

# RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

---

Davide Barbarossa

Dipartimento di Informatica,  
Università di Bologna (Italie)

[davide.barbarossa@unibo.it](mailto:davide.barbarossa@unibo.it)

<https://lipn.univ-paris13.fr/~barbarossa/index.html>

Journée interdisciplinaire "Logique, Langage et Computation :  
Autour de la logique linéaire et ses interfaces"

10/11/2023

Lyon, France

# RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

---

"Les mathématiques sont un **savoir-faire**, que j'oppose à un savoir.  
Un savoir-faire ça se transmet, c'est un geste détaché de toute affectivité.  
Le savoir est, à chaque époque, le **discours**, l'idéologie, que l'on fait autour du savoir-faire."

Pierre Cartier, [14ème conférence de l'Université de tous les savoirs](#)



# RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

---

"Les mathématiques sont un **savoir-faire**, que j'oppose à un savoir.  
Un savoir-faire ça se transmet, c'est un geste détaché de toute affectivité.  
Le savoir est, à chaque époque, le **discours**, l'idéologie, que l'on fait autour du savoir-faire."

Pierre Cartier, [14ème conférence de l'Université de tous les savoirs](#)

MATHS (Kevin Buzzard, [XenaProject](#))

- Énoncés vrais/faux
- Preuves
- Définitions
- Idées

# RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

---

"Les mathématiques sont un **savoir-faire**, que j'oppose à un savoir.  
Un savoir-faire ça se transmet, c'est un geste détaché de toute affectivité.  
Le savoir est, à chaque époque, le **discours**, l'idéologie, que l'on fait autour du savoir-faire."

Pierre Cartier, [14ème conférence de l'Université de tous les savoirs](#)

MATHS (Kevin Buzzard, [XenaProject](#))

- Énoncés vrais/faux
- Preuves
- Définitions
- Idées

LOGIQUE

- Étude du langage et du raisonnement

# RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

---

"Les mathématiques sont un **savoir-faire**, que j'oppose à un savoir.  
Un savoir-faire ça se transmet, c'est un geste détaché de toute affectivité.  
Le savoir est, à chaque époque, le **discours**, l'idéologie, que l'on fait autour du savoir-faire."

Pierre Cartier, [14ème conférence de l'Université de tous les savoirs](#)

MATHS (Kevin Buzzard, [XenaProject](#))

- Énoncés vrais/faux
- Preuves
- Définitions
- Idées

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

- Étude mathématique du langage et du raisonnement mathématique

# RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

"Les mathématiques sont un **savoir-faire**, que j'oppose à un savoir.  
Un savoir-faire ça se transmet, c'est un geste détaché de toute affectivité.  
Le savoir est, à chaque époque, le **discours**, l'idéologie, que l'on fait autour du savoir-faire."

Pierre Cartier, [14ème conférence de l'Université de tous les savoirs](#)

MATHS (Kevin Buzzard, [XenaProject](#))

- Énoncés vrais/faux
- Preuves
- Définitions
- Idées

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

- Étude mathématique du langage et du raisonnement mathématique

On a besoin d'un  
FORMAT pour  
représenter le langage  
et le raisonnement !

# RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

"Les mathématiques sont un **savoir-faire**, que j'oppose à un savoir.  
Un savoir-faire ça se transmet, c'est un geste détaché de toute affectivité.  
Le savoir est, à chaque époque, le **discours**, l'idéologie, que l'on fait autour du savoir-faire."

Pierre Cartier, [14ème conférence de l'Université de tous les savoirs](#)

MATHS (Kevin Buzzard, [XenaProject](#))

- Énoncés vrais/faux
- Preuves
- Définitions
- Idées

LOGIQUE TRANSCENDENTALE

- Étude philosophique des concepts, objets, intuitions mathématiques

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

- Étude mathématique du langage et du raisonnement mathématique

On a besoin d'un  
**FORMAT** pour  
représenter le langage  
et le raisonnement !

# RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

"I am not here insisting on the exigency of "foundations" as locus of certainty, but rather on the necessity of the analysis of conceptual and cognitive roots, of structures of sense as correlations, tracing their constitutive and historical path [...]."

Giuseppe Longo, 2015, [Reflexions](#) sur  
"Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics" de F. Zalamea

MATHS (Kevin Buzzard, [XenaProject](#))

- Énoncés vrais/faux
- Preuves
- Définitions
- Idées

LOGIQUE TRANSCENDENTALE

- Étude philosophique des concepts, objets, intuitions mathématiques

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

- Étude mathématique du langage et du raisonnement mathématique

On a besoin d'un  
FORMAT pour  
représenter le langage  
et le raisonnement !

