

Pavages, Fractions Continues et Géométrie Discrète

Thomas Fernique

Soutenance de Thèse

13 Décembre 2007

Fractions continues : représentation des nombres particulière.

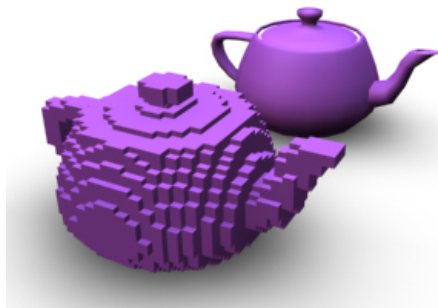
Exemple :

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots$$

Géométrie discrète : représenter le réel sur un ordinateur.

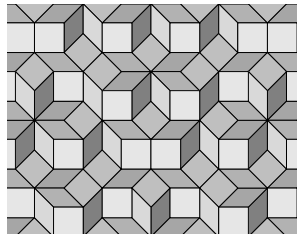
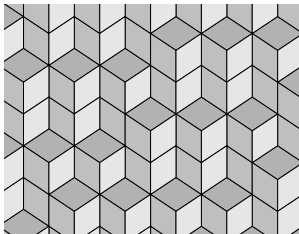


- 1 Pavages canoniques et flips
- 2 Applications duales
- 3 Fractions continues et génération de plan
- 4 Quelques mots sur la reconnaissance de plan

- 1 Pavages canoniques et flips
- 2 Applications duales
- 3 Fractions continues et génération de plan
- 4 Quelques mots sur la reconnaissance de plan

Définition (Coupe et projection canonique $d \rightarrow k$)

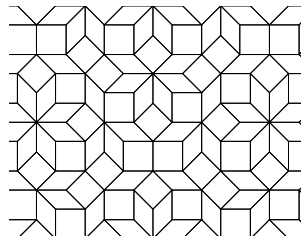
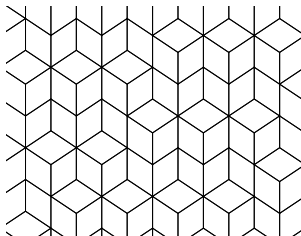
Projection sur \mathbb{R}^k des faces k -dim. de cubes de \mathbb{Z}^d contenues dans une bande $V + [0, 1]^d$, où V espace affine de dim. k .



Deux points de vue : dans \mathbb{R}^d (plan discret) ou \mathbb{R}^k (pavage).

Définition (Coupe et projection canonique $d \rightarrow k$)

Projection sur \mathbb{R}^k des faces k -dim. de cubes de \mathbb{Z}^d contenues dans une bande $V + [0, 1]^d$, où V espace affine de dim. k .

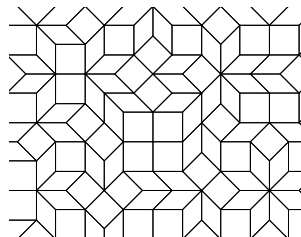
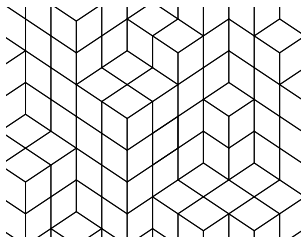


Deux points de vue : dans \mathbb{R}^d (plan discret) ou \mathbb{R}^k (pavage).

Plus généralement :

Définition (Pavage canonique $d \rightarrow k$)

Pavage de \mathbb{R}^k par des projections de faces k -dim. de cubes de \mathbb{Z}^d .

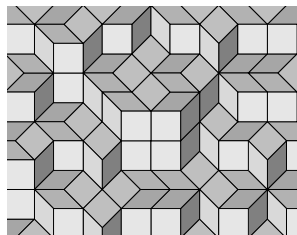
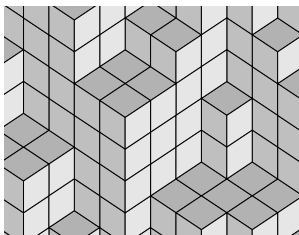


Deux points de vue : dans \mathbb{R}^k (pavage) ou \mathbb{R}^d (surface).

Plus généralement :

Définition (Pavage canonique $d \rightarrow k$)

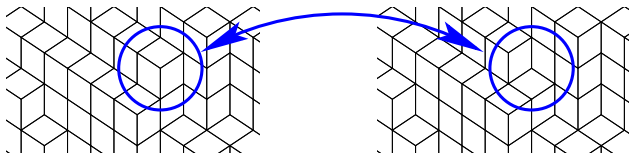
Pavage de \mathbb{R}^k par des projections de faces k -dim. de cubes de \mathbb{Z}^d .



Deux points de vue : dans \mathbb{R}^k (pavage) ou \mathbb{R}^d (surface).

Définition (Flip)

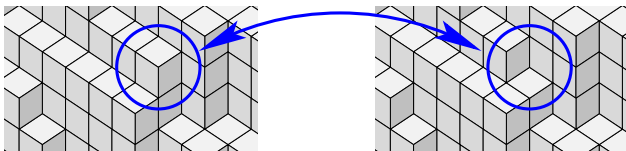
Dans un pavage $d \rightarrow k$: deux arrangements possibles de $k + 1$ tuiles partageant un sommet. Flip : passage de l'un à l'autre.



Sens physique : réorganisation locale d'atomes.

Définition (Flip)

Dans un pavage $d \rightarrow k$: deux arrangements possibles de $k + 1$ tuiles partageant un sommet. Flip : passage de l'un à l'autre.



Sens physique : réorganisation locale d'atomes.

Sur la surface : ajout/retrait d'un cube de dim. $k + 1$.

Question : peut-on passer d'un pavage à un autre par flips ?

Cas des pavages d'un domaine fini sans trou :

- Thurston (1989) : $d \rightarrow d - 1$ (codim. 1) ;
- Kenyon (1993) : $d \rightarrow 2$ (dim. 2) ;
- Desoutter-Destainville (2005) : $d \rightarrow 3$, restrictions ;
- Chavanon-Rémila (2006) $d \rightarrow d - 2$ (codim. 2).

Question : peut-on passer d'un pavage à un autre par flips ?

