Bérénice Delcroix-Oger
IMT (Toulouse)

LES ARBRES NON AMBIGUS CONTRE-ATTAQUENT

avec J.-C. Aval (Labri), A. Boussicault (Labri), F. Hivert (LRI) et P. Laborde-Zubieta (Labri)

Journées du GDR IM

Arxiv : 1511.09455 http://math.univ-lyon1.fr/~oger/

Arbre non ambigu (NAT)

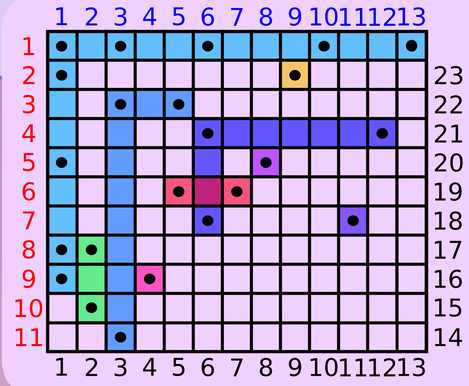
Tableau boisé de forme rectangulaire
Motif interdit

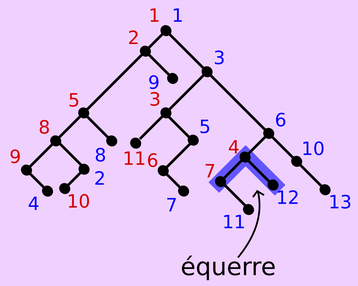
(Aval, Boussicault, Bouvel, Silimbani)

$\Longleftrightarrow$

Arbre binaire dont
- les sommets gauches (resp. droits) et la racine sont étiquetés de manière bijective de 1 à $\nu_G + 1$ (resp. $\nu_R + 1$)
- si un sommet gauche (resp. droit) U est sur le chemin entre un autre sommet gauche (resp. droit) V et la racine, l'étiquette de U est plus petite que celle de V

ν_G = nombre de sommets gauches dans l'arbre
ν_R = nombre de sommets droits dans l'arbre





ABBS

$$\sigma = (1\ 9\ 23\ 8\ 20\ 15\ 2\ 17\ 4\ 16)\ (3\ 7\ 19\ 5\ 22\ 14\ )\ (10)\ (13)\ (6\ 12\ 21\ 11\ 18)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 9 & 17 & 7 & 16 & 22 & 12 & 19 & 20 & 23 & 10 & 18 & 21 & 13 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 15 & 11 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

Équation différentielle

La série génératrice des arbres non ambigus définie par :

$$\mathfrak{N} = \sum_{T \in NAT} \frac{x^{\nu_G(T)} y^{\nu_R(T)}}{\nu_G(T)!\nu_R(T)!}$$

vérifie l'équation suivante :

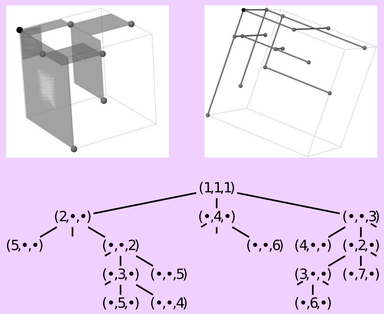
$$\mathfrak{N} = \left(1 + \int_x \mathfrak{N}\right) \times \left(1 + \int_y \mathfrak{N}\right)$$

d'où

$$\mathfrak{N} = \frac{e^{x+y}}{\left(1 - (e^x - 1)(e^y - 1)\right)^2}$$

Dimensions supérieures

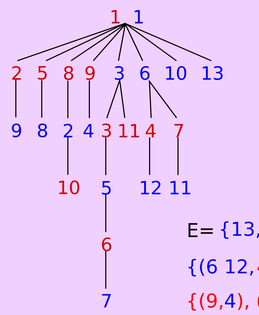
Soit k et n deux entiers.
Une *(n,k)-direction* est un sous-ensemble de {1,...,n} de cardinal k. Un *(n,k)-uplet* est un n-uplet dont k éléments sont des entiers et dont n-k éléments sont • . Le sous-ensemble des positions des éléments entiers est la direction du (n,k)-uplet. Un *arbre (n,k)-aire* est un arbre dont les fils sont indexés par une (n,k)-direction.

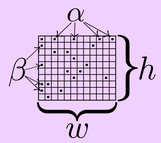


Un *arbre non ambigu* de dimension (n,k) est un arbre (n,k)-aire étiqueté tel que :
- un fils de direction d est étiqueté par un (n,k)-uplet de direction d, la racine par un (n,n)-uplet,
- pour tout descendant U de V, si la composante ième de U est plus grande que celle de V quand elle lui est comparable
- l'ensemble des composantes ième non nul est un intervalle de minimum 1.

Permutations

excédence = $\sigma(i) \geq i$
inversion (Inv)= $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$
descente= $\sigma(i) > \sigma(i+1)$
indice majeur d'inversion (iMaj)= descentes de σ^{-1}
Les arbres non ambigus sont en bijection avec les permutations dont toutes les excédences sont regroupées "au début" de la permutation. (ABBS)





E= {13, 10}{ }
{(6 12, 4, 11, 7), (3 7, 6, 5, 3 11)}
{(9,4), (8 10,), (5 3), (2 9)}

Bijection avec un arbre plan

Interprétation combinatoire de la solution analytique de l'équation différentielle

$$\mathfrak{N}^{(\alpha,\beta)} = \frac{e^{\alpha x + \beta y}}{\left(1 - (e^x - 1)(e^y - 1)\right)^{\alpha+\beta}}$$

$$= e^{\alpha x} e^{\beta y} e^{-\alpha \ln(1-(e^x-1)(e^y-1))} e^{-\beta \ln(1-(e^x-1)(e^y-1))}$$

$$NAT_{w,h} = \sum_{p \geq 1} p! \cdot (p-1)! S_2(w,p) S_2(h,p)$$

où S_2 est la notation pour les nombres de Stirling de deuxième espèce.

m_R =(13 10 12 11 6 7 5 3 9 8 2 4)
m_L =(9 10 8 5 2 11 6 3 7 4)
↓
σ_R =(1 4 2 3 8 7 9 11 5 6 12 10)
σ_L =(3 2 4 7 10 1 6 9 5 8)

q-formule des équerres

Le mot gauche (resp. droit) de l'arbre est obtenu par une lecture postfixe des sommets gauches (resp. droits) de l'arbre, de gauche à droite (resp. de droite à gauche). La permutation associée est obtenue par réindexation.

Rappelons que :

$$[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q} \text{ et } [n]_q! := \prod_{i=1}^{n} [i]_q$$

Notons $w_S(T) := q_L^{S(\sigma_L(T))} q_R^{S(\sigma_R(T))}$

Nous obtenons la formule des équerres :

$$\sum_{T \in NAT(B)} w_{\text{inv}}(T) = \sum_{T \in NAT(B)} w_{\text{iMaj}}(T) = \frac{|\nu_G(B)|_{q_L}! \cdot |\nu_D(B)|_{q_R}!}{\prod_{U:\text{fils gauche}} [\mathcal{E}_G(U)]_{q_L} \cdot \prod_{U:\text{fils droit}} [\mathcal{E}_D(U)]_{q_R}}$$