

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

THÈSE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

SPÉCIALITÉ : **INFORMATIQUE**

École doctorale : Information, Structures, Systèmes

présentée par

Thomas FERNIQUE

Pavages, Fractions Continues et Géométrie Discrète

Soutenue le 13 décembre 2007, devant le jury composé de :

M. Jean-Claude BAJARD, Professeur, Univ. Montpellier 2 Examineur
Mme Valérie BERTHÉ, Directrice de recherche CNRS, LIRMM Directrice de thèse
M. Srečko BRLEK, Professeur, Univ. du Québec à Montréal Président du jury
M. Bruno DURAND, Professeur, Univ. de Provence Examineur
M. Bruno GAUJAL, Directeur de recherche INRIA, LIG Rapporteur
M. Jacques-Olivier LACHAUD, Professeur, Univ. de Savoie Rapporteur
M. Laurent VUILLON, Professeur, Univ. de Savoie Examineur

Cette thèse a été écrite en \LaTeX , la quasi-totalité de ses figures ayant été créées grâce au logiciel *XFig*, soit directement à la main, soit le plus souvent via un programme écrit en *O'Caml*. Merci à tous leurs concepteurs respectifs.

Remerciements

Ma gratitude va en premier lieu à ma directrice de thèse, Valérie Berthé. J'ai bénéficié durant trois ans d'une grande liberté, tout en étant judicieusement aiguillé, et ceci avec le confort inestimable d'un encadrant toujours disponible tant pour une rencontre devant un tableau noir que pour une question par courriel.

Je remercie vivement Bruno Gaujal et Jacques-Olivier Lachaud, d'avoir accepté la charge de rapporteur, ainsi que pour les suggestions tant écrites qu'orales qu'ils ont pu me faire. Je remercie aussi Pierre Arnoux et Christian Mercat pour la relecture attentive de la version préliminaire de cette thèse.

Je suis très honoré que Jean-Claude Bajard, Srečko Brlek, Bruno Durand et Laurent Vuillon aient accepté d'être membres de ce jury.

Merci à l'équipe ARITH qui m'a accueilli aussi bien qu'elle accueille tous ses thésards (en particulier, sans jamais rechigner à les faire voyager). Travailler en son sein a toujours été un plaisir, des séminaires aux repas d'équipe.

Merci également au laboratoire Poncelet de Moscou, notamment à Micha Tsfasman, Sveta P., Liza K. ainsi qu'à Mathieu Raffinot, pour m'avoir accueilli dans les meilleures conditions à de nombreuses reprises.

Enfin, la thèse semblant clore une (longue) vie d'étudiant, j'en profite pour remercier tous les professeurs que j'ai pu avoir, ma famille et, bien sûr, l'influence occulte de mon parrain officiel.

Table des matières

Introduction	1
1 Contexte et contenu	7
1.1 Combinatoire des mots et géométrie discrète	7
1.1.1 Mots, groupe libre et morphismes	7
1.1.2 Mots sturmiens et fractions continues	10
1.1.3 Reconnaissance de droite discrète	16
1.2 Extension en dimensions supérieures	23
1.2.1 Pavages	23
1.2.2 Substitutions	24
1.2.3 Fractions continues multidimensionnelles	26
1.2.4 Reconnaissance de plan discret	28
1.3 Un petit détour par la physique théorique	30
1.4 Résultats principaux	34
2 Applications duales	37
2.1 Construction d'une application duale	37
2.1.1 Relèvement d'un morphisme	37
2.1.2 Dual d'un relèvement	40
2.2 Définition générale et propriétés élémentaires	41
3 Développement de plan en escalier	45
3.1 Plan en escalier	45
3.1.1 Définition	45
3.1.2 Image par une application duale	47
3.2 Développement de Brun d'un vecteur	49
3.2.1 Algorithme de Brun vectoriel	50
3.2.2 Formulation matricielle	52
3.3 Développement de Brun d'un plan	53
3.3.1 Substitutions de Brun	53
3.3.2 Paliers d'un plan	55
3.3.3 Algorithme de Brun géométrique	57

4	Flips : des plans aux surfaces	59
4.1	Surfaces en escalier	59
4.1.1	Pavages canoniques de codimension un	59
4.1.2	Propriétés élémentaires	61
4.2	Flips	64
4.2.1	Flip-accessibilité	64
4.2.2	Pseudo-flip-accessibilité	69
5	Développement de surface en escalier	73
5.1	Action des applications duales	73
5.1.1	Cas général	73
5.1.2	Cas positif	76
5.2	Développement de Brun d'une surface	77
5.2.1	Surface cohérente	77
5.2.2	Algorithme de Brun géométrique	78
5.3	Développements communs	81
5.3.1	Quasi-plan en escalier	81
5.3.2	Une condition nécessaire	84
5.3.3	Caractérisation dans le cas réductible	86
6	Génération et reconnaissance de plan	91
6.1	Morceau de plan et application duale	92
6.2	Génération de plan	95
6.2.1	Plan substitutif	95
6.2.2	Périodes Pisot	98
6.2.3	Plan rationnel	100
6.3	Reconnaissance de plan	103
6.3.1	Principe	103
6.3.2	Reconnaissabilité	105
6.3.3	$\beta_{a,i}$ -pavabilité	108
6.3.4	Un algorithme hybride	111
	Conclusion et perspectives	117
	Bibliographie	119

Introduction

Un problème de pavage auquel chacun a pu se confronter est celui du *puzzle* : étant donné un ensemble de pièces (appelées aussi *tuiles*), comment les assembler en respectant les *contraintes locales* imposées par l'imbrication des pièces (dues à leur découpe) et la continuité des couleurs (deux pièces devant être de même couleur là où elles se touchent) ? Le respect de ces contraintes conduit à obtenir, à une échelle plus globale, l'image finale promise. Sous l'aspect récréatif de cet exemple apparaît une question fondamentale de la théorie des pavages : comment des contraintes locales (ici l'assemblage des pièces) engendrent-elles une contrainte globale (l'image finale) ? Un exemple célèbre est celui du pavage de Penrose, introduit dans [87], qui est obtenu à partir de deux tuiles en forme de losange, qui ont la propriété remarquable de ne pouvoir paver le plan euclidien que de manière *apériodique*, c'est-à-dire sans invariance par une translation non triviale¹. La figure 1 illustre cela.

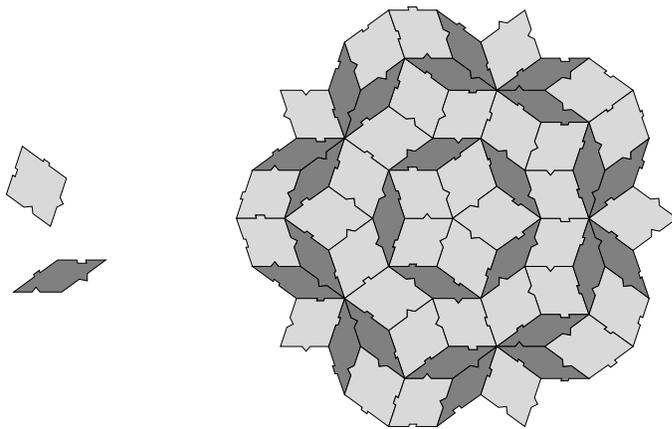


FIGURE 1 – Deux tuiles (à gauche) et un exemple de pavage fini qu’elles permettent de réaliser (à droite – les tuiles pouvant être tournées). Il s’agit d’un morceau du célèbre pavage de Penrose. Soulignons que les contraintes locales (ergots sur les côtés des tuiles) entraînent une contrainte globale : aucun pavage du plan par ces tuiles n’est invariant par translation, c’est-à-dire qu’ils sont tous *apériodiques*.