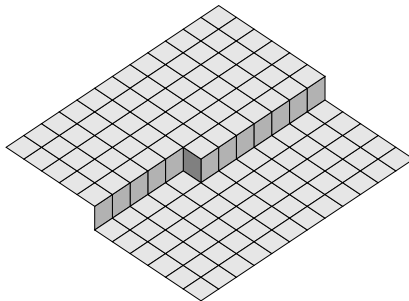
Cas des pavages d'un domaine fini sans trou :

- Thurston (1989) : $d \rightarrow d - 1$ (codim. 1) ;
- Kenyon (1993) : $d \rightarrow 2$ (dim. 2) ;
- Desoutter-Destainville (2005) : $d \rightarrow 3$, restrictions ;
- Chavanon-Rémila (2006) $d \rightarrow d - 2$ (codim. 2).

Dans cette thèse : cas des pavages *infinis* (pavages de \mathbb{R}^k).

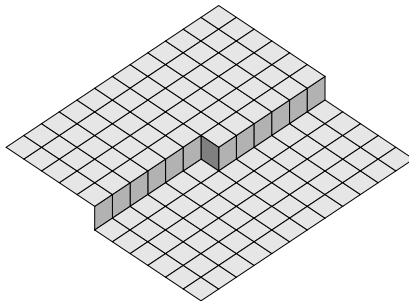
Définition (Flip-accessibilité des pavages infinis)

\mathcal{T}' est flip-accessible à partir de \mathcal{T} s'il existe une suite $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 0}$ tels que $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$, $\lim_n \mathcal{T}_n = \mathcal{T}'$ et \mathcal{T}_{n+1} s'obtient par un flip sur \mathcal{T}_n .



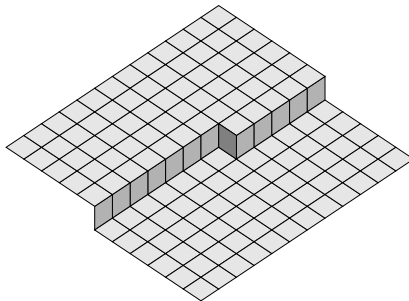
Définition (Flip-accessibilité des pavages infinis)

\mathcal{T}' est flip-accessible à partir de \mathcal{T} s'il existe une suite $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 0}$ tels que $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$, $\lim_n \mathcal{T}_n = \mathcal{T}'$ et \mathcal{T}_{n+1} s'obtient par un flip sur \mathcal{T}_n .



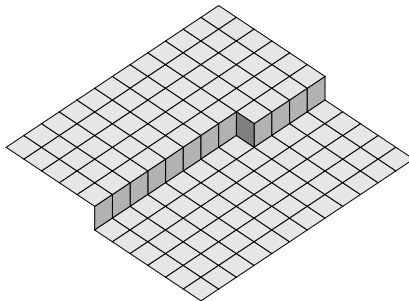
Définition (Flip-accessibilité des pavages infinis)

\mathcal{T}' est flip-accessible à partir de \mathcal{T} s'il existe une suite $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 0}$ tels que $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$, $\lim_n \mathcal{T}_n = \mathcal{T}'$ et \mathcal{T}_{n+1} s'obtient par un flip sur \mathcal{T}_n .



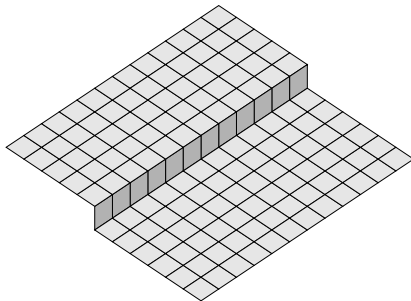
Définition (Flip-accessibilité des pavages infinis)

\mathcal{T}' est flip-accessible à partir de \mathcal{T} s'il existe une suite $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 0}$ tels que $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$, $\lim_n \mathcal{T}_n = \mathcal{T}'$ et \mathcal{T}_{n+1} s'obtient par un flip sur \mathcal{T}_n .



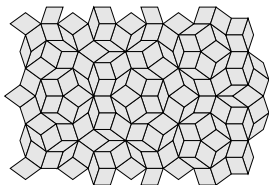
Définition (Flip-accessibilité des pavages infinis)

\mathcal{T}' est flip-accessible à partir de \mathcal{T} s'il existe une suite $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 0}$ tels que $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$, $\lim_n \mathcal{T}_n = \mathcal{T}'$ et \mathcal{T}_{n+1} s'obtient par un flip sur \mathcal{T}_n .



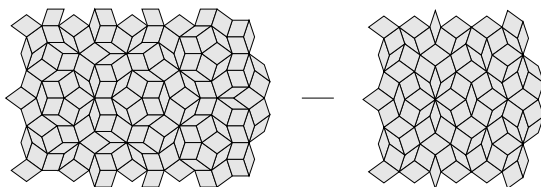
Remarque : relation partielle et non symétrique.

Caractérisation de flip-accessibilité ? Via la notion d'*ombres* :



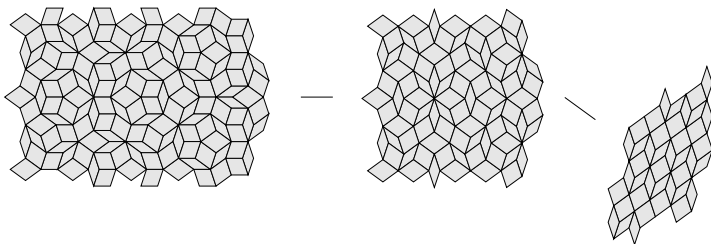
Surface de \mathbb{R}^5 (remontée d'un pavage canonique $5 \rightarrow 2$).

Caractérisation de flip-accessibilité ? Via la notion d'*ombres* :



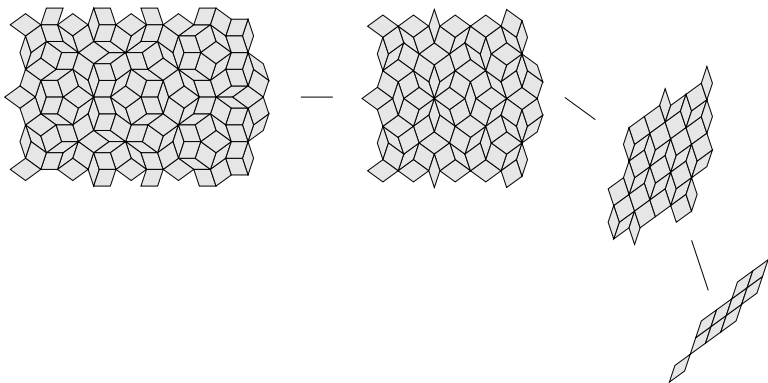
Projection suivant un vecteur de base \rightsquigarrow surface de \mathbb{R}^4 .