# ORGANISATION DU CADRE FONDATIONNEL DES MATHÉMATIQUES

---

LOGIQUE MATHÉMATIQUE  
FONDAMENTALE

LOGIQUE MATHÉMATIQUE  
TRANSCENDENTALE

"Je ne parle pas de la pensée, je parle de sa trace formelle;  
je ne parle pas de la vie, je parle de l'état civil."

Jean-Yves Girard, [séminaire\\_mamuphi2005](#)

# ORGANISATION DU CADRE FONDATIONNEL DES MATHÉMATIQUES

---

LOGIQUE MATHÉMATIQUE  
FONDAMENTALE

LOGIQUE MATHÉMATIQUE  
TRANSCENDENTALE

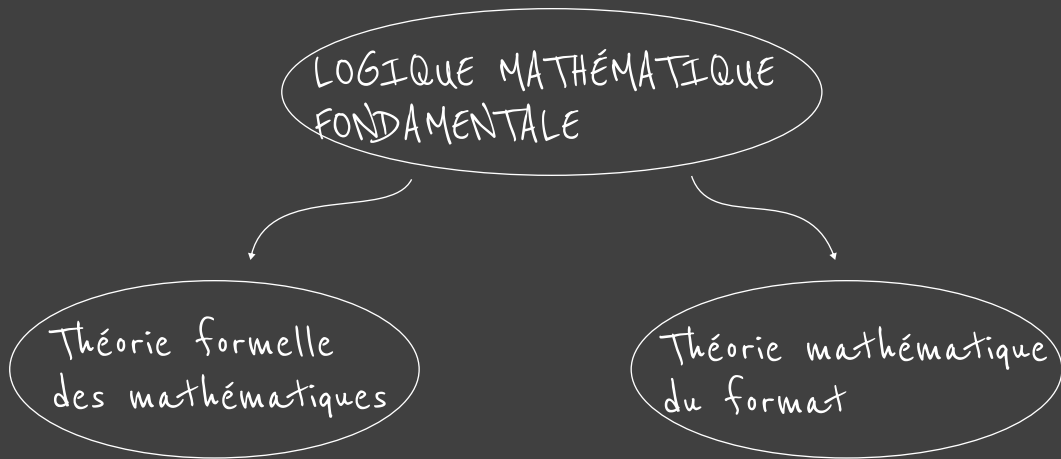
"Je ne parle pas de la pensée, je parle de sa trace formelle;  
je ne parle pas de la vie, je parle de l'état civil."

Jean-Yves Girard, [séminaire\\_mamuphi2005](#)



PB: Comment choisir le format ?

Il faut assumer une thèse "à la Church" qui justifie le choix.



# LOGIQUE MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE

```
graph TD; A([LOGIQUE MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE]) --> B([Théorie formelle des mathématiques]); A --> C([Théorie mathématique du format]);
```

Théorie formelle  
des mathématiques

Mathématiques en tant  
qu'objet formel

Théorie mathématique  
du format

Format en tant  
qu'objet mathématique

# THÉORIE FORMELLE DES MATHÉMATIQUES

---

- Théorie des Modèles et Théories des Ensembles (\*)
- Mathématiques à Rebours
- Théories des Types
- Assistants à la Preuve
- . . .

(\*) historiquement, ça commence par là

# THÉORIE FORMELLE DES MATHÉMATIQUES

---

## Théories des Ensembles VS Théorie de Types ?

"What's even worse, is that in theory the set  $M$  could genuinely represent more than one mathematical object. Perhaps somebody writing the library on natural numbers decided to define  $3$  to be the set  $\{0, 1, 2\}$ , and more generally they defined  $n$  to be the set  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Then someone doing topology defined a topology on a set  $X$  to be a set of subsets of  $X$  satisfying some axioms. It then turns out that  $3$  is a topology on  $2$  (check it! It's really true!)."

Kevin Buzzard, 2020, [xenaproject](#)

# THÉORIE FORMELLE DES MATHÉMATIQUES

---

## Théories des Ensembles VS Théorie de Types ?

"This encoding seems to be not very different than the insight that all structures in computing can be represented as a sequence of 0's and 1's. Indeed, it seems to me that set theory is something like the machine language of mathematics, but it doesn't share the redeeming feature that in computing we need to translate everything in machine language. Mathematics which is a construction of our mind doesn't need a machine language it should rather reflect our basic intuition."