1. Ce pavage a d’ailleurs été inventé pour une entreprise fabriquant de véritables puzzles !

Ce problème de *transfert d'information* a été à l'origine de la théorie moderne des pavages, laquelle s'est depuis développée dans de nombreuses directions. Par exemple, en informatique théorique, les pavages ont notamment été étudiés pour le problème de *décidabilité* suivant, posé par Wang dans [112] : existe-t-il un programme qui, étant donné n'importe quel ensemble fini de tuiles, détermine s'il est possible de paver le plan avec ces tuiles ? La réponse s'est avérée négative à cause de l'existence d'ensembles de tuiles ne pouvant paver qu'apériodiquement le plan (voir, par exemple, [2, 13, 38, 47, 46, 97] et, bien sûr, le cas de la figure 1). Parallèlement, les pavages ont été étudiés d'un point de vue plus mathématique, notamment comme *systèmes dynamiques symboliques* particuliers, suffisamment simples pour être étudiés sans être pour autant trop simples (voir, par exemple, [96]). Enfin, en physique, les pavages servent à modéliser la structure de la matière, notamment des *quasi-cristaux*, dont la découverte expérimentale récente a contribué à relancer fortement l'intérêt porté aux pavages (voir, par exemple, [104]).

Outre cela, dans le cas particulier de la dimension un, il existe un lien fort entre pavages, fractions continues et géométrie discrète. Esquisons-en ici les idées principales. Notons d'abord que, dans ce cadre, les pavages sont des pavages de la droite, qui peuvent aussi être vus comme des mots (à chaque tuile correspond une lettre). On peut alors discrétiser une courbe du plan par une ligne brisée composée de segments unité, puis coder cette ligne brisée par un mot (chaque lettre codant un segment unité de direction particulière). Les outils de la combinatoire des mots que sont les morphismes ou les substitutions permettent alors d'agir sur ces codages de courbes discrètes. En particulier, on peut calculer le développement en fraction continue de la pente α d'une droite discrète (c'est-à-dire de la pente de la droite réelle qu'elle approche) de manière géométrique. En effet, sans supposer α connu, on détermine sa partie entière $[\alpha]$ simplement à partir des motifs du mot codant la droite, et on applique une transformation adéquate afin d'obtenir une droite de pente $T(\alpha)$, où T est l'application de Gauss utilisée pour calculer le développement en fraction continue d'un réel. Itérer ceci donne une suite de mots codant des droites discrètes et permet de calculer le développement en fraction continue de α . On peut ensuite étendre cela à des mots codant des courbes discrètes : à partir des motifs d'un tel mot, on calcule en procédant de même un développement en fraction continue. La question de savoir à quel réel correspond le développement ainsi calculé n'est pas claire, puisque la notion de pente n'est pas définie pour une courbe générale. Cependant, on montre que ce procédé permet de déterminer si la courbe discrète codée par un mot donné est une droite ou non : on parle de *reconnaissance de droite*. C'est un problème fondamental en géométrie discrète, lié à la vectorisation (ou polygonalisation) d'objets discrets : comment décomposer une courbe discrète complexe en un ensemble de morceaux de droites discrètes, plus simple à stocker. Il s'agit d'un problème très étudié (voir, par exemple, le survol [79]).

En dimensions supérieures, un tel lien entre pavages, fractions continues et géométrie discrète n'a jamais, à notre connaissance, été développé. Pourtant, d'une part, de nombreuses extensions multidimensionnelles des fractions continues ont été étudiées (voir, par exemple, [23, 103]) et, d'autre part, le problème de la *reconnaissance de plan* a reçu beaucoup d'attention en géométrie discrète (voir, par exemple, le récent survol [24]). Développer un tel lien est l'objectif principal de cette thèse. La suite de ce document est organisée comme suit.

Au chapitre 1, nous reprenons plus en détail le lien esquissé ci-dessus entre pavages unidimensionnels (ou mots), fractions continues et géométrie discrète. Notons que si la formulation retenue (notamment l'utilisation de morphismes et de substitutions) semble nouvelle, les idées exposées dans ce chapitre sont déjà connues. On passe ensuite en revue les différentes extensions multidimensionnelles des concepts utilisés dans le cas unidimensionnel (pavages, substitutions, fractions continues, reconnaissance de plan). À la lumière de ceci, on conclut ce chapitre par une description plus précise des résultats principaux de cette thèse.

Le chapitre 2 est consacré à la notion d'*application duale* d'une substitution ou d'un morphisme (on parle aussi de *substitution généralisée*). Il s'agit de transformations sur les pavages généralisant les substitutions et morphismes définis sur les mots (voir Fig. 2). La présentation commence par reprendre la construction donnée par P. Arnoux et S. Ito dans [6] et étendue par H. Ei dans [49], avant de proposer une définition légèrement plus générale. Soulignons que ces applications duales, malgré une relative complexité qui peut rebuter au premier abord, jouent un rôle absolument primordial dans toute cette thèse.

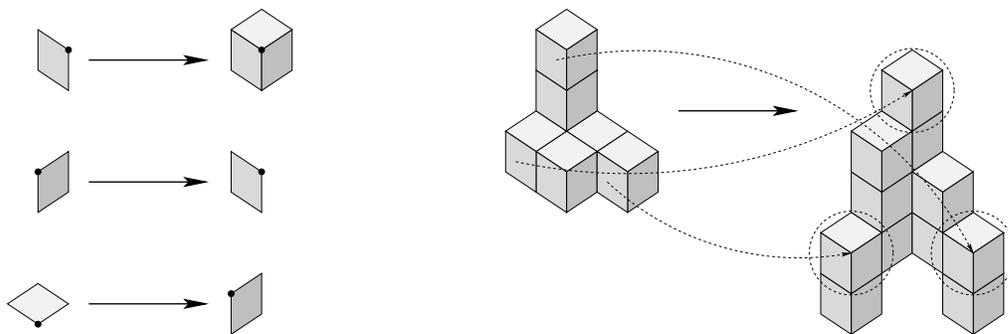


FIGURE 2 – Action d'une application duale sur quelques tuiles, appelées aussi *faces* (à gauche) et sur un ensemble de tuile un peu plus grand (à droite).

Les premiers résultats propres à cette thèse sont exposés au chapitre 3. On reprend la notion de *plan en escalier*, initialement introduite par L. Vuillon dans [111]. Un plan en escalier peut être vu comme un type particulier de pavage, dont

on montre le lien avec la notion de *plan arithmétique discret*, introduite par J.-P. Réveillès dans [98] (voir Fig. 3, à gauche). On caractérise alors l'action des applications duales sur les plans en escaliers. Plus précisément, nous donnons une condition nécessaire et suffisante simple pour que l'image d'un plan en escalier par l'application duale d'un morphisme soit un plan en escalier (Th. 3.4). En particulier, cette condition s'avère être toujours réalisée dans le cas d'une application duale de substitution. Ceci complète un premier résultat dans cette direction, donné dans [6], qui considérait le cas d'une application duale de substitution laissant invariant un plan en escalier, montrant que cette application était stable sur les morceaux de ce plan en escalier. Nous avons publié ce résultat d'abord dans la conférence [53] dans un cas particulier d'application duale de substitution, puis dans l'article [56] dans le cas général d'une application duale de substitution. Enfin, l'article [16] (soumis) traite le cas plus général d'une application duale de morphisme. La suite du chapitre montre alors comment utiliser l'algorithme de Brun – une extension multidimensionnelle particulière de l'algorithme de développement en fraction continue d'Euclide – pour calculer le développement du vecteur normal d'un plan en escalier *directement* sur ce plan. On parle, par abus, du *développement* de ce plan. Plus précisément, on calcule ce développement sans supposer connu le vecteur normal du plan en escalier en question, mais simplement en déduisant des configurations locales de ce plan les informations suffisantes à calculer ce développement. Une classe spéciale d'applications duales est utilisée à cette fin, ainsi que la notion de *palier*, que nous introduisons en généralisant une notion similaire définie pour les droites discrètes (voir Fig. 3, à gauche).