Caractérisation de flip-accessibilité ? Via la notion d'*ombres* :



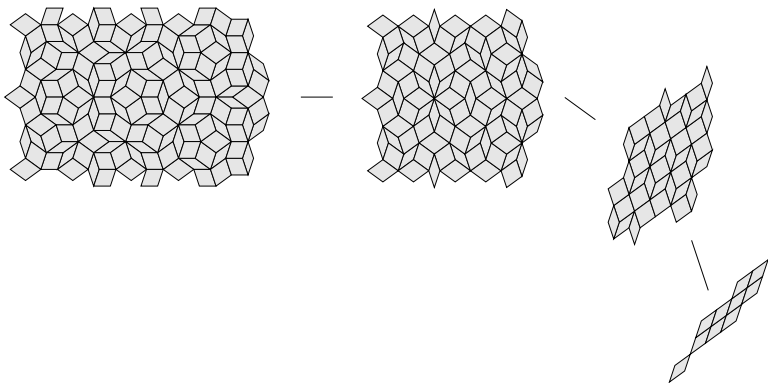
Autre projection \rightsquigarrow surface de \mathbb{R}^3 .

Caractérisation de flip-accessibilité ? Via la notion d'*ombres* :



Autre projection \rightsquigarrow "surface" de \mathbb{R}^2 , appelée *ombre*.

Caractérisation de flip-accessibilité ? Via la notion d'*ombres* :

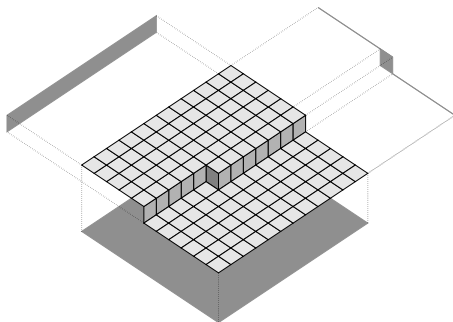


Un pavage canonique $d \rightarrow k$ a donc C_d^k ombres (sous-ens. de \mathbb{R}^k).

Codim. 1 (Arnoux-Berthé-F.-Jamet) et dim. 2 (Bodini-F.-Rémila) :

Théorème

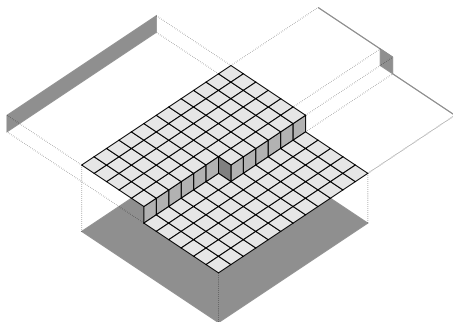
\mathcal{T}' flip-accessible à partir de \mathcal{T} ssi les ombres de \mathcal{T}' sont incluses dans celles de \mathcal{T} .



Codim. 1 (Arnoux-Berthé-F.-Jamet) et dim. 2 (Bodini-F.-Rémila) :

Théorème

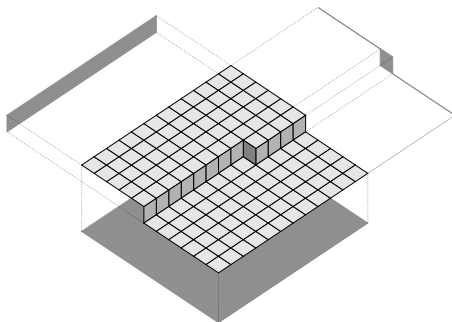
\mathcal{T}' flip-accessible à partir de \mathcal{T} ssi les ombres de \mathcal{T}' sont incluses dans celles de \mathcal{T} .



Codim. 1 (Arnoux-Berthé-F.-Jamet) et dim. 2 (Bodini-F.-Rémila) :

Théorème

\mathcal{T}' flip-accessible à partir de \mathcal{T} ssi les ombres de \mathcal{T}' sont incluses dans celles de \mathcal{T} .



- 1 Pavages canoniques et flips
- 2 Applications duales**
- 3 Fractions continues et génération de plan
- 4 Quelques mots sur la reconnaissance de plan

Contexte : combinatoire des mots et dynamique symbolique.

En particulier, action sur les mots : *substitutions*.

Exemple : $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1$.

$$\sigma(121) = \sigma(1)\sigma(2)\sigma(1) = 12112.$$

Contexte : combinatoire des mots et dynamique symbolique.

En particulier, action sur les mots : *substitutions*.

Exemple : $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1$.

$$\sigma(121) = \sigma(1)\sigma(2)\sigma(1) = 12112.$$

Notion utile : *matrice d'incidence*.

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Contexte : combinatoire des mots et dynamique symbolique.

En particulier, action sur les mots : *substitutions*.

Exemple : $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1$.

$$\sigma(121) = \sigma(1)\sigma(2)\sigma(1) = 12112.$$

Notion utile : *matrice d'incidence*.

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rq. : mot sur d lettres \simeq pavage canonique $d \rightarrow 1$.

On voudrait étendre ceci en dimension supérieure.

Solution retenue dans cette thèse : *applications duales*.
Introduites par Arnoux-Ito ('01) suite à un travail de Rauzy ('82).

On se restreint au cas des pavages $d \rightarrow d - 1$ (codim. 1).

Solution retenue dans cette thèse : *applications duales*.
 Introduites par Arnoux-Ito ('01) suite à un travail de Rauzy ('82).

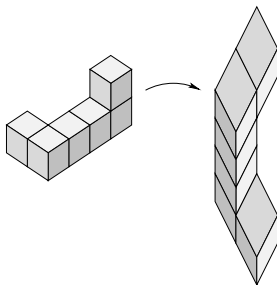
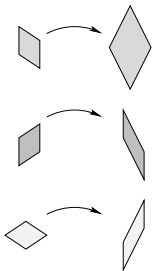
On se restreint au cas des pavages $d \rightarrow d - 1$ (codim. 1).

