Factorisation de Schützenberger, Structures libres combinatoires et Bases duales

Matthieu Deneufchâtel, G. H. E. Duchamp et H. N. Minh

Laboratoire d'Informatique de Paris Nord,
Université Paris 13

Séminaire CIP, 18 octobre 2011

Plan

Si $Y = (y_i)_{i \in I}$ est une famille totalement ordonnée dans une algèbre $\mathfrak{A}$ (associative avec unité) et $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$,

$$Y^{\alpha} = y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} y_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdots y_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$$

pour tout $J = \{i_1, i_2 \cdots i_k\}$, $i_1 > i_2 > \cdots > i_k$ tel que $\mathrm{supp}(\alpha) \subset J$.

En particulier, si $(e_i)_{i \in I}$ désigne la base canonique de $\mathbb{N}^{(I)}$, on a $Y^{e_i} = y_i$.

Remarque : $>$ pour les mots de Lyndon.

Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie et $B = (b_i)_{i \in I}$ une base ordonnée (par un ordre total sur I $<$) de $\mathfrak{g}$.

Poincaré-Birkhoff-Witt

Les éléments

$$B^\alpha,\ \alpha = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_p}) \text{ with } i_1 > \cdots > i_p,$$

forment une base de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ (appelée *base de PBW*).

Rappels : $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Base de PBW de $k\langle X\rangle$:

$$P_w = \begin{cases} x_i \text{ si } w = x_i; \\ [l_1, l_2] \text{ si } w \in \mathrm{Lyn}(X) \text{ de factorisation standard } l_1 l_2; \\ P_{l_{i_1}}^{\alpha_1} \ldots P_{l_{i_k}}^{\alpha_k} \text{ si } w = l_{i_1}^{\alpha_1} \ldots l_{i_k}^{\alpha_k},\ l_{i_1} > \cdots > l_{i_k}. \end{cases}$$

Rappels : $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Base de PBW de $k\langle X\rangle$:

$$P_w = \begin{cases} x_i \text{ si } w = x_i; \\ [P_{l_1}, P_{l_2}] \text{ si } w \in \mathrm{Lyn}(X) \text{ de factorisation standard } l_1 l_2; \\ P_{l_{i_1}}^{\alpha_1} \ldots P_{l_{i_k}}^{\alpha_k} \text{ si } w = l_{i_1}^{\alpha_1} \ldots l_{i_k}^{\alpha_k},\ l_{i_1} > \cdots > l_{i_k}. \end{cases}$$

Base S :

$$S_w = \begin{cases} w & \text{si } |w| = 1; \\ xS_u & \text{si } w = xu \text{ et } w \text{ est un mot de Lyndon}; \\ \dfrac{S_{l_{i_1}}^{ш\alpha_1} \ldots S_{l_{i_k}}^{ш\alpha_k}}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} & \text{si } w = l_{i_1}^{\alpha_1} \ldots l_{i_k}^{\alpha_k}. \end{cases}$$

Rappels : $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Base de PBW de $k\langle X\rangle$:

$$P_w = \begin{cases} x_i \text{ si } w = x_i; \\ [l_1, l_2] \text{ si } w \in \mathrm{Lyn}(X) \text{ de factorisation standard } l_1 l_2; \\ P_{l_{i_1}}^{\alpha_1} \ldots P_{l_{i_k}}^{\alpha_k} \text{ si } w = l_{i_1}^{\alpha_1} \ldots l_{i_k}^{\alpha_k},\ l_{i_1} > \cdots > l_{i_k}. \end{cases}$$

Base S :

$$S_w = \begin{cases} w & \text{si } |w| = 1; \\ xS_u & \text{si } w = xu \text{ et } w \text{ est un mot de Lyndon}; \\ \dfrac{S_{l_{i_1}}^{ш\alpha_1} \ldots S_{l_{i_k}}^{ш\alpha_k}}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} & \text{si } w = l_{i_1}^{\alpha_1} \ldots l_{i_k}^{\alpha_k}. \end{cases}$$

On peut montrer que cette base $(S_w)_w$ est duale de $(P_w)_w$ pour le produit scalaire $< S|P >= \sum_{w \in X^*} \langle S|w\rangle\langle P|w\rangle$.

