un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- MIS : La valeur du stable Max.

Notations

- $C_{n,p}$: Complexité moyenne du Branch and Bound pour la recherche exhaustive de tous les stables, appliqué à un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- $\Delta_{n,p}$: Espérance du nombre de stables d'un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- $NS_{n,p}$: Nombre de stables d'un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- MIS : La valeur du stable Max.

Notations

- $C_{n,p}$: Complexité moyenne du Branch and Bound pour la recherche exhaustive de tous les stables, appliqué à un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- $\Delta_{n,p}$: Espérance du nombre de stables d'un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- $NS_{n,p}$: Nombre de stables d'un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- MIS : La valeur du stable Max.

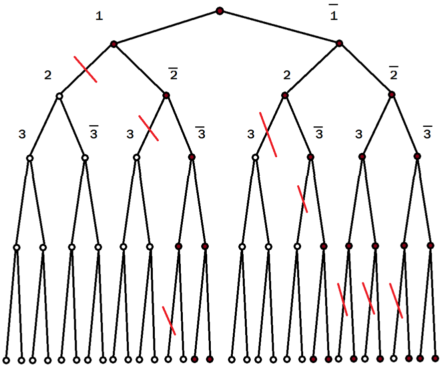
Notations

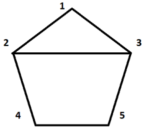
- $C_{n,p}$: Complexité moyenne du Branch and Bound pour la recherche exhaustive de tous les stables, appliqué à un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- $\Delta_{n,p}$: Espérance du nombre de stables d'un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- $NS_{n,p}$: Nombre de stables d'un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- MIS : La valeur du stable Max.

Notations

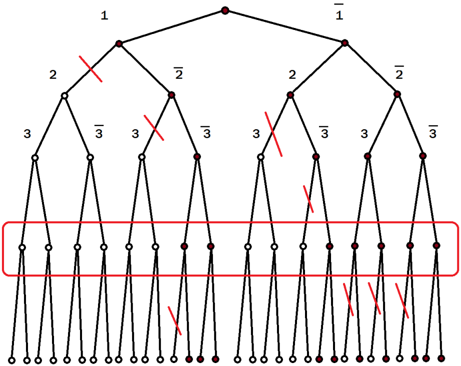
- $C_{n,p}$: Complexité moyenne du Branch and Bound pour la recherche exhaustive de tous les stables, appliqué à un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- $\Delta_{n,p}$: Espérance du nombre de stables d'un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- $NS_{n,p}$: Nombre de stables d'un graphe aléatoire suivant une loi binomiale n,p.
- MIS : La valeur du stable Max.

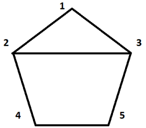
Complexité du Branch and Bound exhaustif





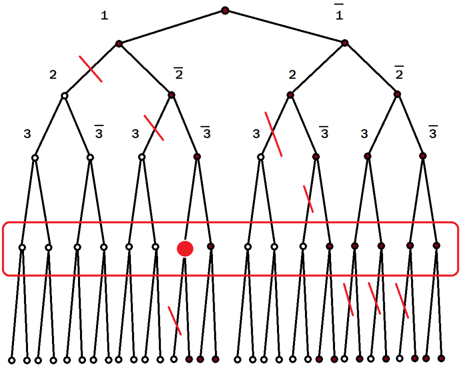
Complexité du Branch and Bound exhaustif

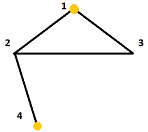




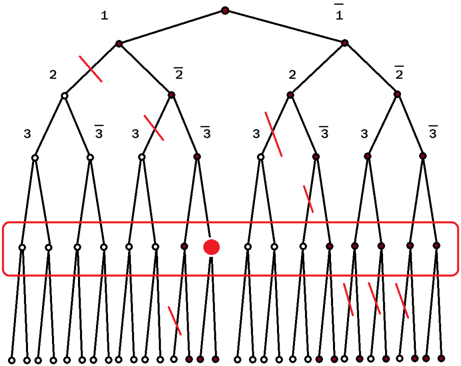
Stables du graphe induit par les 4 premiers sommets