À une subst. σ *unimodulaire* est associée une application $E_1^*(\sigma)$.
 Formalisme lourd mais algorithmiquement simple :

$$E_1^*(\vec{x}, i^*) = \sum_{j|\sigma(j)=p \cdot i \cdot s} (M_\sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{f}(p)), j^*).$$

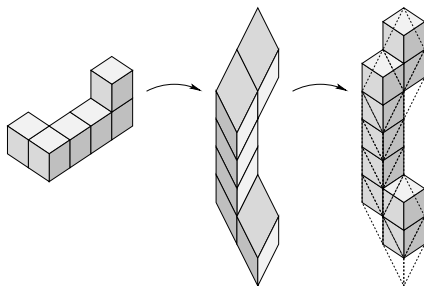
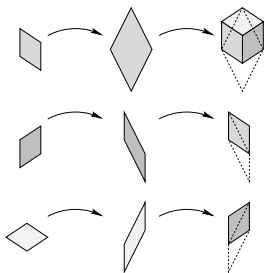
Idée intuitive : discrétisation de M_σ^{-1} .

Pour la substitution $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ (unimodulaire) :



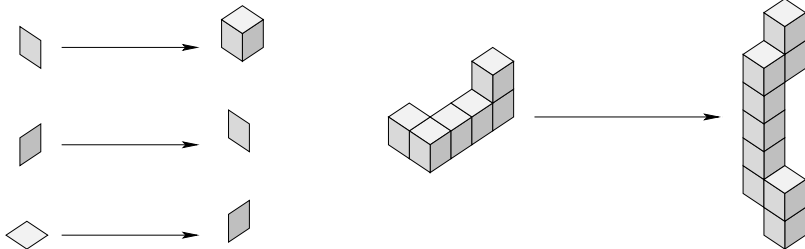
Action de M_σ^{-1}

Pour la substitution $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ (unimodulaire) :



Action de M_σ^{-1} et discrétisation par des faces

Pour la substitution $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ (unimodulaire) :



Action de M_σ^{-1} et discrétisation par des faces \rightsquigarrow action de $E_1^*(\sigma)$.

Terminologie :

Surface en escalier : remonté d'un pavage canonique $d \rightarrow d - 1$.

Plan en escalier : remonté d'une coupe et projection $d \rightarrow d - 1$.

Terminologie :

Surface en escalier : remonté d'un pavage canonique $d \rightarrow d - 1$.

Plan en escalier : remonté d'une coupe et projection $d \rightarrow d - 1$.

Plus précisément :

Définition (Plan en escalier)

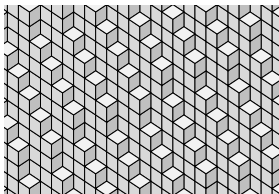
Le *plan en escalier* de normale $\vec{\alpha}$ et d'intercept ρ , noté $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}$ est l'ens. des faces dont tout sommet \vec{x} vérifie :

$$\rho \leq \langle \vec{x} | \vec{\alpha} \rangle < \rho + \|\vec{\alpha}\|_1.$$

Note : équivalent au plan arithmétique discret standard (Réveilles).

Action sur les plans et surfaces en escalier

Application des duals à un pavage

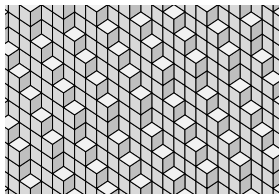


$E_1^*(\sigma)$

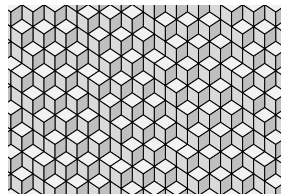
?

Théorème (F. '06)

L'application duale $E_1^*(\sigma)$ envoie le plan $\mathcal{P}_{\vec{\alpha},\rho}$ sur le plan $\mathcal{P}_{t_{M_\sigma}\vec{\alpha},\rho}$.

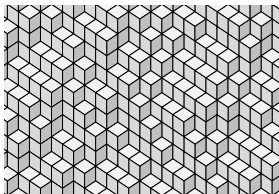


$E_1^*(\sigma)$



Preuve : montrer l'absence de recouvrement de faces.

Action sur les plans et surfaces en escalier

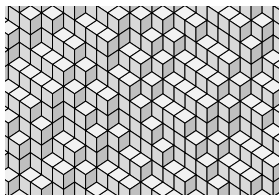


$E_1^*(\sigma)$

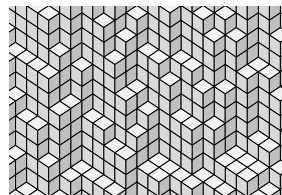
?

Théorème (Arnoux-Berthé-F.-Jamet '07)

Une application duale envoie toute surface en escalier sur une surface en escalier.



$E_1^*(\sigma)$



Preuve : grâce aux flips (ombres \rightsquigarrow surface = plan + flips).

- 1 Pavages canoniques et flips
- 2 Applications duales
- 3 Fractions continues et génération de plan**
- 4 Quelques mots sur la reconnaissance de plan

Problème : étant donné $\vec{\alpha}$ et ρ , engendrer $\mathcal{P}_{\vec{\alpha},\rho}$.

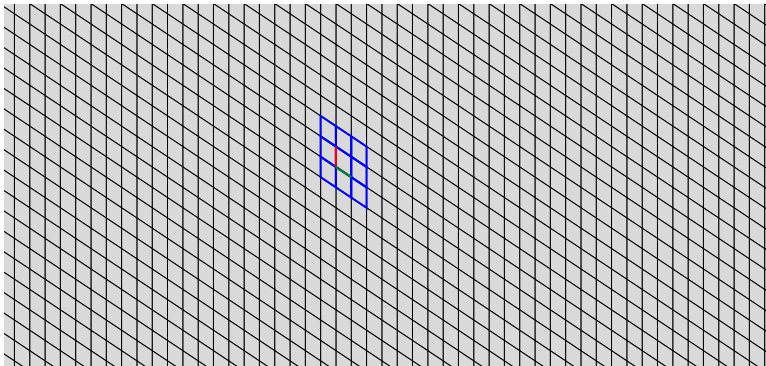
Remarque : s'il existe $\vec{\beta}$ et une substitution σ t.q. :

- on sache engendrer $\mathcal{P}_{\vec{\beta},\rho}$;
- $\vec{\alpha} = {}^t M_\sigma \vec{\beta}$;

