Апериодические замощения

Илья Иванов-Погодаев, Алексей Канель-Белов, Иван Митрофанов, Тома Ферник

Этот проект посвящен интересной области математики, связанной с замощениями. Обычно задан некоторый конечный набор плиток (фигур на плоскости), и мы пытаемся замостить плоскость, прикладывая плитки друг к другу так, чтобы между ними не оставалось пустых мест. Типовой задачей является выяснение вопроса, возможно ли замощение с помощью данного набора и какие свойства могут быть или не быть у этого замощения. Для некоторых наборов, например, возможно лишь непериодическое замощение плоскости.

Вам предлагаются задачи разбитые на несколько циклов.

Среди задач встречаются как простые, так и сложные, в том числе есть открытые вопросы, решения которых никто пока не нашел. Будет здорово, если на конференции будет получено продвижение по какому-нибудь такому вопросу.

A Размерность один

Рассмотрим одноразмерные мозаики. *Плитками* тут являются буквы в конечном алфавите, а *краевыми условиями* являются запреты для некоторых букв стоять друг за другом. Обобщая это понятие, можно сказать, что задается конечное число запрещенных слов – конечных последовательностей букв. *Разрешенными* являются слова, не содержащие запрещенных подслов. Аналогом *замощения* является существование бесконечного в обе стороны слова. Нас будет интересовать вопрос, как конечным числом запретов задавать различные структуры слов. Например, запреты aa и bb задают бесконечное периодическое слово с периодом (ab). Ясно, что других разрешенных бесконеных слов с данными запретами не может быть.

A.1 Пусть задано множество S бесконечных слов в алфавите $\{a, b\}$: это слова содержащие одну, две или три буквы b подряд, а остальные буквы a (при этом серий букв b может быть сколько угодно). Верно ли что существует конечный набор запрещенных слов, задающих множество S?

A.2 Посчитайте минимальное необходимое число запретов, чтобы задать следующие периодические последовательности, указаны их периоды: (ab), (aab), $(aabaabab)$, $(aabaababaabaababaabab)$.

A.3 Рассмотрим множеств бесконечных слов в алфавите $\{a, b\}$. Обозначим через a^n слово, где буква a написана n раз подряд. Существует ли конечный набор запрещеных слов, такой что разрешенными словами являются все слова не содержащие кусков ba^nb для различных n и только они?

A.4 Пусть теперь разрешено раскрашивать буквы в конечное число цветов, то есть, например, a_1b может быть запрещенным словом, а a_2b уже нет. Можно ли теперь задать конечное число запрещенных слов так, чтобы разрешенными были все слова не содержащие кусков ba^nb (где в качестве букв a и b могут встречаться любые их оттенки) и только они?

A.5 Пусть множество S состоит из бесконечных слов, содержащих подряд серии лишь из четного количества букв a. Можно ли задать S конечным числом запретов? Изменится ли ответ, если разрешается раскрашивать буквы в конечное число цветов?

A.6 Те же вопросы, если серии состоят из нечетного числа букв a.

A.7 Пусть $u_0 = a$, $u_1 = ab$, $u_{n+2} = u_n u_{n+1}$. Посчитайте необходимое минимальное число запретов, чтобы задать бесконечную периодическую последовательность с периодом u_n.

B Мозаики на плоскости

2D слово это бесконечная квадратная решетка на плоскости, где в каждой клетке может быть написана одна из букв a и b. *Паттерн* это такая же решетка заполненная буквами, но конечная.

B.1 Найдите конечный набор запрещенных паттернов, такой что единственным разрешенным бесконечным замощением является шахматное, где роль белых и черных клеток играют буквы a и b.

B.2 Рассмотрим множество S бесконечных $2D$-слов, таких что любая связная по стороне компонента состоящая из букв b, (вокруг которой расположены только буквы a) состоит из четного числа букв. Можно ли выбрать конечное множество запрещенных паттернов, чтобы разрешенными бесконечными $2D$-словами были только слова из S? Какой будет ответ, если разрешается раскрашивать буквы в конечное число цветов?

B.3 Какой будет ответ в случае нечетных компонент?

B.4 Докажите, что если с помощью плиток можно замостить область включающую круг произвольного размера, то можно замостить и плоскость.

Будем называть *плитками* конечные многоугольники, с помощью которых будем замощать плоскость. Каждый тип плитки можно раскрашивать в конечное число цветов. Таким образом, бесконечные 2D-слова это замощения квадратными плитками двух типов a и b. Локальные правила примыкания плиток в этом смысле соответствуют заданию запрещенных паттернов.

B.5 Рассмотрим шестиугольные плитки, стороны которых либо прямые, либо содержат выпуклость или вогнутость одинаковой формы, несколько примеров указаны на рисунке 1. Выясните, для различных вариантов плиток, можно ли получить замощение бесконечной плоскости, используя только плитки заданного типа?