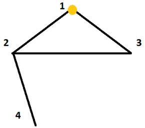
Complexité du Branch and Bound exhaustif





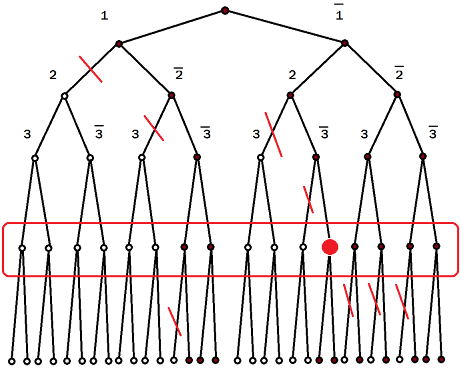
Stables du graphe induit par les 4 premiers sommets

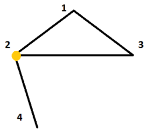




Stables du graphe induit par les 4 premiers sommets

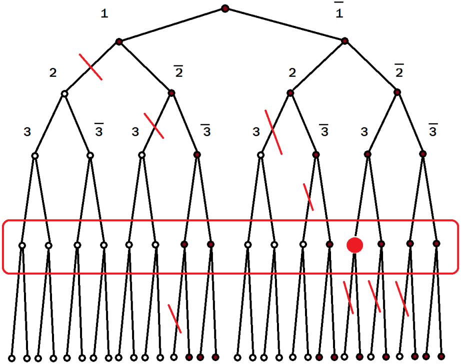
Complexité du Branch and Bound exhaustif

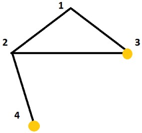




Stables du graphe induit par les 4 premiers sommets

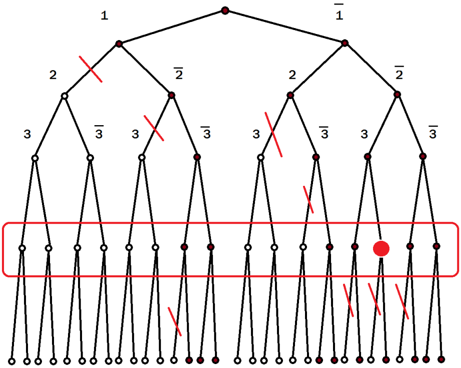
Complexité du Branch and Bound exhaustif

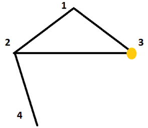




Stables du graphe induit par les 4 premiers sommets

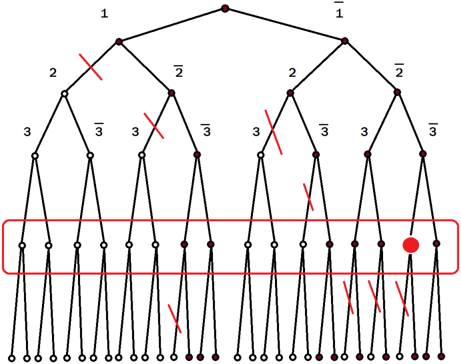
Complexité du Branch and Bound exhaustif

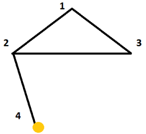




Stables du graphe induit par les 4 premiers sommets

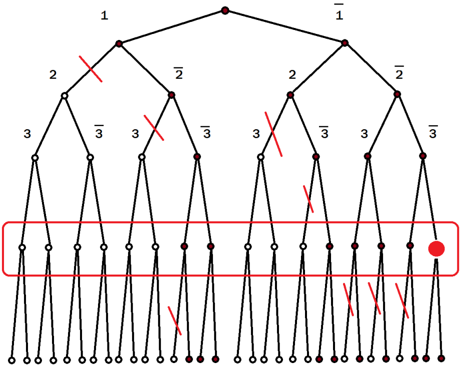
Complexité du Branch and Bound exhaustif

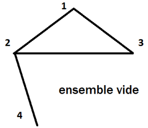




Stables du graphe induit par les 4 premiers sommets

Complexité du Branch and Bound exhaustif





Stables du graphe induit par les 4 premiers sommets

Complexité du Branch and Bound exhaustif

Soit un graphe aléatoire G distribué selon une loi binomiale n,p

$$C_{n,p} = \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{n} NS_{i,p}]$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \Delta_{i,p} = \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{n} \sum_{I \subseteq G} 1_{\{I \text{ est un stable}\}}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{I \subseteq G} \mathbb{P}(\text{I est un stable})$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (1-p)^{\binom{j}{2}}$$