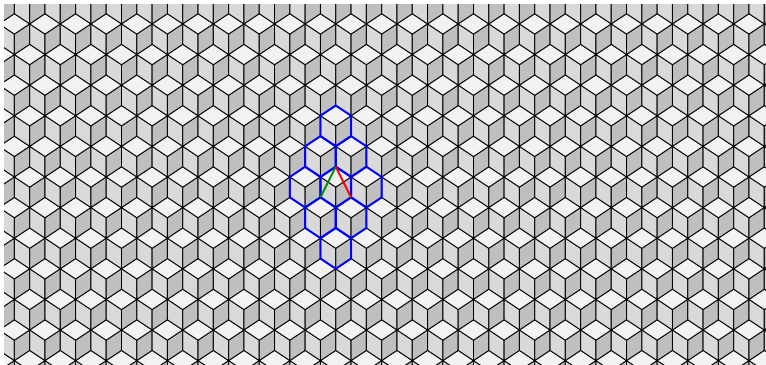
alors on sait engendrer $\mathcal{P}_{\vec{\alpha},\rho}$:

$$\mathcal{P}_{\vec{\alpha},\rho} = E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\vec{\beta},\rho}).$$

En particulier, on sait engendrer $\mathcal{P}_{\vec{e}_1, \rho}$ par périodicité :



Donc un plan $\mathcal{P}_{t_{M_\sigma \vec{e}_1, \rho}}$ aussi (ici avec $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$).



Question : comment trouver $M_\sigma \in GL(d, \mathbb{Z})$ t.q. $\vec{\alpha} = {}^t M_\sigma \vec{e}_1$?

Question : comment trouver $M_\sigma \in GL(d, \mathbb{Z})$ t.q. $\vec{\alpha} = {}^t M_\sigma \vec{e}_1$?

Idée : utiliser un développement en fraction continues d -dim.

Principe (très général) :

- à chaque étape, $\vec{\alpha}$ est multiplié par $B(\vec{\alpha})^{-1} \in GL(d, \mathbb{Z})$;
- condition d'arrêt : $\vec{\alpha} = \vec{e}_1$ (par ex.) ;
- développement : suite $(B_i)_{i>0}$ des matrices utilisées.

Question : comment trouver $M_\sigma \in GL(d, \mathbb{Z})$ t.q. $\vec{\alpha} = {}^t M_\sigma \vec{e}_1$?

Idée : utiliser un développement en fraction continues d -dim.

Principe (très général) :

- à chaque étape, $\vec{\alpha}$ est multiplié par $B(\vec{\alpha})^{-1} \in GL(d, \mathbb{Z})$;
- condition d'arrêt : $\vec{\alpha} = \vec{e}_1$ (par ex.) ;
- développement : suite $(B_i)_{i>0}$ des matrices utilisées.

En particulier, si $\vec{\alpha}$ a un développement *fini* :

$$\vec{\alpha} = B_1 \times \dots \times B_n \times \vec{e}_1.$$

Il suffit alors de choisir σ t.q. ${}^t M_\sigma = B_1 \times \dots \times B_n$.

Dans cette thèse : développement de *Brun* ('57)

On suppose $\vec{\alpha}$ t.q. $\alpha_1 \geq \alpha_i \geq \max\{\alpha_2, \dots, \alpha_d\}$. Alors :

$$B(\vec{\alpha}) = B_{a,i} = \begin{pmatrix} a & & & 1 \\ & I_{i-2} & & \\ 1 & & & 0 \\ & & & & I_{d-i} \end{pmatrix},$$

avec $a = \lfloor \alpha_1 / \alpha_i \rfloor \in \mathbb{N}^*$.

Dans cette thèse : développement de *Brun* ('57)

On suppose $\vec{\alpha}$ t.q. $\alpha_1 \geq \alpha_i \geq \max\{\alpha_2, \dots, \alpha_d\}$. Alors :

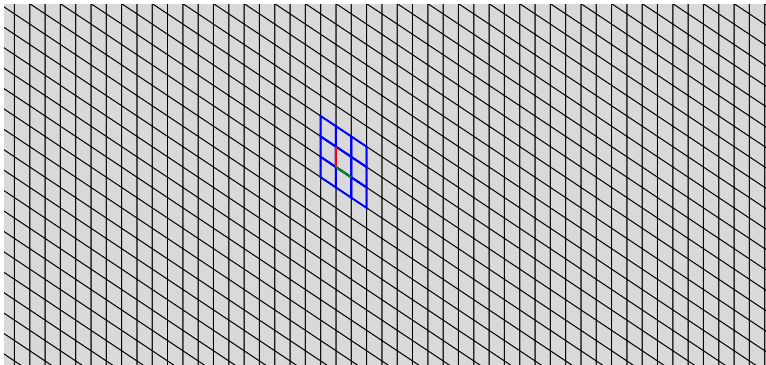
$$B(\vec{\alpha}) = B_{a,i} = \begin{pmatrix} a & & & 1 \\ & I_{i-2} & & \\ 1 & & & 0 \\ & & & & I_{d-i} \end{pmatrix},$$

avec $a = \lfloor \alpha_1 / \alpha_i \rfloor \in \mathbb{N}^*$.

Propriété : développement fini ssi vecteur rationnel. Ex :

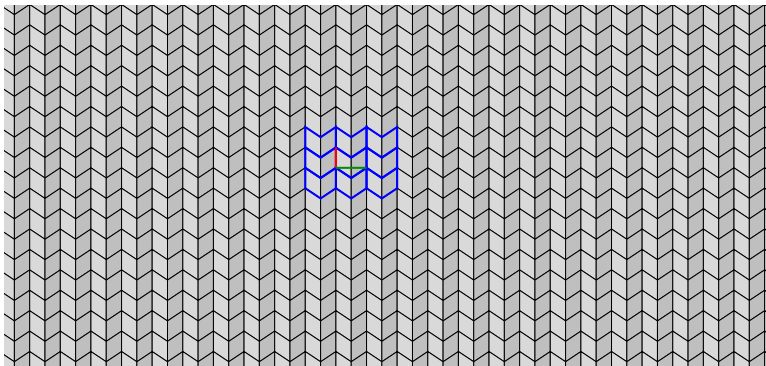
$$(7, 6, 4) = B_{1,2} \times B_{1,3} \times B_{1,3} \times B_{1,3} \times B_{1,2} \times B_{1,2} \times \vec{e}_1.$$