Thorsten Altenkirch, 2023, [Should Type Theory replace Set Theory as the Foundation of Mathematics?](#)

# THÉORIE FORMELLE DES MATHÉMATIQUES

---

## Théories des Ensembles VS Théorie de Types ?

"[...] moving rather far from the foundational issues, as much as set theorists have understood the privileged position of the subject as regards to its ability to formulate mathematics, many in general consider that the subject of foundations is not worth pursuing and are much more interested in the mathematics of infinity. [...] Therefore, not only the working set theorists of today do not see themselves as providing the unique ontological foundation of mathematics, but they do not believe in such a unique foundation and do not claim it even for their own subject."

Mirna Džamonja, 2017, [Set theory and its place in the foundations of mathematics](#)

# LOGIQUE MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE

```
graph TD; A([LOGIQUE MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE]) --> B([Théorie formelle des mathématiques]); A --> C([Théorie mathématique du format]); B --- D[Mathématiques en tant qu'objet formel]; C --- E[Format en tant qu'objet mathématique];
```

Théorie formelle  
des mathématiques

Mathématiques en tant  
qu'objet formel

Théorie mathématique  
du format

Format en tant  
qu'objet mathématique

# THÉORIE MATHÉMATIQUE DU FORMAT

- Depuis l'écriture des *Éléments* d'Euclide (et même avant), la géométrie cherchait à rendre compte de l'espace environnant, à travers la formalisation et l'axiomatisation de la géométrie euclidienne en dimensions 2 ou 3. Le XIX<sup>e</sup> siècle a connu un épanouissement des mathématiques et en particulier de la géométrie. En réponse à la question de l'indépendance des axiomes d'Euclide, et aussi pour des raisons pratiques, de nouvelles géométries furent introduites [...]. À l'époque, on voyait ces géométries non pas comme une palette d'outils mais plutôt comme des modèles fondamentaux répondant à une collection d'axiomes desquels les résultats géométriques devaient se déduire. [...] Le sien [de Felix Klein] est une remise en question de cette vision traditionnelle. Son idée est d'appuyer la géométrie sur la théorie des groupes, et de placer le concept de symétrie (ou transformation) au centre de la géométrie.
- L'objectif est de comparer les différentes géométries apparues au cours du XIX<sup>e</sup> siècle pour en dégager les points de similitude [...] Le programme apparut comme une remise en question de la géométrie et influa très fortement sur son développement et son évolution.
- Il s'agit moins d'une définition que d'une recherche d'esthétique.



# THÉORIE MATHÉMATIQUE DU FORMAT

Reinterprétations d'idées de J.-Y. Girard

---

Historiquement ça vient de la découverte du contenu calculatoire des preuves;  
Aujourd'hui il s'agit essentiellement d'une théorie informatique du format

- -1: le format en tant que  
représentation d'un objet réel

Modèles à la Tarski

- -2: le format en tant que  
objet informatique

BHK, Curry-Howard-Lambek

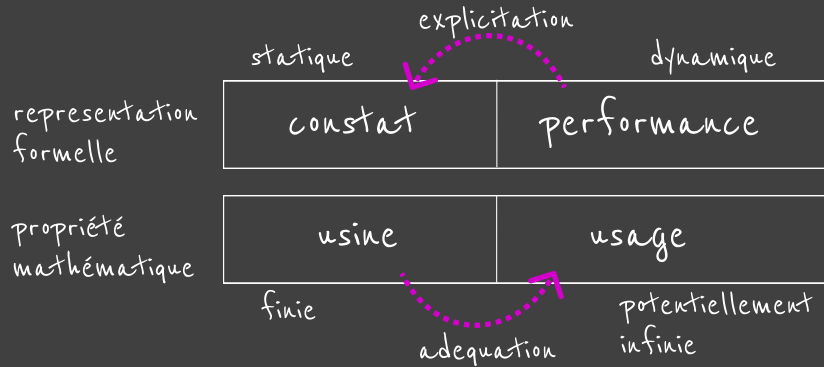
- -3: le format en tant que  
pure objet interactif

LL, Réalisabilités, Sémantiques des jeux, GoI,...