3 cas :

- $n \times p \to 0,\ C_{n,p} = \Theta(2^n)$
- $n \times p \to \alpha > 0,\ C_{n,p} = \Omega(f_-(\alpha)^n)$ et $C_{n,p} = O(f_+(\alpha)^n)$

$$f_+(\alpha) = e^{\frac{2W(\alpha)+W^2(\alpha)}{2\alpha}} \qquad f_+(1.25) = 1.995 \quad f_+(6.15) \approx 1.5$$

$$f_-(\alpha) = e^{\frac{2W(e^{-1}\alpha)+W^2(e^{-1}\alpha)}{2\alpha}} \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad ,\ f_-(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} e^{\frac{1}{e}} \approx 1.447$$

- $n \times p \to \infty,\ C_{n,p}$ est sous exponentiel.

3 cas :

- $n \times p \to 0, \ C_{n,p} = \Theta(2^n)$
- $n \times p \to \alpha > 0, \ C_{n,p} = \Omega(f_-(\alpha)^n)$ et $C_{n,p} = O(f_+(\alpha)^n)$

  $f_+(\alpha) = e^{\frac{2W(\alpha)+W^2(\alpha)}{2\alpha}}$ $\quad f_+(1.25) = 1.995 \quad f_+(6.15) \approx 1.5$

  $f_-(\alpha) = e^{\frac{2W(e^{-1}\alpha)+W^2(e^{-1}\alpha)}{2\alpha}} \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 1$ $\quad , \ f_-(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} e^{\frac{1}{e}} \approx 1.447$
- $n \times p \to \infty, \ C_{n,p}$ est sous exponentiel.

3 cas :

- $n \times p \to 0,\ C_{n,p} = \Theta(2^n)$
- $n \times p \to \alpha > 0,\ C_{n,p} = \Omega(f_-(\alpha)^n)$ et $C_{n,p} = O(f_+(\alpha)^n)$

  $f_+(\alpha) = e^{\frac{2W(\alpha)+W^2(\alpha)}{2\alpha}}$ $\qquad f_+(1.25) = 1.995 \quad f_+(6.15) \approx 1.5$

  $f_-(\alpha) = e^{\frac{2W(e^{-1}\alpha)+W^2(e^{-1}\alpha)}{2\alpha}} \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 1$ $\quad , f_-(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} e^{\frac{1}{e}} \approx 1.447$
- $n \times p \to \infty,\ C_{n,p}$ est sous exponentiel.

Bornes pour le Branch and Bound exhaustif

3 cas :

- $n \times p \to 0,\ C_{n,p} = \Theta(2^n)$
- $n \times p \to \alpha > 0,\ C_{n,p} = \Omega(f_-(\alpha)^n)$ et $C_{n,p} = O(f_+(\alpha)^n)$

  $f_+(\alpha) = e^{\frac{2W(\alpha)+W^2(\alpha)}{2\alpha}}$ $\quad f_+(1.25) = 1.995 \quad f_+(6.15) \approx 1.5$

  $f_-(\alpha) = e^{\frac{2W(e^{-1}\alpha)+W^2(e^{-1}\alpha)}{2\alpha}} \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 1$ $\quad , f_-(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} e^{\frac{1}{e}} \approx 1.447$
- $n \times p \to \infty,\ C_{n,p}$ est sous exponentiel.

Méthode du max potentiel pour la recherche du stable max

- Le potentiel d'un solution partielle $= n - i + j$. $n =$ nombre de sommets du graphe, $i =$ étage de la solution partielle, $j =$ le nombre de sommets inclus dans la solution partielle.
- À chaque étape, la solution partielle ayant le plus grand résultat potentiel est visitée.
- La première solution partielle trouvée est optimale.
- Aucune solution partielle dont le potentiel est inférieur à MIS n'est visitée.