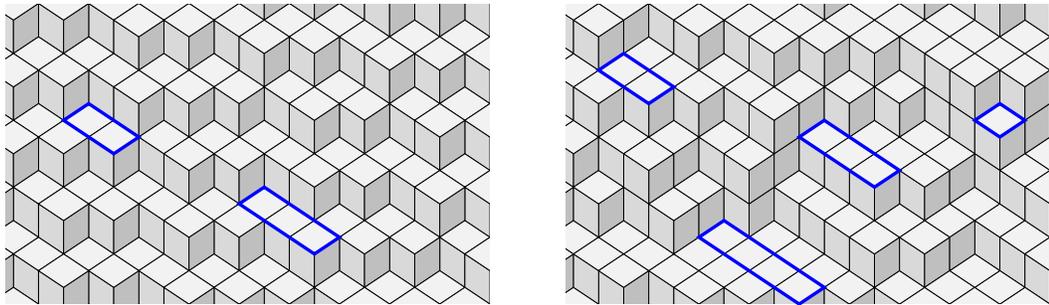


FIGURE 3 – Un *plan en escalier* (à gauche) ou une *surface en escalier* (à droite) peuvent être vus, dans l'espace, comme des discrétisations d'un plan ou d'une surface réels et, dans le plan, comme des pavages (par losanges). La notion de *paliers* (quelques exemples sont ici encadrés) permet de lire une information qui peut être reliée, dans le cas d'un plan en escalier, à son vecteur normal (le cas d'une surface en escalier étant plus difficile à interpréter).

Le chapitre 4 joue le rôle de charnière entre le chapitre 3 et le chapitre 5. On commence par rappeler la notion de *surface en escalier*, introduite par D. Jamet dans [71] et on montre quelques propriétés élémentaires associées. Intuitivement, une surface en escalier peut être vue soit comme un pavage de \mathbb{R}^{d-1} soit, en la “relevant à la Thurston” (voir [108]) comme une discrétisation d’une surface de \mathbb{R}^d . On introduit alors la notion de *flip* (voir Fig. 4). Le *flip* est utilisé en physique, notamment en mécanique statistique et dans l’étude de la formation des cristaux ou quasi-cristaux (ce terme sera défini au chapitre 1), pour modéliser les ré-arrangements locaux d’atomes. Dans le contexte des plans et surfaces en escalier, le flip s’avère une notion utile pour relier les premiers aux seconds, comme nous l’avons d’abord exposé dans [55]. En particulier, on montre que toute surface en escalier peut être obtenue en effectuant une suite de flips sur un plan en escalier (Th. 4.16). Nous avons publié ce résultat dans l’article [3]. Par ailleurs, mettant à profit le côté formel des plans et surfaces en escalier (par rapport aux cristaux, par exemple), on introduit une variante moins contrainte du flip, appelée *pseudo-flip*. Sans entrer ici dans les détails, soulignons simplement que cette notion permet des preuves plus faciles de résultats similaires (Th. 4.20 et 4.21). Nous avons décrit la notion de pseudo-flip et prouvé les résultats correspondants dans l’article [16].

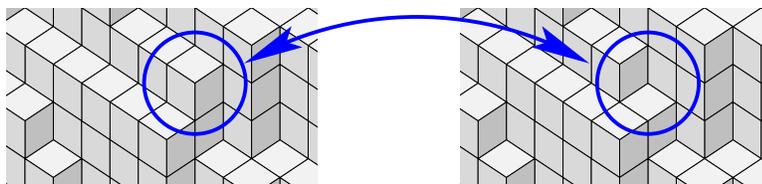


FIGURE 4 – Un *flip* est une transformation locale sur les surfaces en escalier. On peut le voir, dans l’espace, comme l’ajout ou la suppression d’un cube unité (un *voxel*) ou, dans le plan, comme un échange de tuiles.

Le chapitre 5 est en quelque sorte l’extension du chapitre 3 au cas des surfaces en escalier. On commence par caractériser l’action des applications duales sur les surfaces en escalier. Plus précisément, nous donnons une condition nécessaire et suffisante simple pour que l’image d’un plan en escalier par l’application duale d’un morphisme soit un plan en escalier (Th. 5.3). Ce résultat a été publié dans [3] dans le cas d’une application duale d’une substitution, puis détaillé dans [16] (soumis), dans le cas général d’une application duale d’un morphisme. On montre ensuite que le procédé consistant à calculer le développement d’un plan à partir de configurations locales – les *paliers* – peut être étendu aux surfaces en escalier, ceci bien qu’une surface en escalier n’ait généralement pas de vecteur normal, contrairement

à un plan en escalier. Une question naturelle est alors de savoir quelles surfaces en escalier ont le même développement qu'un vecteur réel donné, outre le plan en escalier qui a ce vecteur pour vecteur normal. Une réponse en termes de *quasi-plan en escalier* est apportée (Th. 5.14 et 5.20). Une version partielle de ce résultat se trouve dans l'article [16] (soumis).

Au chapitre 6, on montre comment appliquer les résultats des chapitres précédents en géométrie discrète, plus précisément en ce qui concerne les problèmes de la génération et de la reconnaissance de plans discrets (rôle joué par les plans en escalier). On expose trois techniques différentes pour engendrer un plan en escalier. La première consiste à itérer une application duale sur un morceau fini de plan en escalier, et à engendrer ainsi – sous certaines conditions – des morceaux de plus en plus grands de ce plan (Th. 6.9). Ce résultat a été publié dans [56]. La seconde technique repose sur les résultats du chapitre 5 : itérer une application duale adéquate sur une surface en escalier, donne – sous certaines conditions – une suite de surfaces en escalier convergeant vers le plan en escalier désiré (Th. 6.10). Enfin, la dernière technique consiste à engendrer un plan dont le vecteur normal a des coordonnées rationnelles à partir d'un *domaine fondamental*, c'est-à-dire d'un morceau de plan fini engendrant tout ce plan par périodicité. On montre comment construire un domaine fondamental de taille minimale grâce aux applications duales associées au développement en fraction continue du vecteur normal du plan que l'on veut engendrer (6.14). Ce résultat a été publié dans [58]. En ce qui concerne la reconnaissance de plan, on décrit un algorithme qui généralise la méthode de reconnaissance de droite esquissée plus haut : on calcule le développement d'une surface en escalier (en fait, plus généralement, de ce qu'on appellera *fonction binaire*) et on en déduit sa nature – plan en escalier ou non (Th. 6.25). La complexité d'un tel algorithme est discutée, bien que nous ne proposons pour l'instant qu'une borne théorique, qu'il resterait à confronter à la pratique. Ce résultat a été publié dans [58].

Nous concluons ce mémoire par un bref chapitre consacré à décrire quelques résultats obtenus pendant cette thèse mais non présentés dans les chapitres précédents. Ces résultats posent les jalons de futures recherches liées à la problématique de cette thèse. Soulignons que certains d'entre eux ont déjà été publiés (voir [21, 22, 52, 54, 57]).