Rappels : $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Base de PBW de $k\langle X\rangle$:

$$P_w = \begin{cases} x_i \text{ si } w = x_i; \\ [P_{l_1}, P_{l_2}] \text{ si } w \in \mathrm{Lyn}(X) \text{ de factorisation standard } l_1 l_2; \\ P_{l_{i_1}}^{\alpha_1} \ldots P_{l_{i_k}}^{\alpha_k} \text{ si } w = l_{i_1}^{\alpha_1} \ldots l_{i_k}^{\alpha_k},\ l_{i_1} > \cdots > l_{i_k}. \end{cases}$$

Base S :

$$S_w = \begin{cases} w & \text{si } |w| = 1; \\ xS_u & \text{si } w = xu \text{ et } w \text{ est un mot de Lyndon}; \\ \dfrac{S_{l_{i_1}}^{ш\alpha_1} \ldots S_{l_{i_k}}^{ш\alpha_k}}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} & \text{si } w = l_{i_1}^{\alpha_1} \ldots l_{i_k}^{\alpha_k}. \end{cases}$$

Factorisation de Schützenberger :

$$\sum_{w \in X^*} w \otimes w = \prod_{l \in \mathrm{Lyn}(X)}^{\searrow} \exp(S_l \otimes P_l).$$

(produit : ш à gauche et concaténation à droite).

Objectif : Donner un cadre général dans lequel l'égalité

$$\sum_{w \in W} w \otimes w = \prod_{i \in I}^{\rightarrow} \exp(S_i \otimes P_i)$$

où $(P_i)_{i \in I}$ et $(S_i)_{i \in I}$ sont deux bases en dualité.

Problème : Somme et produit infinis $\rightarrow$ Quelle topologie ?

Plan

Soit I un ensemble et $\leq$ une relation d'ordre sur I.

On dit que $\leq$ est filtrante croissante si toute paire $\{i_1, i_2\}$ de I (et donc toute partie finie) a un majorant.
Dans ce cas, I est dit filtrant croissant.

Si X est un espace topologique, on appelle famille filtrante (ou suite généralisée) une application $i : I \to X$.

On notera aussi $(x_i)_{i \in I}$ une famille filtrante.

Soit $(y_i)_{i\in I}$ une famille filtrante dans un espace topologique X et $x \in X$.

On dit que $(y_i)_{i\in I}$ converge vers x dans X ssi

$$\forall U \text{ voisinage de } x,\ \exists N \in I,\ \forall i > N,\ y_i \in U.$$

Application : Soit V un espace vectoriel muni de la topologie discrète et I un ensemble filtrant croissant.
On munit $\mathrm{End}(V)$ de la topologie de la convergence simple.

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille filtrante et $g \in \mathrm{End}(V)$. La famille $(f_i)_{i\in I}$ converge vers g ssi

$$\forall v \in V,\ \exists N \in I,\ \forall i \geq N,\ f_i(v) = g(v).$$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante. Munissons $\mathrm{End}_k(\mathscr{U}(\mathfrak{g}))$ de la topologie de la convergence simple.

Famille sommable : Ensemble filtrant croissant : $(\mathfrak{P}^{\mathrm{finie}}(I), \subset)$.

Soit $f = (f_i)_{i \in I}$, $f_i \in \mathrm{End}_k(\mathscr{U}(\mathfrak{g}))$ et $g \in \mathrm{End}_k(\mathscr{U}(\mathfrak{g}))$.

La famille f est dite sommable ssi

$$\left(S_F = \sum_{j \in F} f_j\right)_{F \subset_{\mathrm{finie}} I} \quad \text{converge vers } g \in \mathrm{End}_k(\mathscr{U}(\mathfrak{g})).$$

Ceci se traduit par

$$\forall b \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}),\ \exists F \subset_{\mathrm{finite}} I,\ \forall F',\ F \subset F' \subset_{\mathrm{finite}} I \Longrightarrow \left(\sum_{j \in F'} f_j\right)(b) = g(b).$$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante. Munissons $\mathrm{End}_k(\mathscr{U}(\mathfrak{g}))$ de la topologie de la convergence simple.

Famille multipliable : On suppose I totalement ordonné.

Ensemble filtrant croissant : $(\mathfrak{P}^{\mathrm{finie}}(I), \subset)$.

Soit $f = (f_i)_{i\in I}$, $f_i \in \mathrm{End}_k(\mathscr{U}(\mathfrak{g}))$ et $g \in \mathrm{End}_k(\mathscr{U}(\mathfrak{g}))$.

La famille f est dite multipliable ssi

$$\left(M_F = \prod_{j\in F}^{\rightarrow} f_j \right)_{F \subset_{\mathrm{finie}} I} \quad \text{converge vers } g \in \mathrm{End}_k(\mathscr{U}(\mathfrak{g})).$$

Ceci se traduit par

$$\forall b \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}),\ \exists F \subset_{\mathrm{finite}} I,\ \forall F',\ F \subset F' \subset_{\mathrm{finite}} I \Longrightarrow \left(\prod_{j\in F'}^{\rightarrow} f_j \right)(b) = g(b)).$$

Théorème

Soit k un corps de caractéristique nulle, $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie, $B = (b_i)_{i \in I}$ une base ordonnée de $\mathfrak{g}$ et $(B^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ la base PBW associée.