Méthode du max potentiel pour la recherche du stable max

- Le potentiel d'un solution partielle $= n - i + j$. $n =$ nombre de sommets du graphe, $i =$ étage de la solution partielle, $j =$ le nombre de sommets inclus dans la solution partielle.
- À chaque étape, la solution partielle ayant le plus grand résultat potentiel est visitée.
- La première solution partielle trouvée est optimale.
- Aucune solution partielle dont le potentiel est inférieur à MIS n'est visitée.

Méthode du max potentiel pour la recherche du stable max

- Le potentiel d'un solution partielle $= n - i + j$. $n =$ nombre de sommets du graphe, $i =$ étage de la solution partielle, $j =$ le nombre de sommets inclus dans la solution partielle.
- À chaque étape, la solution partielle ayant le plus grand résultat potentiel est visitée.
- La première solution partielle trouvée est optimale.
- Aucune solution partielle dont le potentiel est inférieur à MIS n'est visitée.

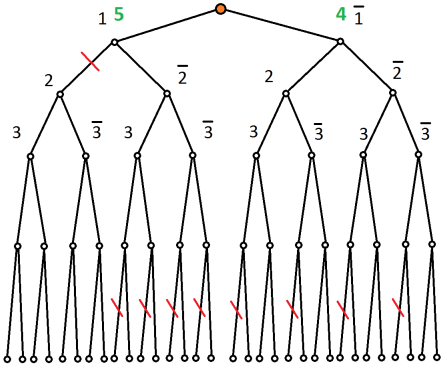
Méthode du max potentiel pour la recherche du stable max

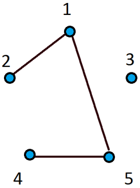
- Le potentiel d'un solution partielle $= n - i + j$. $n =$ nombre de sommets du graphe, $i =$ étage de la solution partielle, $j =$ le nombre de sommets inclus dans la solution partielle.
- À chaque étape, la solution partielle ayant le plus grand résultat potentiel est visitée.
- La première solution partielle trouvée est optimale.
- Aucune solution partielle dont le potentiel est inférieur à MIS n'est visitée.

Méthode du max potentiel pour la recherche du stable max

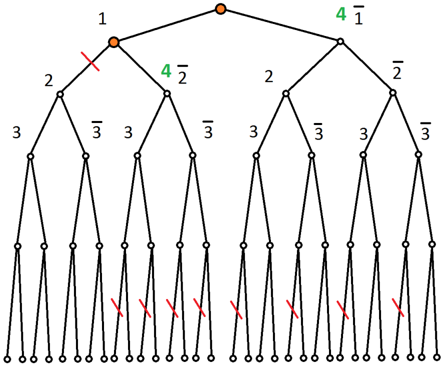
- Le potentiel d'un solution partielle $= n - i + j$. $n=$ nombre de sommets du graphe, $i=$ étage de la solution partielle, $j=$ le nombre de sommets inclus dans la solution partielle.
- À chaque étape, la solution partielle ayant le plus grand résultat potentiel est visitée.
- La première solution partielle trouvée est optimale.
- Aucune solution partielle dont le potentiel est inférieur à MIS n'est visitée.

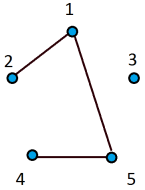
Complexité du Branch and Bound exhaustif



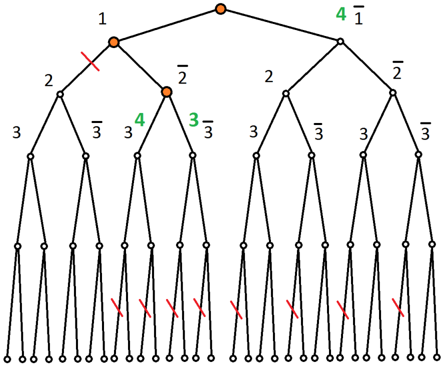


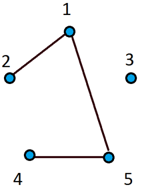
Complexité du Branch and Bound exhaustif