Chapitre 1

Contexte et contenu

1.1 Combinatoire des mots et géométrie discrète

1.1.1 Mots, groupe libre et morphismes

Ce paragraphe rappelle brièvement les concepts de base de la combinatoire des mots. Le lecteur intéressé par une introduction plus détaillée (notamment en ce qui concerne des références historiques) pourra, par exemple, se référer au premier chapitre de [83], ou aux livres [93, 95].

Un *alphabet* \mathcal{A} est un ensemble, supposé fini ici, de symboles appelés lettres. Sans restriction de généralité, on peut supposer $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$. Un *mot* w de *longueur* k sur l'alphabet \mathcal{A} est alors une *concaténation* de k lettres a_1, \dots, a_k de \mathcal{A} , notée $w = a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$ ou $w = a_1 a_2 \cdots a_k$. On note $|w|$ la longueur de w et $|w|_i$ le nombre d'occurrences de la lettre i dans le mot w . Par exemple, $w = 12112$ est un mot de longueur 5 sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2\}$, et on a $|w|_1 = 3$ et $|w|_2 = 2$. Plus généralement, la concaténation de deux mots u et v est le mot noté $u \cdot w$ ou uv : c'est la concaténation des lettres de u et de celles de v . On note alors u^k la concaténation de k copies du mot u . Enfin, on note ε le mot vide, c'est-à-dire tel que $w \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w = w$. Tout ce qui précède confère une structure de *monoïde* à l'ensemble des mots sur \mathcal{A} : on note \mathcal{A}^* ce monoïde. On peut aussi considérer les concaténations infinies de lettres, appelées mots infinis : on note \mathcal{A}^ω l'ensemble des mots finis et infinis.

Introduisons encore quelques notions classiques en combinatoire des mots. Un mot v est un *facteur* d'un mot w s'il existe deux mots u_1 et u_2 tels que $w = u_1 v u_2$. Si, de plus, $u_1 = \varepsilon$ (resp. $u_2 = \varepsilon$), on dit que v est un *préfixe* (resp. *suffixe*) de w . On note $L_k(w)$ l'ensemble des facteurs de longueur k de w et $L(w)$ l'ensemble de tous les facteurs de w . L'ensemble $L(w)$ est appelé le *langage* de w . Par exemple, on calcule :

$$L(12112) = \{\varepsilon, 1, 2, 12, 21, 11, 121, 211, 112, 1211, 2112, 12112\}.$$

Ceci permet, par exemple, de comparer des mots en comparant leurs langages (soulignons que deux mots infinis ayant le même langage ne sont pas forcément égaux).

Une autre façon de comparer les mots est d'introduire une *distance* sur l'ensemble des mots finis ou infinis. Plus précisément, on dit que deux mots distincts sont à distance 2^{-n} si leur plus grand préfixe commun est de taille n . Par exemple, les mots 12112 et 12122 sont à distance 2^{-3} car leur plus grand préfixe commun est le mot 121, de longueur 3. Cette notion de distance permet aussi de parler de *convergence*. Par exemple, la suite de mots $((12)^n)_{n \geq 0}$ converge vers le mot infini noté $(12)^\omega$, qui commence par la lettre 1 et alterne les lettres 1 et 2.

Ce qui précède a donc permis d'introduire la notion de mot, ainsi que le monoïde associé. On peut alors vouloir inclure les mots dans un ensemble plus grand ayant une structure de groupe. Plus précisément, le *groupe libre sur d éléments*, noté F_d , est le groupe engendré par l'alphabet $\{1, \dots, d\}$ pour la loi de concaténation, avec le mot vide ε comme élément neutre. Les éléments de F_d sont donc les concaténations de lettres de $\{1, \dots, d\}$ élevées à des puissances de \mathbb{Z} , les mots correspondant au cas particulier où toutes ces puissances sont positives. Soulignons qu'un élément de F_d admet plusieurs écritures : on appelle *écriture réduite* celle où aucune lettre n'est directement suivie de son inverse. On note $|w|_i$ la somme des puissances des occurrences de la lettre i dans w (on vérifie facilement que cette valeur ne dépend pas de l'écriture choisie). Par exemple, $w = 2^{-1}1211^{-1}$ est un élément de F_d dont l'écriture réduite est $w = 2^{-1}12$; on a $|w|_1 = 1$ et $|w|_2 = 1 - 1 = 0$.

Tant la structure de monoïde que celle de groupe libre conduisent naturellement à la notion de morphisme. Par exemple, on définit un endomorphisme τ du groupe libre à deux éléments F_2 par :

$$\tau : \begin{cases} 1 & \mapsto 2, \\ 2 & \mapsto 2^{-1}1, \end{cases}$$

et on calcule :

$$\tau(12^21^{-1}) = \tau(1)\tau(2)^2\tau(1)^{-1} = 22^{-1}12^{-1}12^{-1} = 12^{-1}12^{-1}.$$

Un morphisme tel que les images de chaque lettre ne contiennent que des puissances positives de lettres est dit *positif* (en particulier, c'est le cas des endomorphismes du monoïde des mots). Si, de plus, il n'envoie aucune lettre sur l'élément neutre ε , c'est-à-dire s'il est *non-effaçant*, on parle de *substitution*. Par exemple, le morphisme suivant est une substitution :

$$\sigma : \begin{cases} 1 & \mapsto 12 \\ 2 & \mapsto 1 \end{cases}$$

Enfin, un morphisme σ est un *automorphisme* s'il existe un morphisme noté σ^{-1} tel que $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id$. Par exemple, les morphismes τ et σ définis plus haut sont des automorphismes puisqu'on vérifie qu'ils sont inverses l'un de l'autre :

$$\begin{aligned}\sigma \circ \tau(1) &= \sigma(2) = 1, \\ \sigma \circ \tau(2) &= \sigma(2^{-1}1) = \sigma(2)^{-1}\sigma(1) = 1^{-1}12 = 2, \\ \tau \circ \sigma(1) &= \tau(12) = \tau(1)\tau(2) = 22^{-1}1 = 1, \\ \tau \circ \sigma(2) &= \tau(1) = 2.\end{aligned}$$

Une notion importante associée aux morphismes est celle de *matrice d'incidence*. Rappelons d'abord que l'*application de Parikh*, notée \mathbf{f} , est l'application du groupe libre F_d dans \mathbb{Z}^d définie par :

$$\mathbf{f}(w) = (|w|_1, \dots, |w|_d). \quad (1.1)$$

Par exemple, on calcule :

$$\mathbf{f}(2^{-1}1211^{-1}) = \mathbf{f}(2^{-1}12) = (1, 0).$$

La matrice d'incidence d'un morphisme σ est alors la matrice entières $d \times d$, notée M_σ , dont la i -ème colonne est le vecteur $\mathbf{f}(\sigma(i))$. Par exemple, les morphismes τ et σ précédemment définis ont pour matrices d'incidences :

$$M_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons qu'il découle de cette définition que, pour tout élément $w \in F_d$, on a :

$$\mathbf{f}(\sigma(w)) = M_\sigma \mathbf{f}(w). \quad (1.2)$$

On vérifie aussi facilement que pour tous morphismes σ et τ , on a :

$$M_{\sigma \circ \tau} = M_\sigma M_\tau. \quad (1.3)$$

On en déduit que la matrice d'incidence d'un morphisme inversible σ est l'inverse de la matrice d'incidence de σ^{-1} , puisqu'on a :

$$M_\sigma M_\sigma^{-1} = Id = M_{\sigma \circ \sigma^{-1}} = M_\sigma M_{\sigma^{-1}}.$$