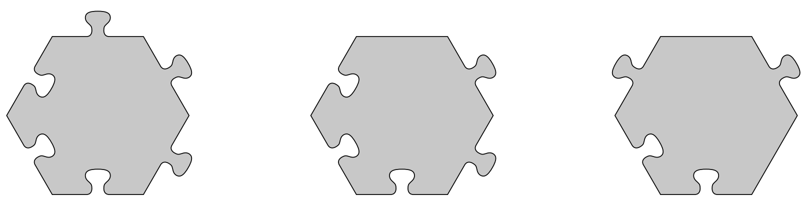

Рис. 1: Правильные шестиугольники с насечками на сторонах.

C Периодичность и квазипериодичность

Вернемся в одномерную ситуацию. Сосредоточимся на вопросе периодичности, и рассмотрим новое свойство, *квазипериодичность*.

C.1 Докажите, что если последовательность периодична, то ее можно задать с помощью конечного числа запретов.

C.2 Пусть можно раскрашивать буквы в конечное число цветов. Пусть задан конечный набор запрещенных слов, и известно, что есть разрешенные бесконечные слова. Докажите, что есть периодическое бесконечное разрешенное слово.

Таким образом, периодичности нельзя избежать в одноразмерной ситуации. Но как далеко мы можем зайти?

C.3 Пусть мы можем задать не более n запретов. Пусть p – наименьший период разрешенного слова. Какого наибольшего значения p мы можем добиться?

C.4 Пусть теперь мы можем задавать сколько угодно запретов, но количество букв в каждом из них не более n. Аналогичный вопрос, какого наибольшего значения p мы можем добиться?

Слово называется *квазипериодичным*, если для любого паттерна P, встречающегося в нем, существует число r, такое что P содержится в любом круге радиуса r.

C.5 Докажите, что каждое периодическое слово является квазипериодичным.

C.6 Найдите непериодическое слово, являющееся квазипериодичным, а также неквазипериодическое слово.

Теперь рассмотрим двумерную ситуацию. Понятия периодичности и квазипериодичности может быть легко обобщены (сделайте это). Как мы увидим позже, периодичности теперь можно избежать. А вот квазипериодичности нельзя:

C.7 Докажите, что если с помощью набора можно замостить плоскость, то это можно сделать с помощью квазипериодического замощения.

D Замощения Робинсона

Первый набор, с помощью которого можно составлять только непериодические замощения был открыт в 1964 году Робертом Бергером и содержал 20426 плиток. Более простой набор показан на рисунке 2. Он был открыт в 1971 Рафаэлем Робинсоном. Выпуклости и выемки (которые могут иметь или не иметь симметрию) вынуждают вариант замощения, при этом линии на плитках образуют интересный рисунок.

D.1 Докажите, что плитками, изображенными на рисунке 2 можно замостить плоскость.

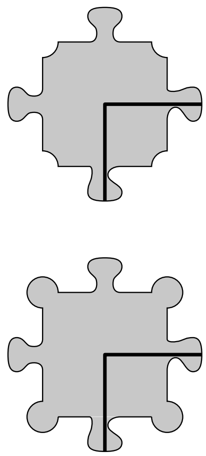

Рис. 2: Шесть квадратов с насечками. Обратите внимание на разную форму насечек.

D.2 Докажите, что любое такое замощение непериодично.

D.3 Назовем *родителем* квадрат, образованный отрезками на плитках, если он пересекает меньший квадрат. *Родословная* квадрата может быть закодирована бесконечным словом в четырех буквенном алфавите, где каждая буква угол, пересекаемый родительским квадратом. В каких случаях два квадрата имеют общего предка?

D.4 Докажите, что существует несчетное количество замощений, даже с учетом изометрии.

E Иерархические замощения

E.1 Покажите, как замостить плоскость с помощью плиток, изображенных на рисунке 3. Цвета точек должны совпадать в месте соприкосновения плиток. Этот набор придуман в 1974 году.

E.2 Аналогичный вопрос, покажите, как замостить плоскость с помощью плиток, изображенных на рисунке 4. Этот набор придуман в начале 90-ых.

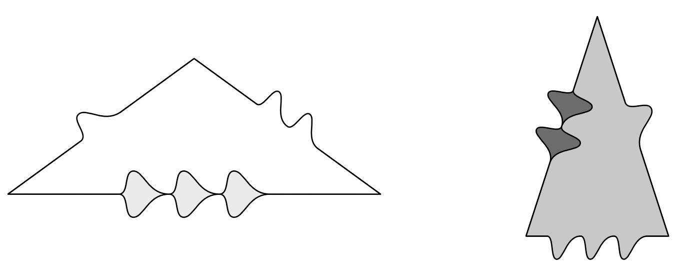

Рис. 3: Треугольники с различными насечками. Верхние углы соответственно 108° и 36°.

E.3 Можно ли задать замощения в двух предыдущих задачах конечным набором локальных паттернов, если нельзя использовать цветовые метки, насечки на сторонах и тому подобное?