Notons $(S_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ la famille duale (ce sont des formes linéaires) de $(B^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ dans $\mathscr{U}^*$. La résolution de l'identité $Id_{\mathscr{U}}$ suivante est alors valable

$$Id_{\mathscr{U}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes B^\alpha = \prod_{i \in I}^{\rightarrow} \exp\left(S_{e_i} \otimes B^{e_i}\right).$$

Remarque : les tenseurs sont identifiés à des endomorphismes de rang 1 via

$$\phi : \begin{cases} V^* \otimes V \to \mathrm{End}^{\mathrm{fini}}(V) \\ f \otimes v \mapsto \big(y \mapsto f(y)v\big) \end{cases}.$$

Plan

Soit X un ensemble et $R \subset X^* \times X^*$.

On dit que w_a et $w_b \in X^*$ sont $R^{\text{élém}}$-équivalents ssi $w_a = pu_is$ et $w_b = pv_is$ pour $p, s \in X^*$ et $\{(u_i, v_i) \in R \text{ ou } (v_i, u_i) \in R\}$.

On dit que w_a et $w_b \in X^*$ sont R-équivalents ssi il existe $w_0 = w_a, w_2, \dots, w_p = w_b$ tels que $w_{i-1} R^{\text{élém}} w_i, 1 \leq i \leq p$.

Définition

On définit $\langle X, R\rangle$ comme le quotient $X^*/ \equiv_R$.

Soit X un ensemble et $\theta \subset X \times X$.

Définition

On appelle *monoïde libre partiellement commutatif*, noté $M(X,\theta)$, le monoïde défini par générateurs et relations comme

$$M(X,\theta) = \langle X, \{(xy, yx)\}_{(x,y)\in\theta} \rangle_{\mathrm{Mon}}.$$

Soit X un ensemble et $\theta \subset X \times X$.

Définition

On appelle *monoïde libre partiellement commutatif*, noté $M(X,\theta)$, le monoïde défini par générateurs et relations comme

$$M(X,\theta) = \langle X, \{(xy, yx)\}_{(x,y)\in\theta} \rangle_{\mathrm{Mon}}.$$

En termes de catégories : si X est un ensemble, M un monoïde et $\phi : X \to M$ une application telle que $\forall (x,y) \in \theta$, $\phi(x)\phi(y) = \phi(y)\phi(x)$, il existe une unique application $\bar{\phi}$ telle que le diagramme suivant commute :

Catégorie des “ensembles“ | Catégorie des monoïdes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[drr, "s_X"'] & & M \\ & & M(X,\theta) \arrow[u, "\bar{\phi}"'] \end{tikzcd}$$

On définit[1] aussi l'algèbre libre partiellement commutative $k\langle X, \theta\rangle$.

Elle est solution d'un problème universel : si X est un ensemble, $\mathcal{A}$ une k-algèbre $\phi : X \to \mathcal{A}$ une application telle que

$$\forall (x, y) \in \theta,\ \mu_{\mathcal{A}}(x, y) = \mu_{\mathcal{A}}(y, x),$$

il existe une unique application $\bar{\phi}$ telle que le diagramme ci-dessous commute :

Category of Sets Category of $k -$ Algebras

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[drr, "s_X"'] & & \mathcal{A} \\ & & k\langle X, \theta\rangle \arrow[u, "\bar{\phi}"'] \end{tikzcd}$$

1. G. H. E. Duchamp, D. Krob, *Free Partially Commutative Structures*, **J. of Algebra** 156(2), 1993

Théorème

$$k\langle X, \theta\rangle \cong k\left[M(X,\theta)\right].$$

Par conséquent, nous pouvons identifier les éléments de l'algèbre du monoïde partiellement commutatif avec les polynômes partiellement commutatif :

$$\forall P \in k\left[M(X,\theta)\right],\ P = \sum_{m \in M(X,\theta)} \langle P|m\rangle m.$$

Par la théorie des catégories :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, "j_X^{k-\mathrm{alg}}"'] & k\left[M(X,\theta)\right] \\ & k\langle X,\theta\rangle \arrow[u, "\bar{\phi}_1"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "j_X^{\mathrm{Mon}}"'] & k\langle X,\theta\rangle \\ & M(X,\theta) \arrow[u, "\phi_2"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M(X,\theta) \arrow[r] \arrow[dr, "s_{M(X,\theta)}"'] & k\langle X,\theta\rangle \\ & k\left[M(X,\theta)\right] \arrow[u, "\bar{\phi}_2"'] \end{tikzcd}$$