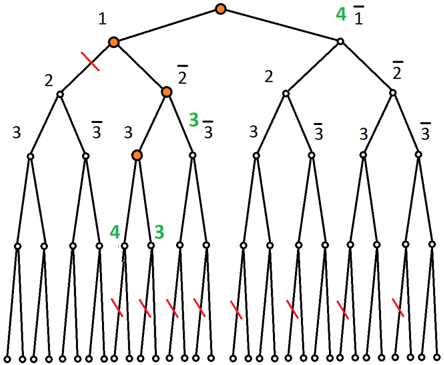


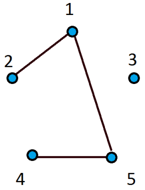
Complexité du Branch and Bound exhaustif



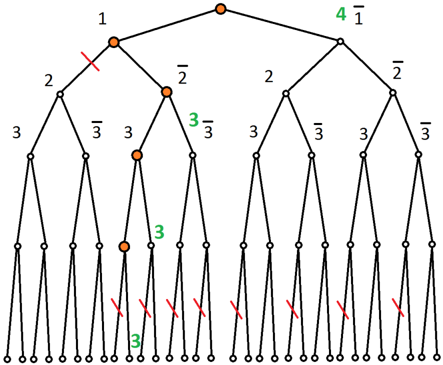


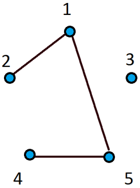
Complexité du Branch and Bound exhaustif



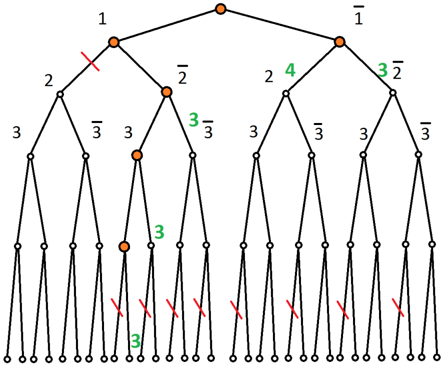


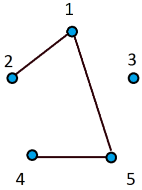
Complexité du Branch and Bound exhaustif

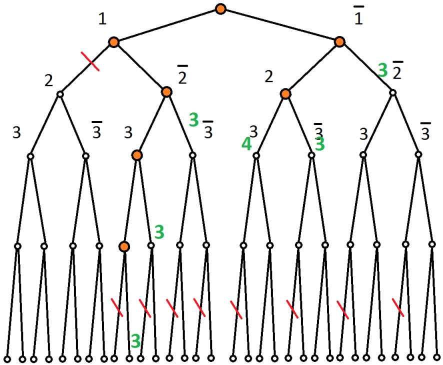


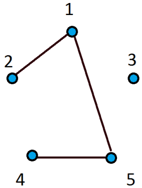


Complexité du Branch and Bound exhaustif

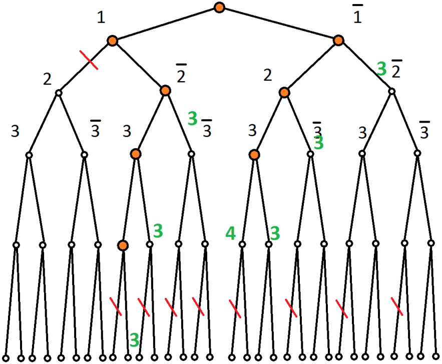


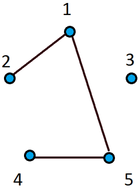



1
$\overline{1}$
2
$\overline{2}$
2
3 $\overline{2}$
3
$\overline{3}$
3
3 $\overline{3}$
3
4
$\overline{3}$
3
3
$\overline{3}$
3
3

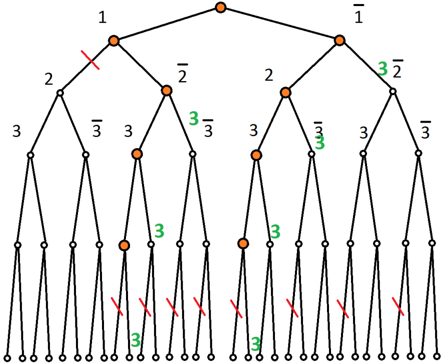

1
2
3
4
5

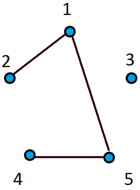
Complexité du Branch and Bound exhaustif