Пусть мы составили из плиток несколько макроплиток. Если каждая макроплитка представляет собой фигуру подобную соответствующей плитке (с общим для всех коэффициентом подобия) то мы можем продолжить разбиение и составить макроплитки второго уровня по тому же принципу. Продолжая в том же

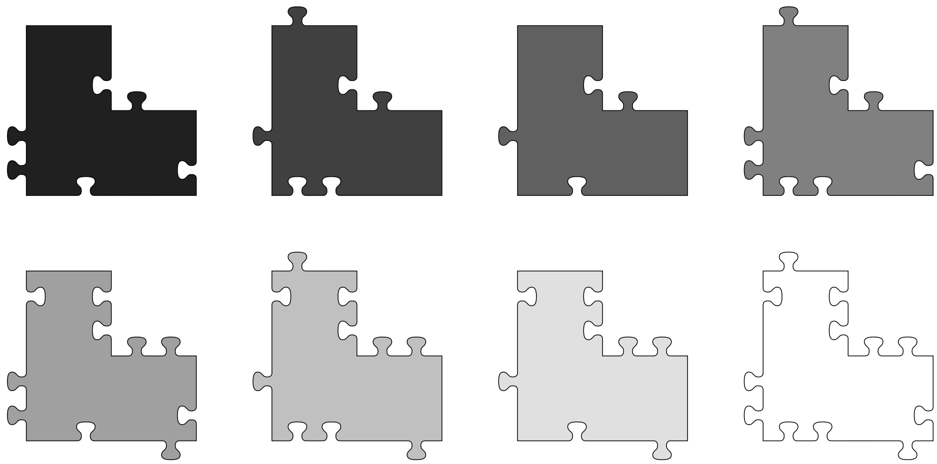

Рис. 4: Notched L-shaped tiles.

духе, мы можем получить замощение плоскости. Способ, с помощью которого макроплитки составляются из плиток, будем называть *подстановкой.* Такой способ построения замощений называется *иерархическим.*

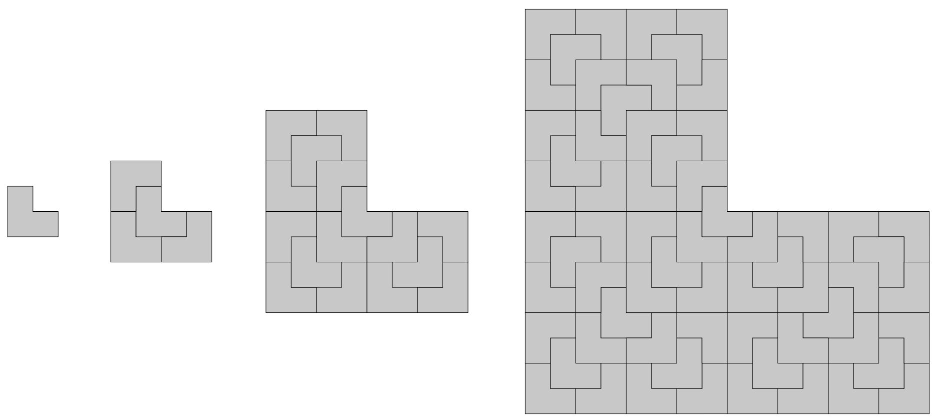

Рис. 5: Пример подстановки.

E.4 Докажите, что иерархические замощения непериодичны.

E.5 Каждая из изображенных на рисунке 6 подстановок задает множество замощений. Для каждого из этих случаев выясните, можно ли определить соответствующее множество с помощью конечного набора запрещенных паттернов – связных сочетаний неперекрывающихся плиток?

Важный результат в математике замощений, полученный в 1998 году, заключается в том, **что для заданной подстановки плиток, их можно раскрасить в конечное число цветов так, что иерархическое замощение может быть определено с помощью конечного числа запрещенных паттернов.** В этом случае говорят, что плитки могут быть декорированы.

E.6 Можете ли вы декорировать плитки для подстановок из предыдущей задачи так, чтобы соответствующие замощения задавались конечным числом запрещенных паттернов?

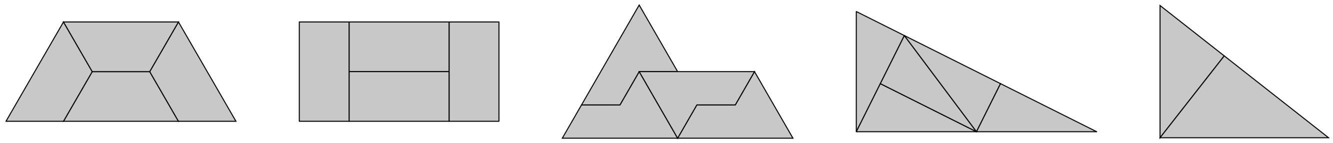

Рис. 6: Подстановки (крайняя справа: плитки гомотетичны но не изометричны).