Génération de $\mathcal{P}_{(7,6,4),0}$:



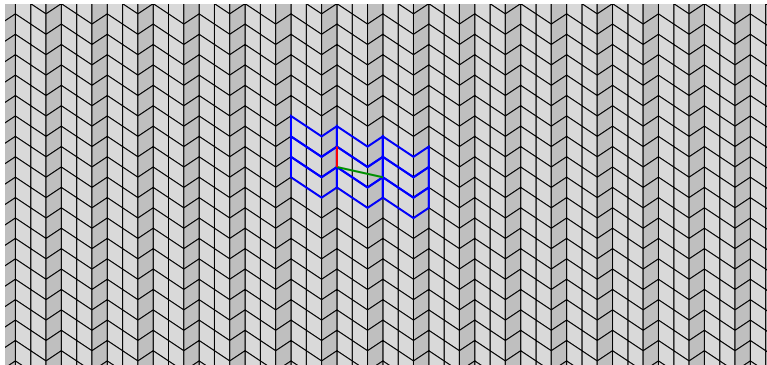
$\mathcal{P}_{(1,0,0),0}$.

Génération de $\mathcal{P}_{(7,6,4),0}$:



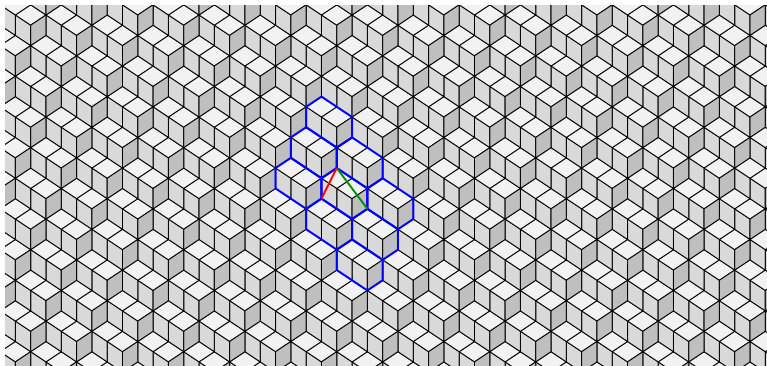
$$\mathcal{P}_{(1,1,0),0} = E_1^*(\beta_{1,2})(\mathcal{P}_{(1,0,0),0}).$$

Génération de $\mathcal{P}_{(7,6,4),0}$:



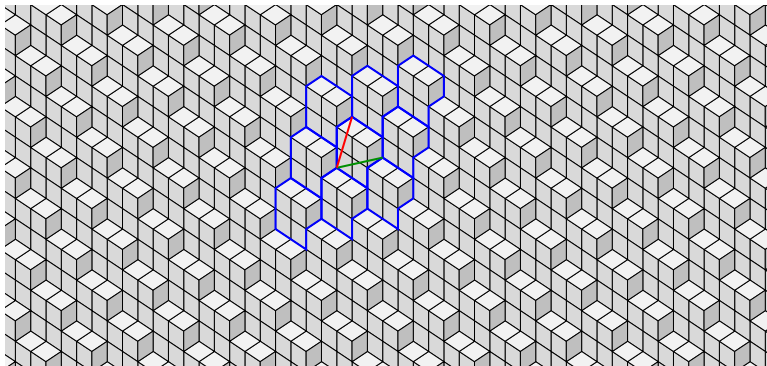
$$\mathcal{P}_{(2,1,0),0} = E_1^*(\beta_{1,2})(\mathcal{P}_{(1,1,0),0}).$$

Génération de $\mathcal{P}_{(7,6,4),0}$:



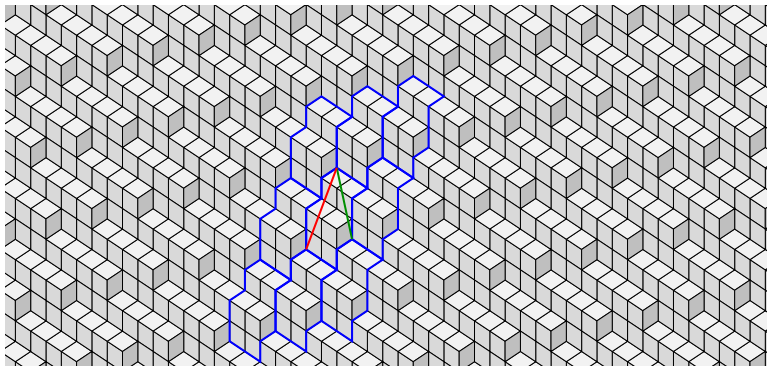
$$\mathcal{P}_{(2,1,2),0} = E_1^*(\beta_{1,3})(\mathcal{P}_{(2,1,0),0}).$$

Génération de $\mathcal{P}_{(7,6,4),0}$:



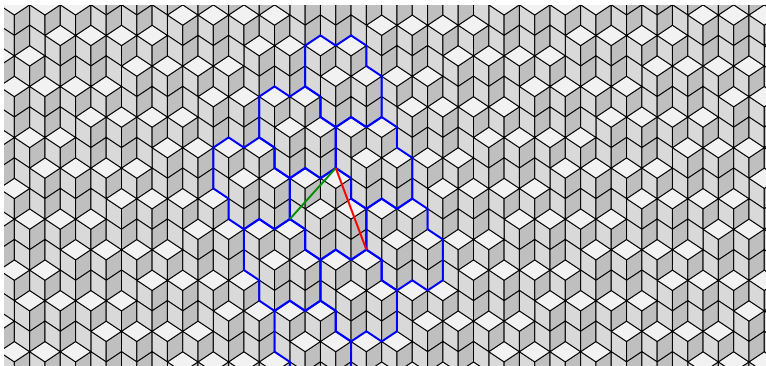
$$\mathcal{P}_{(4,1,2),0} = E_1^*(\beta_{1,3})(\mathcal{P}_{(2,1,2),0}).$$

Génération de $\mathcal{P}_{(7,6,4),0}$:



$$\mathcal{P}_{(6,1,4),0} = E_1^*(\beta_{1,3})(\mathcal{P}_{(4,1,2),0}).$$

Génération de $\mathcal{P}_{(7,6,4),0}$:



$$\mathcal{P}_{(7,6,4),0} = E_1^*(\beta_{1,2})(\mathcal{P}_{(6,1,4),0}).$$

Développement infini : méthode non utilisable (plan apériodique).