# THÉORIE MATHÉMATIQUE DU FORMAT

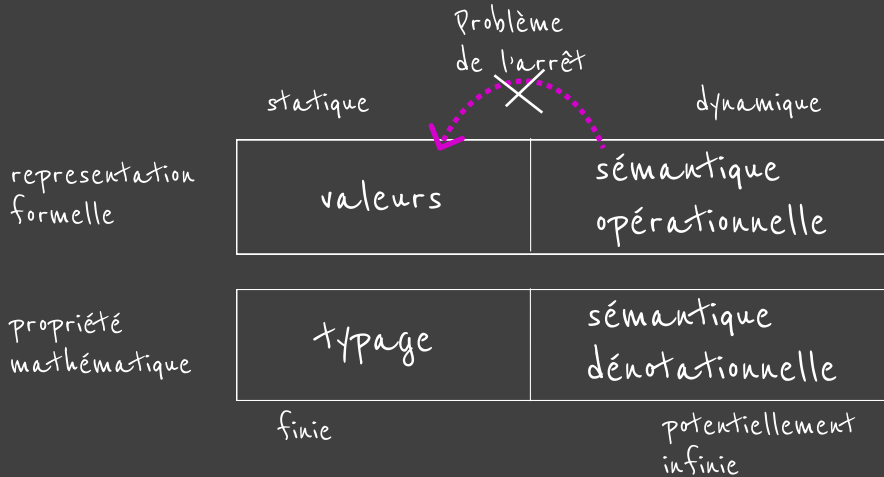
Reinterprétations d'idées de J.-Y. Girard

On s'intéresse aux aspects suivants des objets de la logique mathématique :



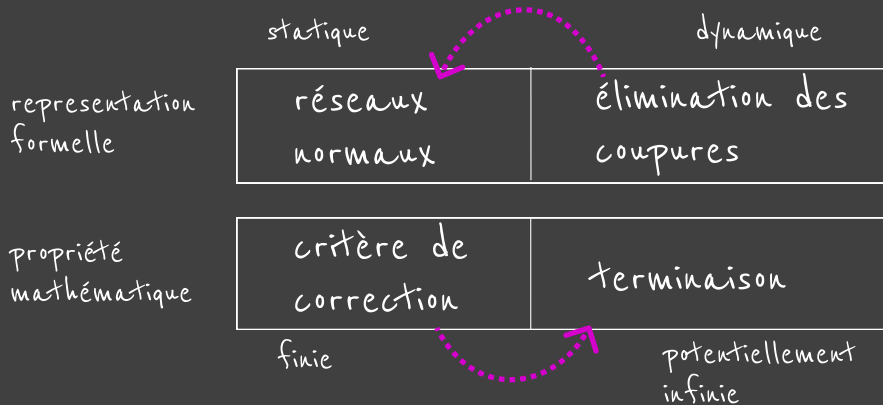
# THÉORIE MATHÉMATIQUE DU FORMAT

On s'intéresse aux aspects suivants d'un langage de programmation :



# THÉORIE MATHÉMATIQUE DU FORMAT

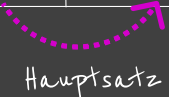
On s'intéresse aux aspects suivants des réseaux de preuves de MLL :



# THÉORIE MATHÉMATIQUE DU FORMAT

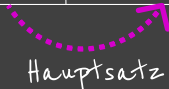
On s'intéresse aux aspects suivants de la notion "A implique B" :

	statique	dynamique
représentation formelle	$\vdash A \rightarrow B$	$A \vdash B$
propriété mathématique	$\pi : A \vdash B$	pour tout $\rho : \vdash A$ , $cut(\rho, \pi)$ termine
	finie	potentiellement infinie


  
Hauptsatz

CALCUL DES SEQUENTS

	statique	dynamique
représentation formelle	$A \vdash B$	$\vdash A \rightarrow B$
propriété mathématique	$x : A \vdash \pi : B$	pour tout $\rho : \vdash A$ , $\vdash (\lambda x. \pi) \rho : B$ termine
	finie	potentiellement infinie


  
Hauptsatz

DÉDUCTION NATURELE

# ORGANISATION DU CADRE FONDATIONNEL DES MATHÉMATIQUES

---

LOGIQUE MATHÉMATIQUE  
FONDAMENTALE

LOGIQUE MATHÉMATIQUE  
TRANSCENDENTALE

"Je ne parle pas de la pensée, je parle de sa trace formelle;  
je ne parle pas de la vie, je parle de l'état civil."

Jean-Yves Girard, [séminaire\\_mamuphi2005](#)

# LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

---

"[...] the task of [Husserl's] transcendental logic is to examine the conditions of possibility of its objectivity, that is, it examines how it has been constituted in its objectivity."

Mirja H. Hartimo, [Formal and Transcendental Logic](#)

"[...] we are not interested in an ontology of the "transcendence" of mathematical objects, but rather in their "transcendental constitution", as the phenomenologist would have it - that is, their constituting through [...] the praxis of life and knowledge internal to mathematics and often [...] located in the interface with other forms of knowledge."