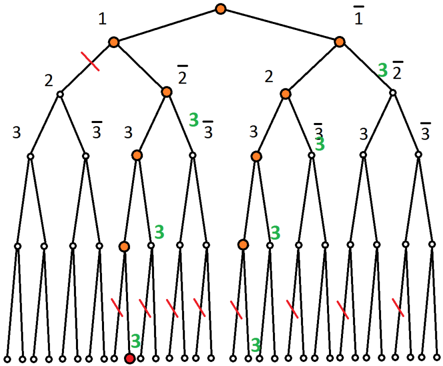


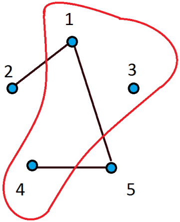


Complexité du Branch and Bound exhaustif






1
$\bar{1}$
2
$\bar{2}$
3
$\bar{3}$
3
3
3


1
2
3
4
5

Étude de la complexité

- Chaque nœud de l'arbre est visité s'il représente un stable et si son potentiel est supérieur ou égal au stable max.
- $\eta_{n,p} \leq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}(1-p)^{\binom{j}{2}} \mathbb{P}(MIS \leq n-i+j)$
- Il existe un stable de taille supérieure ou égale à $\frac{n}{\overline{d}+1}$, $\overline{d}$ représentant le degré moyen des sommets c'est-à-dire $2m/n$.

Étude de la complexité

- Chaque nœud de l'arbre est visité s'il représente un stable et si son potentiel est supérieur ou égal au stable max.
- $\eta_{n,p} \leq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}(1-p)^{\binom{j}{2}} \mathbb{P}(MIS \leq n-i+j)$
- Il existe un stable de taille supérieure ou égale à $\frac{n}{\overline{d}+1}$, $\overline{d}$ représentant le degré moyen des sommets c'est-à-dire $2m/n$.

Étude de la complexité

- Chaque nœud de l'arbre est visité s'il représente un stable et si son potentiel est supérieur ou égal au stable max.
- $\eta_{n,p} \leq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}(1-p)^{\binom{j}{2}} \mathbb{P}(MIS \leq n-i+j)$
- Il existe un stable de taille supérieure ou égale à $\frac{n}{\overline{d}+1}$, $\overline{d}$ représentant le degré moyen des sommets c'est-à-dire $2m/n$.

Étude de la complexité

- Chaque nœud de l'arbre est visité s'il représente un stable et si son potentiel est supérieur ou égal au stable max.
- $\eta_{n,p} \leq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}(1-p)^{\binom{j}{2}} \mathbb{P}(MIS \leq n-i+j)$
- Il existe un stable de taille supérieure ou égale à $\frac{n}{\overline{d}+1}$, $\overline{d}$ représentant le degré moyen des sommets c'est-à-dire $2m/n$.

Résultats sur la complexité

3 cas :

- $n \times p \to 0$, $\eta_{n,p}$ est sous exponentiel.
- $n \times p \to \alpha > 0$, $\eta_{n,p}$ est exponentiel (max 1.867^n).
- $n \times p \to \infty$, $\eta_{n,p}$ est sous exponentiel.

Résultats sur la complexité

3 cas :

- $n \times p \to 0$, $\eta_{n,p}$ est sous exponentiel.
- $n \times p \to \alpha > 0$, $\eta_{n,p}$ est exponentiel (max 1.867^n).
- $n \times p \to \infty$, $\eta_{n,p}$ est sous exponentiel.

Résultats sur la complexité

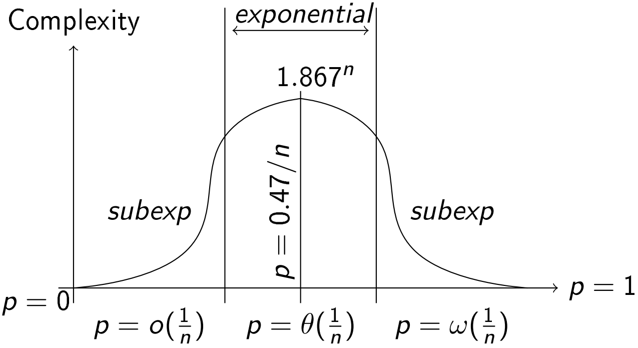
3 cas :

- $n \times p \to 0$, $\eta_{n,p}$ est sous exponentiel.
- $n \times p \to \alpha > 0$, $\eta_{n,p}$ est exponentiel (max 1.867^n).
- $n \times p \to \infty$, $\eta_{n,p}$ est sous exponentiel.