Développement infini : méthode non utilisable (plan a périodique).

Cependant, un développement partiel permet d'approximer, car :

$$\vec{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} B_1 \times \dots \times B_n \times \vec{e}_1.$$

Développement infini : méthode non utilisable (plan a périodique).

Cependant, un développement partiel permet d'approximer, car :

$$\vec{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} B_1 \times \dots \times B_n \times \vec{e}_1.$$

Cas particulier : développement périodique ($\vec{\alpha}$ point fixe).

Avec $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}$ et sous certaines hypothèses :

$$\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{K}).$$

Exemple avec $\sigma : 1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 13, 3 \rightarrow 1 :$



\mathcal{K}

Exemple avec $\sigma : 1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 13, 3 \rightarrow 1 :$



$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{K})$$

Exemple avec $\sigma : 1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 13, 3 \rightarrow 1$:



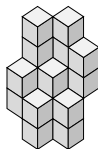
$$E_1^*(\sigma)^2(\mathcal{K})$$

Exemple avec $\sigma : 1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 13, 3 \rightarrow 1$:



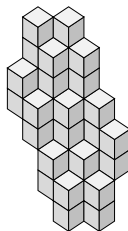
$$E_1^*(\sigma)^3(\mathcal{K})$$

Exemple avec $\sigma : 1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 13, 3 \rightarrow 1 :$



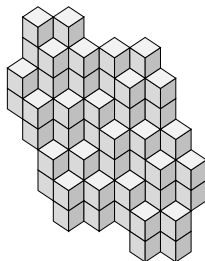
$$E_1^*(\sigma)^4(\mathcal{K})$$

Exemple avec $\sigma : 1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 13, 3 \rightarrow 1 :$



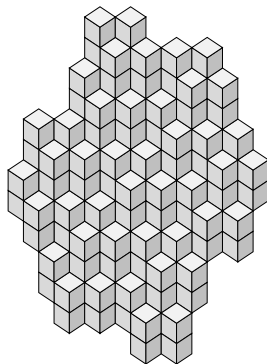
$$E_1^*(\sigma)^5(\mathcal{K})$$

Exemple avec $\sigma : 1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 13, 3 \rightarrow 1 :$



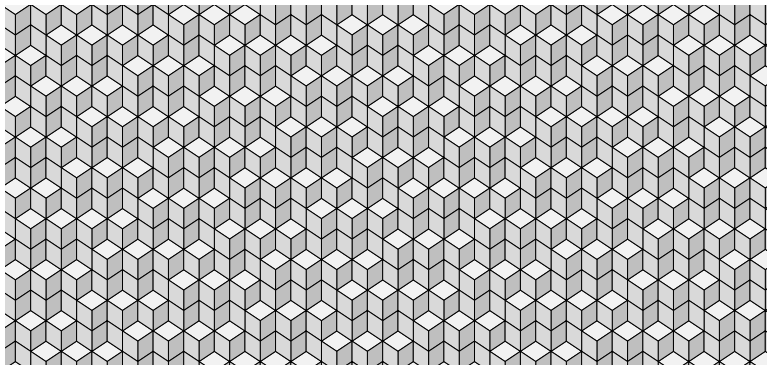
$$E_1^*(\sigma)^6(\mathcal{K})$$

Exemple avec $\sigma : 1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 13, 3 \rightarrow 1 :$



$$E_1^*(\sigma)^7(K)$$

Exemple avec $\sigma : 1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 13, 3 \rightarrow 1 :$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{K})$$

- 1 Pavages canoniques et flips
- 2 Applications duales
- 3 Fractions continues et génération de plan
- 4 Quelques mots sur la reconnaissance de plan

Partie précédente :

vecteur \rightsquigarrow développement de Brun \rightsquigarrow génération de plan.

Partie précédente :

vecteur \rightsquigarrow développement de Brun \rightsquigarrow génération de plan.

Ici, on voudrait faire l'inverse :

plan \rightsquigarrow développement de Brun \rightsquigarrow vecteur.

Partie précédente :

vecteur \rightsquigarrow développement de Brun \rightsquigarrow génération de plan.

Ici, on voudrait faire l'inverse, et même mieux :

plan (ou pas) \rightsquigarrow développement de Brun \rightsquigarrow vecteur (ou erreur).

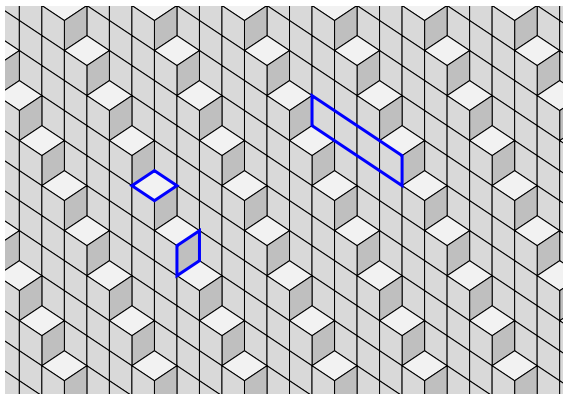
Partie précédente :

vecteur \rightsquigarrow développement de Brun \rightsquigarrow génération de plan.

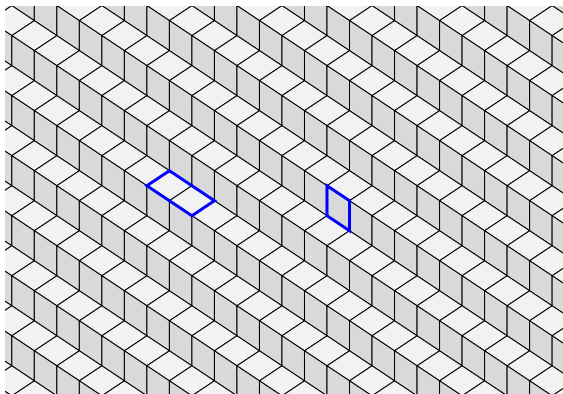
Ici, on voudrait faire l'inverse, et même mieux :

plan (ou pas) \rightsquigarrow développement de Brun \rightsquigarrow vecteur (ou erreur).