Giuseppe Longo, [Reflexions](#) sur  
"Synthetic Philosophy of Contemporary" Mathematics" de F. Zalamea

# LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

## Esquisse

---

Construction transcendentale Kantienne des maths :

- On peut identifier les formes transcendentales de l'entendement (mathématique) avec les règles logiques. Plus nécessaires mais seulement suffisantes.
- Concepts mathématiques viennent d'une abstraction de l'expérience (pense à l'ensemble vide).
- On applique ces formes transcendentales à ces abstractions.

PB: justifier en quoi cette activité diffère de la métaphysique...



# LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

## Esquisse

---

PB: justifier en quoi cette activité diffère de la métaphysique  
SOL: revisiter le schématisme transcendentale kantien

Schématiser ~ Programmer dans un assistant de preuve

Les maths ne sont pas de la métaphysique que grâce à cela.

"Science is what we understand well enough to explain to a computer.  
Art is everything else we do."

D. Knuth, Foreword to the book [A=B](#)

# LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

## Sur le choix des axiomes

---

Mathématiques pratique (le savoir-faire) = attérnance en boucle de :  
moment synthétique; moment analytique

PB: comment choisir ses nouveaux axiomes ? SOL: ça dépend de l'utilité !

Position du "as-ifm" de E. Landray, 2023, [Mathematics: Method Without Metaphysics](#)

"Proving the undecidability of a statement is not a certificate of principled human fallibility, but a deep insight into the existence of several distinct differentiations of some structure. It is not a fundamental limit to what we can know, but a precious piece of knowledge about a non-property of the structure that we have discovered."

M. Müller, 2021, [Undecidability and unpredictability: not limitations, but triumphs of science](#)

# LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

## Sur la vérité des axiomes

---

Des formules indécidables célèbres:

- Tiers-Exclu dans la logique intuitionniste
- L'induction dans l'arithmétique de Robinson
- Euclide  $\forall$  dans les autres axiomes d'Euclide
- L'axiome de l'infini dans  $\mathbb{Z}$  sauf l'infini
- $\mathcal{C}$  dans ZF
- CH dans ZFC
- Univalence dans HoTT

On dit que certains axiomes sont "vrais" au sens où ils représentent des abstractions de certains aspects de notre expérience.

Cela n'a pas de rapport avec une supposée vérité d'un supposé objet.

"Chercher à savoir si CH est vraie ou fausse relève de la discussion sur le sexe des anges. Le seul véritable (et fort difficile) problème est celui-ci : écrire un programme qui corresponde à CH et comprendre ce qu'il fait."

# LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

## Sur la réalité des objets mathématiques

---

Je propose une allégorie de la caverne inversée:

Du point de vue épistémologique, ce n'est pas la formalisation d'un objet mathématique qui est sa représentation; c'est l'objet mathématique qui est une métaphore du formel.

"La plupart des objets dont les mathématiques parlent sont des *fictions*. Elles sont très utiles, elles permettent un décrochage par rapport à la réalité. Un voyage dans l'imaginaire, dans l'abstrait, qui ensuite permet de revenir dans le concret, mais beaucoup plus loin."

Pierre Cartier, [14ème conférence de l'Université de tous les savoirs](#)

À ne pas oublier:

pas n'importe quelle fiction, mais qu'une qui peut être schématisée !

# LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

## Sur la réalité des objets mathématiques

---

Une position transcendentale devrait nous permettre de trancher sur la vieille question ontologique/épistémologique:

Réalisme ?

- Non (déjà Benacerraf);
- Cependant, les maths usuelles sont faites sous l'hypothèse que les objets soient donnée dans le monde réel (d'où le tiers-exclu de la théorie des modèles): "soit  $G$  un groupe donné..."

Intuitionisme ?

- Oui si au sens de construction mentale transcendentale;
- Cependant, pas forcément de constructivisme.

# Philosophie des fondements des mathématiques

LOGIQUE  
MATHÉMATIQUE  
FONDAMENTALE

Théorie  
formelle des  
mathématiques

Théorie  
mathématique  
du format

LOGIQUE  
MATHÉMATIQUE  
TRANSCENDENTALE

Schématisme

Fictionalisme

Philosophie de la  
pratique des  
mathématiques

LOGIQUE MATHÉMATIQUE  
FONDAMENTALE

Théorie formelle  
des mathématiques

Théorie mathématique  
du format

MERCI !

LOGIQUE MATHÉMATIQUE  
TRANSCENDENTALE

Schématisme

Fictionalisme