Réalisabilité classique et ultrafiltres sur $\mathbb{N}$

Davide Barbarossa

davide94barbarossa@gmail.com

26/06/2018

Directeur: Laurent Regnier

Correspondance de Curry-Howard

Logique	Langage de programmation	Exécution
Intuitionniste	λ-calcul/ preuves intuitionnistes	β-réduction/ cut-elimination
Classique	λ_c-calcul (+ instructions),.../ preuves classiques (+ axiomes)	Krivine Abstract Machine,...

"Réaliser" un axiome A = trouver un (λ_c-)programme t qui justifie A

Notation : $t \Vdash A$

Le but

Axiome de l'ultrafiltre (AU)

Il existe un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$

Définition

Un ensemble $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ est dit ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$ ssi $\forall A, B \subseteq \mathbb{N}$,

$$\varnothing \notin \mathcal{U}$$

$$\mathcal{U} \ni A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{U}$$

$$A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$$

$$A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{U}.$$

Théorème

$$\mathrm{AU} \vdash A \Rightarrow \exists \theta \text{ programme t.q. } \theta \Vdash A$$

Algèbre de réalisabilité = abstraction de la notion de programme

Programmes de SR_0

$\Lambda := \Lambda_c$, $\Pi := \Pi_c$, $\Lambda \star \Pi := \Lambda_c \times \Pi_c$, où
$\Lambda_c ::= \ x \mid \mathsf{callcc}, \ldots \mid \kappa_\pi \mid (t)u \mid \lambda x t$, avec $\pi \in \Pi_c,\ t, u \in \Lambda_c$
$\Pi_c ::= \ \alpha \mid t.\pi$, avec $t \in \Lambda_c,\ \pi \in \Pi_c$.

KAM pour SR_0

$$\begin{aligned}
&\text{(push)} && (t)u \star \pi \succ t \star u.\pi\,;\\
&\text{(grab)} && \lambda x t \star u.\pi \succ t[u/x] \star \pi\,;\\
&\text{(save)} && \mathsf{callcc} \star t.\pi \succ t \star \kappa_\pi.\pi\,;\\
&\text{(restore)} && \kappa_\pi \star t.\rho \succ t \star \pi.
\end{aligned}$$

Interprétations de réalisabilité

Sémantique de réalisabilité

On se donne un segment initial $\perp\!\!\!\perp \subseteq \Lambda \star \Pi$ et on définit $\|.\|$ et $\Vdash$ par :

$$\|A \to B\| := \{\xi \in \Lambda \text{ t.q. } \xi \Vdash A\}.\|B\| \subseteq \Pi$$

$$\|\forall x A\| := \bigcup_{a \in M} \|A[a/x]\| \subseteq \Pi$$

$$\ldots$$

$$\xi \Vdash A \Leftrightarrow \forall \pi \in \|A\|,\ \xi \star \pi \in \perp\!\!\!\perp, \text{ pour } \xi \in \Lambda$$

Théorème (Lemme d'adéquation)

$$\vdash t : A \ \Rightarrow\ t \Vdash A$$

Sémantique de réalisabilité $\rightsquigarrow$ Modèles à la Tarski

La théorie $\{A \text{ formule t.q. } \exists \theta \in \mathrm{QP} \subseteq \Lambda \text{ t.q. } \theta \Vdash A\}$ est cohérente.
Donc elle admet des modèles à la Tarski, appelés modèles de réalisabilité .

Le forcing

En théorie des ensembles (P. Cohen, 1960)

- Ensemble partialement ordonné de "conditions de forcing" et un filtre G de "bonnes" conditions
- Relation $p \Vdash A$, pour p condition
- Nouveau modèle $\mathfrak{M}[G]$ t.q. $\mathfrak{M}[G] \models A$ ssi $\exists p \in G$ t.q. $p \Vdash A$
- Le choix approprié des conditions permet de forcer des formules fixées (e.g. négation de l'hypothèse du continu)

En réalisabilité classique

Deux langages formels : $\mathscr{F}_0$ (qui permet de parler de la relation de forcing) et $\mathscr{F}_1$ (qui ne le permet pas)

Structure de forcing : P ensemble pré-ordonné de conditions de forcing, $\mathscr{C}$ ensemble de conditions non triviales

Transformation de forcing : $P \times \mathscr{F}_1 \longrightarrow \mathscr{F}_0$, $(p, A) \to p \Vdash A$

Jouer avec le forcing

Internaliser le forcing

- on définit l'algèbre SR_1 moralement par "$\mathrm{SR}_1 := P \times \mathrm{SR}_0$" ($\Lambda_1 := \Lambda_c \times P$, $\Pi_1 := \Pi_c \times P$, mais $⫫_1$ plus compliqué...)
- On définit une interprétation de réalisabilité pour $\mathscr{F}_0$ dans SR_0 et pour $\mathscr{F}_1$ dans SR_1

Proposition

$$\xi \Vdash_0 \mathscr{C}(p) \to A \;\Rightarrow\; (\tilde{\xi}, p) \Vdash_1 A$$

$$(\xi, p) \Vdash_1 A \;\Rightarrow\; \xi' \Vdash_0 \mathscr{C}(p) \to A$$

Observation

À la base il y a une transformation des programmes $(.)^* : \Lambda_c \to \Lambda_c$ *t.q.* t^* *s'exécute comme* t *mais en mode protégée*

Une structure de forcing particulière

La condition de chaîne dénombrable

- Une structure de forcing satisfait la CCD quand "toute" suite "décroissante" de conditions non triviales admet un minorant non trivial
- Les structures de forcing qui la satisfont ont de propriétés intéressantes (beaucoup de travail technique...)

Proposition

On peut définit une structure de forcing dont l'ensemble des conditions est l'ensemble $\mathscr{P}(\Pi_c)^{\mathbb{N}}$ qui satisfait la condition de chaîne dénombrable

Théorème

$$\exists(\theta, p) \in \Lambda_1 \text{ t.q. } (\theta, p) \Vdash_1 \mathrm{AU}$$

Les preuves en analyse nous donnent des programmes !

Théorème

Soit $B = \text{l'axiome de choix dépendant}$. *Alors :*

$$\mathrm{AU}, B \vdash A \;\Rightarrow\; \exists \theta \in \mathrm{QP} \subseteq \Lambda_c \text{ t.q. } \theta \Vdash_0 A$$

Idée de la preuve.

$\mathrm{AU} \vdash B \to A \Rightarrow (\eta, 1) \Vdash_1 B \to A \Rightarrow \eta' \Vdash_0 \mathscr{C}(1) \to B \to A \Rightarrow (\eta')\xi\nu \Vdash_0 A$, pour un $\xi \Vdash_0 \mathscr{C}(1)$ (il existe toujours) et $\nu \Vdash_0 B$ (Krivine). □

Observation

- *Un ultrafiltre* $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ *sur* $\mathbb{N}$ *est dit sélectif ssi pour toute partition* $\{\mathcal{P}_i\}_{i \in I}$ *de* $\mathbb{N}$ *t.q.* $\forall i \in I$, $\mathcal{P}_i \notin \mathcal{U}$, *on a :* $\exists U \in \mathcal{U}$ *t.q.* $\forall i \in I$, $U \cap P_i$ *est un singleton.*
- *On peut aussi supposer que* AU *dit qu'il existe un ultrafiltre sélectif*

C'est la fin !