Par la théorie des catégories :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, "j_X^{k-\mathrm{alg}}"'] & k\left[M(X,\theta)\right] \\ & k\langle X,\theta\rangle \arrow[u, "\bar{\phi}_1"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "j_X^{\mathrm{Mon}}"'] & k\langle X,\theta\rangle \\ & M(X,\theta) \arrow[u, "\phi_2"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M(X,\theta) \arrow[r] \arrow[dr, "s_{M(X,\theta)}"'] & k\langle X,\theta\rangle \\ & k\left[M(X,\theta)\right] \arrow[u, "\bar{\phi}_2"'] \end{tikzcd}$$

$$\bar{\phi}_1 \circ \bar{\phi}_2 = \mathrm{Id}_{k[M(X,\theta)]}$$

et

$$\bar{\phi}_2 \circ \bar{\phi}_1 = \mathrm{Id}_{k\langle X,\theta\rangle}$$

donc $\bar{\phi}_1$ et $\bar{\phi}_2$ sont deux isomorphismes.

On a aussi une algèbre de Lie libre partiellement commutative $\mathscr{L}_k(X,\theta)$.

On montre que $k\langle X,\theta\rangle = \mathscr{U}(\mathscr{L}_k(X,\theta))$.

On peut aussi définir $\mathrm{Lyn}(X,\theta)$ puis les bases $(P_l)_{l\in\mathrm{Lyn}(X,\theta)}$ et $(S_l)_{l\in\mathrm{Lyn}(X,\theta)}$.

Finalement,

$$\sum_{w\in M(X,\theta)} w\otimes w = \prod_{l\in\mathsf{Lyn}(X,\theta)}^{\searrow} \exp(S_l\otimes P_l).$$

Plan

Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie et $B = (b_i)_{i \in I}$ une base ordonnée de $\mathfrak{g}$ (ordre total $<$).

Poincaré-Birkhoff-Witt

Les éléments

$$B^\alpha,\ \alpha = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_p}) \text{ with } i_1 > \cdots > i_p,$$

forment une base de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ (appelée base de PBW).

Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie et $B = (b_i)_{i \in I}$ une base ordonnée de $\mathfrak{g}$ (ordre total $<$).

Poincaré-Birkhoff-Witt

Les éléments

$$B^\alpha,\ \alpha = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_p}) \text{ with } i_1 > \cdots > i_p,$$

forment une base de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ (appelée base de PBW).

Considérons la base duale de $(B^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$, notée $(S_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ et définie par :

$$\langle S_\alpha | B^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

Attention : C'est une base du sous-espace de $\mathscr{U}^*(\mathfrak{g})$ des formes linéaires sur $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ à support fini sur la base $(B^\alpha)_\alpha$ et non de $\mathscr{U}^*(\mathfrak{g})$ complet.

On a

$$\begin{aligned}
S_\alpha * S_\beta &= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha * S_\beta | B^\gamma \rangle S^\gamma \\
&= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \otimes S_\beta | \Delta(B^\gamma) \rangle^{\otimes 2} S^\gamma \\
&= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \otimes S_\beta | \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma} \frac{\gamma!}{\gamma_1! \, \gamma_2!} B^{\gamma_1} \otimes B^{\gamma_2} \rangle^{\otimes 2} S^\gamma \\
&= \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \, \beta!} S_{\alpha + \beta}.
\end{aligned}$$

Une famille $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ de formes linéaires sur $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ vérifiant

$$T_\alpha \star T_\beta = T_{\alpha+\beta},\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}^{(I)},$$

est appelée base de Radford (Attention : ce n'est pas une base).

$T_\alpha = \alpha! S_\alpha$ est donc une base de Radford.

Ainsi, PBW $\Rightarrow$ Radford.

Question : Radford $\Rightarrow$ *PBW* ?

Partons d'une famille $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ multiplicative au sens précédent.

S'il existe une famille duale $(B^{[\alpha]})_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ étiquetée par des multi-indices

considérons les "grains" $B^{[e_i]}, i \in \mathbb{N}$ qui forment une base de $\mathfrak{g}$,

puis les produits de ces éléments :

$$\tilde{B}^\alpha = \prod_{i \in \mathrm{supp}(\alpha)} B^{[e_i]}.$$

qui forment une base de PBW.

Partons d'une famille $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ multiplicative au sens précédent.

S'il existe une famille duale $(B^{[\alpha]})_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ étiquetée par des multi-indices

considérons les "grains" $B^{[e_i]}, i \in \mathbb{N}$ qui forment une base de $\mathfrak{g}$,

puis les produits de ces éléments :

$$\tilde{B}^\alpha = \prod_{i \in \operatorname{supp}(\alpha)} B^{[e_i]}.$$

qui forment une base de PBW.

Question : A-t-on / Dans quel(s) cas

$$B^{[\alpha]} = \tilde{B}^\alpha ?$$