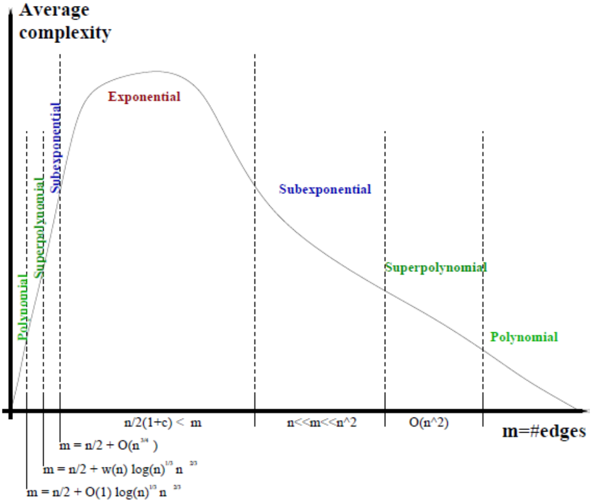
Résultats sur la complexité

3 cas :

- $n \times p \to 0$, $\eta_{n,p}$ est sous exponentiel.
- $n \times p \to \alpha > 0$, $\eta_{n,p}$ est exponentiel (max 1.867^n).
- $n \times p \to \infty$, $\eta_{n,p}$ est sous exponentiel.


Complexity
exponential
1.867^n
p = 0.47/n
subexp
subexp
p = 0
p = 1
p = o(1/n)
p = θ(1/n)
p = ω(1/n)

Comparaison avec les résultats de Cyril (et al.)



Comparaison avec les résultats de Cyril (et al.)

- Exponentiel lorsque m est de l'ordre de n.
- Plus de précision sur les changements de complexité dans les travaux de Cyril.
- Caveat : les distributions sont différentes (même quand $n \to \infty$).

Comparaison avec les résultats de Cyril (et al.)

- Exponentiel lorsque m est de l'ordre de n.
- Plus de précision sur les changements de complexité dans les travaux de Cyril.
- Caveat : les distributions sont différentes (même quand $n \to \infty$).

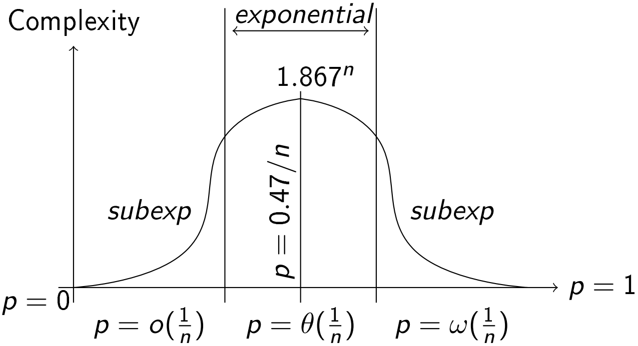
Comparaison avec les résultats de Cyril (et al.)

- Exponentiel lorsque m est de l'ordre de n.
- Plus de précision sur les changements de complexité dans les travaux de Cyril.
- Caveat : les distributions sont différentes (même quand $n \to \infty$).

Comparaison avec les résultats de Cyril (et al.)

- Exponentiel lorsque m est de l'ordre de n.
- Plus de précision sur les changements de complexité dans les travaux de Cyril.
- Caveat : les distributions sont différentes (même quand $n \to \infty$).

voilà voilà ...



Complexity
exponential
1.867^n
$p = 0.47/n$
subexp
subexp
$p = 0$
$p = 1$
$p = o(\frac{1}{n})$
$p = \theta(\frac{1}{n})$
$p = \omega(\frac{1}{n})$

Questions