En particulier, la matrice d'incidence d'un automorphisme a pour inverse une matrice à coefficients entiers : elle appartient donc au groupe multiplicatif $GL(d, \mathbb{Z})$, qui est le groupe des matrices à coefficients entiers et à déterminant égal à ± 1 . Il n'est pas difficile de voir que la réciproque est fautive. Par exemple, on vérifie que le morphisme suivant n'est pas inversible, bien que sa matrice d'incidence ait un déterminant égal à 1 :

$$\rho : \begin{cases} 1 \mapsto 112, \\ 2 \mapsto 21. \end{cases}$$

Plus généralement, on appelle *morphisme unimodulaire* un morphisme dont la matrice d'incidence appartient à $GL(d, \mathbb{Z})$. Tout automorphisme est donc un morphisme unimodulaire, mais seuls certains morphismes unimodulaires sont des automorphismes. Mentionnons cependant le résultat partiel suivant : dans le cas $d = 2$, il est montré dans [113] qu'une substitution est inversible si et seulement si elle s'écrit comme une composition des trois substitutions suivantes :

$$1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, \quad 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1, \quad 1 \mapsto 21, 2 \mapsto 1.$$

L'intérêt des morphismes relativement aux mots ou aux éléments du groupe libre est au moins double : ils permettent de les *engendrer* par itérations successives, ainsi que de les *classifier* selon que telle ou telle propriété est vérifiée ou non. Par exemple, la substitution $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1$ permet de définir la suite de mots $(\sigma^n(1))_{n \geq 0}$ dont les premiers termes sont :

$$1, 12, 121, 12112, 12112121, 1211212112112, \dots$$

Ici, on montre facilement que $\sigma^{n+2}(1) = \sigma^{n+1}(1)\sigma^n(1)$. On en déduit que la suite $(\sigma^n(1))_{n \geq 0}$ converge vers un mot infini u (appelé traditionnellement *mot de Fibonacci*) de la forme :

$$u = 1211212112112121121211212112121121211212112121121211212112121121211212112112 \dots \quad (1.4)$$

Le mot u vérifie $\sigma(u) = u$: c'est un point fixe de σ . Plus généralement, un mot est dit *substitutif* si c'est l'image par un morphisme d'un mot point fixe d'une substitution. Intuitivement, ce sont les mots qu'on peut effectivement engendrer (sous certaines conditions, voir, par exemple, le premier chapitre de [93]). Notamment, ceci permet une classification (parmi d'autres) des mots infinis : ceux qui sont substitutifs et ceux qui ne le sont pas. D'autres critères de classification, comme la *s-adicité*, se définissent aussi à partir de substitutions (voir, par exemple, le chapitre 12 de [93]).

1.1.2 Mots sturmiens et fractions continues

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à une classe particulière de mots, les *mots sturmiens*, dont on rappelle la définition et dont on donne quelques propriétés remarquables. Les mots sturmiens sont très étudiés, non seulement parce qu'ils sont simples sans être triviaux, mais aussi parce qu'ils possèdent de nombreuses propriétés permettant d'établir des liens entre des domaines *a priori* différents (on peut citer, par exemple, les problèmes de routages dans les réseaux, voir [1, 64]). Comme au paragraphe précédent, le lecteur intéressé par une présentation plus détaillée des mots sturmiens pourra se référer, par exemple, au second chapitre de [83] ou au sixième chapitre de [93].

La définition la plus connue d'un mot sturmien est sans doute la suivante : un mot sturmien est un mot infini sur deux lettres qui, pour tout n , admet exactement

$n + 1$ facteurs distincts de taille n . Cette définition combinatoire, donnée par Coven et Hedlund dans [34], est équivalente à de nombreuses autres définitions, notamment en termes de mot *balancé*, de discrétisation de droite ou de codage de rotation (voir, par exemple, le survol historique détaillé dans les notes du second chapitre de [83]). Notons que le mot infini donné par l'équation (1.4) semble¹ sturmien puisqu'on calcule :

$$\begin{aligned} L_1(u) &= \{1, 2\}, \\ L_2(u) &= \{12, 21, 11\}, \\ L_3(u) &= \{121, 212, 211, 112\}, \\ L_4(u) &= \{1211, 2112, 1121, 1212, 2121\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

On verra plus tard qu'il est effectivement sturmien. Avant ceci, détaillons un peu les définitions équivalentes données en termes de codage de rotation ou de discrétisation de droite.

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore unidimensionnel. La rotation d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ est l'application R_α de \mathbb{T} dans lui-même qui à un point ρ associe le point $\rho + \alpha$. Considérons la partition du tore \mathbb{T} formée des deux intervalles $[0, 1 - \alpha[$ et $[1 - \alpha, 1[$. La *trajectoire* (ou *orbite*) d'un point ρ du tore, c'est-à-dire la suite $(R_\alpha^n(\rho))_n$, est alors codée par le mot $s_{\alpha, \rho}$ dont la $n^{\text{ème}}$ lettre vaut 1 si $R_\alpha^n(\rho) \in [0, 1 - \alpha[$, et 2 sinon. Un tel mot est aussi appelé *mot de Christoffel* ([33]). Il n'est pas difficile de voir qu'il est périodique si et seulement si α est rationnel, tandis que le cas irrationnel correspond aux mots sturmiens. Par exemple, on montre que le mot de Fibonacci de l'équation (1.4) code une rotation d'angle $\alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \simeq 0.382$: il est donc sturmien. De plus, on déduit facilement de cette définition que tout mot sturmien s possède des *fréquences*, c'est-à-dire que, pour tout lettre i , la limite suivante existe :

$$\text{freq}_i(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_n|_i}{n},$$

où s_n désigne le préfixe de taille n de s . Plus précisément, les fréquences d'apparition des lettres 1 et 2 sont proportionnelles à la taille des intervalles $[0, 1 - \alpha[$ et $[1 - \alpha, 1[$:

$$\text{freq}_1(s_{\alpha, \rho}) = 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \text{freq}_2(s_{\alpha, \rho}) = \alpha.$$

Par exemple, environ 61.8% des lettres du mot de Fibonacci (Eq. (1.4)) sont des 1.

On peut aussi définir les mots sturmiens (ou mots de Christoffel) de façon plus géométrique, comme étant des codages de discrétisations de droites. C'est surtout cette définition qui guidera notre intuition dans le reste de la thèse. Il y a plusieurs

1. Du moins si l'on se réfère à la partie forcément finie qui en est donnée

définitions similaires, nous n'en détaillons ici qu'une seule. Considérons, dans le plan euclidien, une droite réelle de pente α et d'intercept ρ (la hauteur à l'origine). Sans restriction de généralité, on suppose $\alpha \in [0, 1]$ (les autres cas de figure s'y ramenant par des symétries simples). On peut alors approcher cette droite par la ligne brisée que forme la frontière de l'union des carrés unités de sommets dans \mathbb{Z}^2 qui intersectent le demi-plan situé sous cette droite. La figure 1.1 illustre cela.