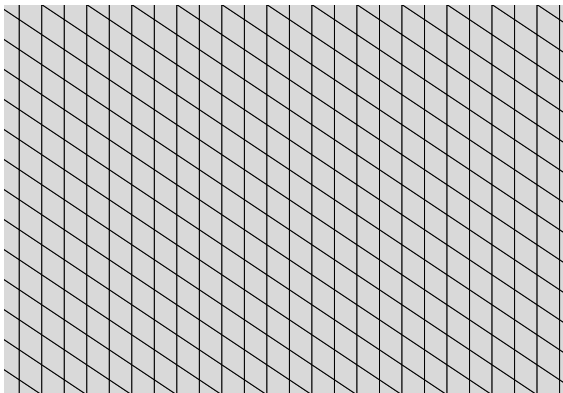
Intérêt : reconnaissance de plan.



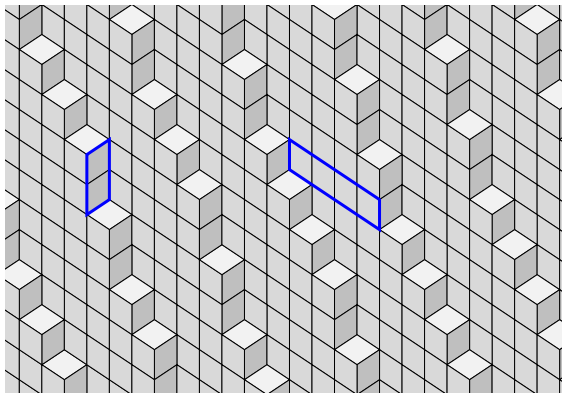
Lecture des info. suffisante pour calculer le développement de Brun
d'un (hypothétique) vecteur normal.



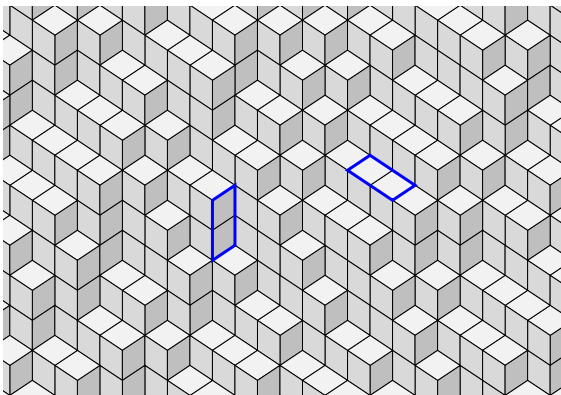
Lecture des info. suffisante pour calculer le développement de Brun d'un (hypothétique) vecteur normal.



Plan de normale \vec{e}_1 reconnu \rightsquigarrow plan au départ (normale déductible).



Lecture des info. suffisante pour calculer le développement de Brun d'un (hypothétique) vecteur normal.



Information incohérente (erreur) \rightsquigarrow pas un plan.

Reconnaissance de morceaux de plan (cas fini) :

Problèmes de bords et d'information incomplète.

On obtient cependant un algorithme *hybride* en $\mathcal{O}(n \log(D))$, où :

- n est le nombre de faces de l'ens. à reconnaître ;
- D est le côté d'un cube de \mathbb{Z}^d englobant cet ens. de faces.

↪ quasi-linéaire pour des ens. de faces pas trop dispersés.

Apport principal de cette thèse ? Combiner :

- pavages et flips (physique) ;
- applications duales (systèmes dynamiques symboliques) ;
- fractions continues (théorie des nombres) ;
- géométrie discrète (applications informatiques).

A donné lieu à :

- 3 articles en revue, un soumis, un en cours ;
- 7 exposés en conférence, un soumis ;
- 21 exposés divers (séminaires, groupes de travail. . .).

Un peu plus en détail :

- Caract. de flip-accessibilités infinies via la notion d'ombre ;
[Arnoux-Berthé-F.-Jamet, Bodini-F.-Rémila]
- Action des applications duales (notamment sur les surfaces) ;
[F., Arnoux-Berthé-F.-Jamet, Berthé-F.]
- Génération de plan (notamment rationnels) ;
- Reconnaissance de plan (approche nouvelle et efficace).
[Berthé-F.]

Un peu plus en détail :

- Caract. de flip-accessibilités infinies via la notion d'ombre ;
[Arnoux-Berthé-F.-Jamet, Bodini-F.-Rémila]
- Action des applications duales (notamment sur les surfaces) ;
[F., Arnoux-Berthé-F.-Jamet, Berthé-F.]
- Génération de plan (notamment rationnels) ;
- Reconnaissance de plan (approche nouvelle et efficace).
[Berthé-F.]

Également :

- Définition des applications duales par *règles locales* ;
[F.]
- Flip-accessibilité sur d'autres types de pavages ;
[Bodini-F.]

Quelques perspectives :

- 1 reconnaissance floue ;
- 2 polyédrisation de surface ;
- 3 reconnaissance de plan plus robuste ;
- 4 complexité et périodicité des pavages ;
- 5 caractérisation des règles locales stables sur plans/surfaces ;
- 6 caractérisation des plans points fixes ;
- 7 “matching rules” algébriques pour les plans points fixes ;
- 8 étude des applications duales en codimension supérieure ;
- 9 structure plus fine de l'espace des pavages (flip-optimalité ?)

Point clef :

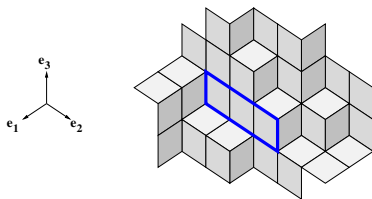
étant donné un ens. de face \mathcal{F} , supposer $\mathcal{F} = \mathcal{P}_{\vec{\alpha}}$ et “lire” $B(\vec{\alpha})$ directement sur \mathcal{F} .

Note : $B(\vec{\alpha}) = B_{a,i} \rightsquigarrow$ info. partielle sur $\vec{\alpha}$.

Après : *dés*substituer par $E_1^*(\beta_{a,i})$ (pour multiplier $\vec{\alpha}$ par $B(\vec{\alpha})^{-1}$).

Définition (palier)

Un (i, j) -palier d'un ens. de faces est un sous-ens. maximal de faces de normale \vec{e}_i alignées dans la direction \vec{e}_j .



Proposition (Berthé-F. 07)

Les (i, j) -paliers de $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}$ sont de tailles $\lfloor \alpha_i / \alpha_j \rfloor$ ou $\lceil \alpha_i / \alpha_j \rceil$.