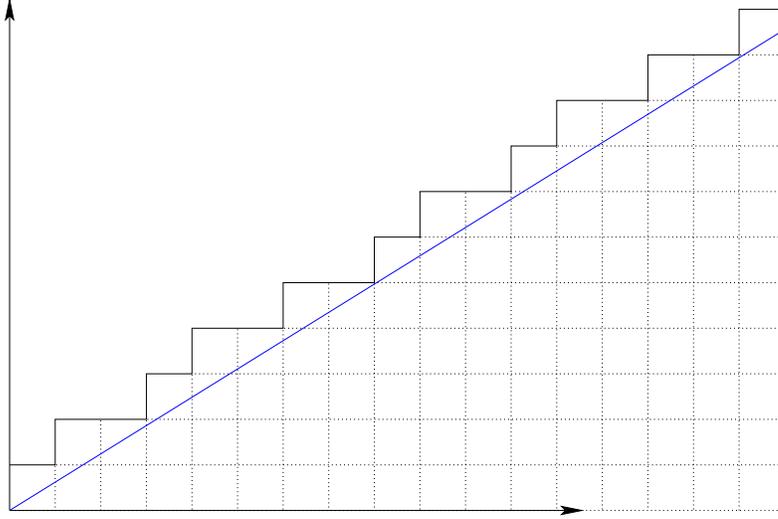


FIGURE 1.1 – Discrétisation d'une droite de pente $(\sqrt{5} - 1)/2$ et d'intercept 0 par la frontière de l'union des carrés unités intersectant le demi-plan sous la droite (représentés en pointillés). C'est une ligne brisée formée de deux types de segments.

On peut alors coder une telle discrétisation de droite par un mot, les segments horizontaux et verticaux étant codés par deux lettres différentes, par exemple, respectivement 1 et 2 (on parle de *code de Freeman* ou de *chain code*). Notons $u_{\alpha, \rho}$ le codage de la droite de pente α et d'intercept ρ . Les formules suivantes (voir, par exemple, [85] ou le second chapitre de [83]) permettent alors de passer facilement du codage d'une droite à celui d'une rotation, et inversement :

$$s_{\alpha, \rho} = u_{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \rho(1+\alpha)} \quad \text{et} \quad u_{\alpha, \rho} = s_{\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\rho}{1+\alpha}}. \quad (1.5)$$

Par exemple, le codage de la droite représentée Fig. 1.1 est le mot de Fibonacci.

Intéressons-nous maintenant à l'action des substitutions sur ces codages de droites (ou de rotations). Plus particulièrement, intéressons-nous aux substitutions qui envoient tout mot sturmien sur un mot sturmien : les *substitutions sturmiennes*. Ces substitutions correspondent exactement aux substitutions inversibles (voir [15]).

On montre alors, étant donnée une telle substitution σ et un mot $u_{\alpha,\rho}$:

$$\sigma(u_{\alpha,\rho}) = u_{\beta,\rho/\lambda} \quad \text{où} \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = M_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

En particulier, on en déduit que si un mot sturmien $u_{\alpha,\rho}$ est point fixe d'une substitution², alors $(1, \alpha)$ est un vecteur propre de la matrice d'incidence M_σ de σ , et donc α est un nombre quadratique (c'est-à-dire la solution d'un polynôme entier de degré 2). Par exemple, on calcule :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix},$$

ce qui montre que $(1, (\sqrt{5}-1)/2)$ est bien un vecteur propre de la matrice d'incidence de la substitution $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1$ dont le mot de Fibonacci est un point fixe (voir paragraphe précédent). Une question naturelle est alors de savoir si la réciproque est vraie, c'est-à-dire si un mot sturmien de pente quadratique est point fixe d'une substitution. Une première réponse a été donnée dans [37], où il est montré :

Théorème 1.1 ([37]) *Un mot sturmien $u_{\alpha,\alpha}$ est point fixe d'une substitution si et seulement si sa pente α est un nombre de Sturm, c'est-à-dire un irrationnel quadratique dont le conjugué algébrique n'appartient pas à l'intervalle $[0, 1]$.*

Rappelons qu'un nombre quadratique est une racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients entiers et que son conjugué algébrique est l'autre racine de ce polynôme. Plus généralement, il a été prouvé dans [115] :

Théorème 1.2 ([115]) *Un mot sturmien $u_{\alpha,\rho}$ est substitutif (image par un morphisme d'un point fixe de substitution) si et seulement si sa pente α est un nombre irrationnel quadratique et son intercept ρ est dans l'extension de corps $\mathbb{Q}(\alpha)$.*

Rappelons que l'extension de corps $\mathbb{Q}(\alpha)$ est l'ensemble des réels de la forme $p + q\alpha$, où p et q sont des rationnels. Les preuves de ces théorèmes sont relativement techniques. Montrons ici un résultat un peu moins général dont la preuve, bien que plus simple, donne une bonne idée des techniques utilisées pour prouver les résultats ci-dessus. De plus, c'est ce résultat qui sera généralisé en dimension supérieure au chapitre 6. Plus précisément, montrons la proposition suivante :

Proposition 1.3 *Si α est un nombre irrationnel quadratique réduit, c'est-à-dire dont le conjugué algébrique est strictement inférieur à -1 , alors le mot sturmien $u_{\alpha,0}$ est point fixe d'une substitution.*

2. Substitution alors nécessairement sturmiennne, car il est montré dans [15] qu'envoyer un mot sturmien sur un mot sturmien est équivalent à envoyer tout mot sturmien sur un mot sturmien.

Rappelons d'abord brièvement la notion de fraction continue (pour un exposé plus détaillé, le lecteur peut se référer, par exemple, à [76]). L'application de Gauss $T :]0, 1] \rightarrow [0, 1[$ est définie par :

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

On associe alors à tout réel $\alpha \in [0, 1]$ une suite d'entier $(a_n)_{n \geq 1}$, définie tant que $T^n(\alpha) \neq 0$ par :

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^n(\alpha)} \right\rfloor.$$

On voit alors facilement qu'on a :

$$\alpha = \frac{1}{a_0 + T(\alpha)} = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + T^2(\alpha)}} = \dots$$

Ceci explique le terme de *développement en fraction continue* donné à la suite $(a_n)_n$. Il est commode d'introduire la notation suivante :

$$[a_1] = \frac{1}{a_1} \quad \text{et} \quad [a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{1}{a_1 + [a_2, \dots, a_n]}.$$

Par exemple, on a :

$$[7, 15, 1] = \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = 16/113 = 0,14159292.$$

On montre que si $\alpha \in [0, 1]$ est rationnel, alors il a un développement en fraction continue fini $(a_n)_{1 \leq n \leq N}$ tel que $\alpha = [a_1, \dots, a_N]$, et que si α est irrationnel, alors il a un développement en fraction continue infini $(a_n)_{n \geq 1}$ tel que :

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_1, \dots, a_n].$$

On voit donc l'intérêt des fractions continues : approcher un nombre réel par une suite de rationnels. Par exemple, le rationnel $[7, 15, 1]$ donné ci-dessus est obtenu à partir des trois premiers termes du développement en fraction continue de $\pi - 3$. Notons qu'on peut montrer que, pour tout n , le rationnel $[a_1, \dots, a_n]$ est, parmi les rationnels de dénominateur inférieur ou égal, le plus proche de α . En ce sens, on parle de *meilleure approximation*.

On peut aussi donner une formulation matricielle de l'action de l'application de Gauss. On vérifie qu'en posant $a = \lfloor \alpha^{-1} \rfloor$, on a :

$$\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ T(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Introduisons maintenant, pour tout entier $a \geq 1$ la substitution suivante, dont la matrice d'incidence est la matrice apparaissant dans l'équation précédente :

$$\beta_a : \begin{cases} 1 & \mapsto 1^a 2, \\ 2 & \mapsto 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

On déduit alors de l'équation (1.6) que, pour $a = \lfloor \alpha^{-1} \rfloor$, β_a envoie un mot sturmien de pente $T(\alpha)$ sur un mot sturmien de pente α :

$$\beta_a(u_{T(\alpha), \rho}) = u_{\alpha, \alpha \rho}.$$

Il s'ensuit que si un réel α a un développement en fraction continue périodique de la forme $[\overline{a_1, \dots, a_p}]$, alors $u_{\alpha, 0}$ est un point fixe de la substitution $\sigma = \beta_{a_1} \circ \dots \circ \beta_{a_p}$. La proposition 1.3 découle alors du théorème de Galois pour les fractions continues :

Théorème 1.4 ([63]) *Un réel de l'intervalle $[0, 1]$ a un développement en fraction continue périodique si et seulement si c'est un irrationnel quadratique réduit.*

Exemple 1.5 *Soit $\alpha = \sqrt{3} - 1 \simeq 0.732$. Le réel α est une racine irrationnelle du polynôme $(X + 1)^2 - 3$ de conjugué algébrique $-\sqrt{3} - 1 < -1$. On sait donc que le développement en fraction continue de α est purement périodique. On calcule :*

$$\sqrt{3} - 1 = [\overline{1, 2}].$$

Le mot sturmien $u_{\alpha, 0}$ est donc point fixe de la substitution τ définie par :

$$\tau = \beta_1 \circ \beta_2 : \begin{cases} 1 & \mapsto 12121, \\ 2 & \mapsto 12. \end{cases}$$

On a alors :

$$u_{\alpha, 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau^n(1) = 1212112121211121212111212121112121211212121121211 \dots$$

Comme $u_{\alpha, 0} = s_{\frac{\alpha}{1+\alpha}, 0}$ (Eq. 1.5), ce mot comporte $1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} \simeq 57.7\%$ de lettres 1.

Ces résultats montrent donc qu'il existe un lien fort entre les mots sturmiens et les fractions continues. Mentionnons qu'une caractérisation analogue existe pour les mots sturmiens *bi-infinis*, c'est-à-dire les mots indexés par \mathbb{Z} obtenus en discrétisant une droite irrationnelle (voir, par exemple, [12]).

1.1.3 Reconnaissance de droite discrète

Dans ce paragraphe, nous montrons que le lien entre mots sturmiens et fractions continues se retrouve dans une opération fondamentale en géométrie discrète : la reconnaissance de droite discrète.

Parmi les différents façons de définir une droite discrète, celle introduite par Réveillé dans [98] est une des plus générales. Plus précisément, la *droite arithmétique discrète de pente $\alpha \geq 0$, d'intercept $\rho \in \mathbb{R}$ et d'épaisseur $\omega > 0$* est l'ensemble des points (x, y) de \mathbb{Z}^2 vérifiant :

$$\rho \leq \alpha y - x < \rho + \omega.$$

Il s'agit d'une discrétisation de la droite réelle d'équation $\alpha y - x = \rho$. Les nombres α , ρ et ω sont appelés *paramètres* de cette droite discrète. La figure 1.2 illustre cela.

Le problème de la reconnaissance de droite est alors le suivant : étant donné un ensemble de points de \mathbb{Z}^2 , décider s'il s'agit d'un sous-ensemble d'une droite arithmétique discrète, et si oui, quels paramètres admet cette droite (en général, ces paramètres ne sont pas uniques). Soulignons que la reconnaissance de droite est un premier pas vers la polygonalisation d'objets discrets, c'est-à-dire le calcul d'une représentation par union de morceaux de droite discrète d'un sous-ensemble donné de \mathbb{Z}^2 . L'intérêt de cette représentation est qu'elle est généralement plus compacte que le sous-ensemble correspondant de \mathbb{Z}^2 .

On peut trouver une taxonomie des divers algorithmes de reconnaissance dans [79]. Ici, nous distinguerons essentiellement deux type d'approches. Le premier type d'approche consiste, pour décider si un ensemble E donné de points est un morceau de droite discrète, à construire une suite croissante $(E_k)_k$ de sous-ensembles de E et à calculer, pour chaque k , les paramètres possibles des droites dont la discrétisation contient E_k – on parle de paramètres *acceptables*. Ainsi, si on obtient un ensemble non vide de paramètres acceptables à la fin, c'est-à-dire quand $E_k = E$, alors on a bien reconnu E . Sinon, c'est que, pour un k donné, l'ensemble des paramètres acceptables associés à E_k était vide. C'est alors *a fortiori* le cas pour l'ensemble des paramètres acceptables associés à E , et on a donc “reconnu” E : il ne s'agit pas d'un morceau de droite discrète. Ce type d'approche est fondamentalement *incrémental* : la reconnaissance peut se faire en passant un à un en revue les points de E (il suffit de définir E_{k+1} en ajoutant un point de $E \setminus E_k$ à E_k). C'est, par exemple, le type d'approche développée dans [27, 36, 42].

Un autre type d'approche est celui généralement désigné par le terme *techniques linguistiques*. Décrivons-en le principe général. On a vu qu'une droite discrète peut, sous certaines conditions, être codée par un mot. C'est, par exemple, le cas d'une droite arithmétique discrète de pente α et d'épaisseur $\omega = 1 + \alpha$ (une telle droite

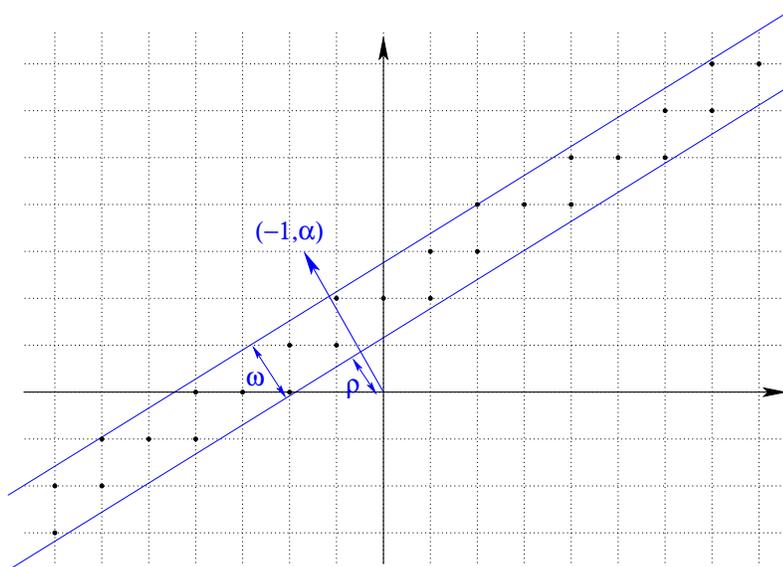


FIGURE 1.2 – Droite arithmétique discrète de pente α , d’intercept ρ et d’épaisseur ω (points en gras).

est dite *standard*) : les segments unitaires reliant les points de la droite discrète forment une ligne brisée qu’on peut coder par un mot sur deux lettres – une lettre pour les segments horizontaux et une pour les segments verticaux. La figure 1.3 (à gauche) illustre ceci. On retrouve en fait une construction similaire à celle des mots sturmiens du paragraphe précédent, la seule différence étant qu’on obtient ici des mots bi-infinis. On note encore $u_{\alpha,\rho}$ le mot bi-infini codant la droite arithmétique discrète de pente α , d’intercept ρ et d’épaisseur $\omega = 1 + \alpha$. Le point clé consiste alors à remarquer que, inversement, un mot sur deux lettres peut toujours être vu comme le codage d’une ligne brisée du plan, c’est-à-dire une sorte de discrétisation de courbe. La figure 1.3 (à droite) illustre ceci. Le problème de la reconnaissance de droite devient alors le suivant : étant donné un mot sur deux lettres, code-t-il une droite discrète, et si oui, laquelle ou lesquelles. Ceci conduit alors à des techniques récursives de reconnaissance de motifs. Plus précisément, les approches de ce type fonctionnent comme ceci : étant donné un mot, on teste ses configurations locales pour vérifier s’il “semble” coder une droite, puis, si c’est le cas, on recode ce mot en un nouveau mot duquel on testera à nouveau les configurations locales, et ainsi de suite. Le principe est de définir un recodage qui, d’une part, laisse invariant la propriété “coder une droite discrète” et, d’autre part, permet d’affiner le test à chaque étape. C’est, par exemple, le type d’approche développé dans [35, 44, 61, 109, 114]. Intuitivement, une telle approche serait plutôt adaptée à une reconnaissance “floue”, ce qui peut être intéressant d’un point de vue applicatif (voir, par exemple, [40, 41], même si la notion de “flou” est différente).

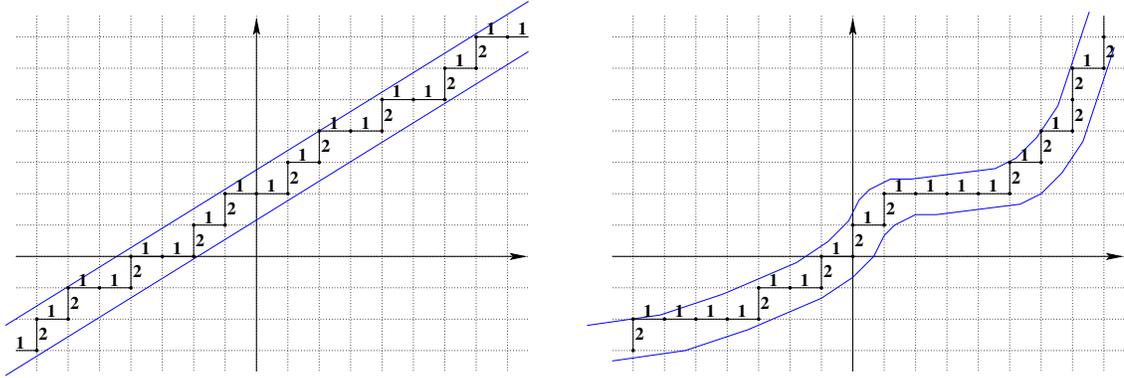


FIGURE 1.3 – Codage d’une droite arithmétique discrète standard par un mot sur deux lettres (à gauche). Inversement, tout mot sur deux lettres peut être vu comme le codage d’une sorte de “courbe discrète standard” (à droite).

La suite de ce paragraphe est consacrée à décrire plus en détail une telle approche. Plus précisément, on reprend l’approche exposée dans [109], que l’on reformule ici avec la terminologie introduite dans les deux paragraphes précédents. Cette reformulation permet de préparer l’extension multidimensionnelle, qui est au cœur des chapitres suivants. La présentation qui suit est relativement informelle, passant sous silence certains détails techniques pour essayer de mieux faire ressortir les idées directrices.

Étant donné un mot u , il est difficile de déterminer directement s’il code une droite, mais il est par contre facile (on verra comment) de déterminer, en supposant qu’il code une droite de pente α , la quantité $\lfloor 1/\alpha \rfloor$. Or, bien qu’incomplète, cette information suffit à faire une étape du développement en fraction continue de α . On va donc tenter de calculer le développement en fraction continue de la “pente” de u (sachant que cette pente n’est pas nécessairement définie puisque le mot u ne code pas forcément une droite). On montre alors que cette tentative échoue (c’est-à-dire qu’on ne peut plus recoder le mot obtenu à une certaine étape) si et seulement si u ne code pas une droite. L’outil fondamental pour recoder le mot sont les substitutions β_a définies par l’équation (1.7). Ces substitutions s’avèrent inversibles, et on calcule :

$$\beta_a^{-1} : \begin{cases} 1 \mapsto 2, \\ 2 \mapsto 2^{-a}1. \end{cases} \quad (1.8)$$

On déduit alors de l’équation (1.6) que, pour $a = \lfloor 1/\alpha \rfloor$, on a :

$$\beta_a^{-1}(u_{\alpha, \alpha\rho}) = u_{T(\alpha), \rho}. \quad (1.9)$$

Ceci va donc nous permettre de calculer le développement en fraction continue de la pente (présumée) d’un mot, à condition de savoir “lire” la quantité $a = \lfloor 1/\alpha \rfloor$

directement sur ce mot. On utilise la notion de *palier* (voir, par exemple, [79]). Un palier de longueur k est une suite maximale de k lettres identiques consécutives. Par exemple, le mot bi-infini suivant a des paliers de 1 de longueurs 2 et 3 :

$$u = \dots 11211211211211211211211211211211 \dots$$

Notons $a(u)$ la longueur du plus court palier de 1 d'un mot bi-infini u . On montre :

$$\forall \alpha \in]0, 1], \forall \rho \in \mathbb{R}, a(u_{\alpha, \rho}) = \lfloor 1/\alpha \rfloor. \quad (1.10)$$

Ainsi, un mot u code une droite de pente $\alpha > 0$ si et seulement si $\beta_{a(u)}^{-1}(u)$ code une droite de pente $T(\alpha)$. En particulier, $\beta_{a(u)}^{-1}(u)$ n'est pas un mot (c'est-à-dire comporte des lettres élevées à des puissance négatives) dans exactement deux cas : si u ne code pas une droite ou s'il code une droite de pente nulle ou supérieure à 1. Dans tout ce qui suit, on se place dans le cas d'un mot ne comportant jamais deux lettres 2 consécutives.³ En particulier, ceci exclut les codes de droites de pente strictement supérieure à 1. On déduit alors de ce qui précède l'algorithme suivant :

-
1. $u_0 \leftarrow$ mot bi-infini sur deux lettres ;
 2. $n \leftarrow 0$;
 3. **tant que** u_n est un mot **faire**
 4. $a_n \leftarrow a(u_n)$;
 5. calculer $u_{n+1} = \beta_{a_n}^{-1}(u_n)$;
 6. $n \leftarrow n + 1$;
 7. **fin tant que** ;
 8. **si** u_n ne comporte que des 1
 9. **renvoyer** “ u_0 code une droite” ;
 10. **sinon**
 11. **renvoyer** “ u_0 ne code pas une droite” ;
 12. **fin si**
-

Notons que cet algorithme ne donne pas, dans le cas où il reconnaît un mot codant une discrétisation de droite, l'ensemble des paramètres acceptables de cette droite. On peut cependant modifier l'algorithme pour qu'il renvoie aussi la pente de la droite reconnue (ce qui est fait dans [109]). Par ailleurs, *a priori*, le seul cas où l'on soit sûr que l'algorithme termine est celui d'un mot codant une droite de pente rationnelle (car, dans ce cas, le développement en fraction continue de cette pente est fini). On peut en fait montrer que l'algorithme termine, sauf pour les mots codant les droites de pente irrationnelle.

Ce qui précède donne donc un algorithme pour décider si un mot bi-infini code une droite ou non. Considérons maintenant, toujours en suivant l'approche développée dans [109], le cas fini, c'est-à-dire le problème consistant à décider si un mot

3. S'il y a deux lettres 2 consécutives, il suffit d'échanger les lettres 1 et 2, ce qui, géométriquement, revient à faire une symétrie d'axe la première bissectrice du plan.

fini code un morceau de droite ou non. Il y a alors un problème de bords (problème soulevé initialement dans [88]). En effet, ce n'est pas parce qu'un morphisme β_a^{-1} envoie un mot bi-infini u sur un mot que ce même morphisme envoie un facteur de u sur un mot. Par exemple, on a :

$$\beta_1^{-1}(\dots 1212121212 \dots) = \dots 1111111 \dots \quad \text{mais} \quad \beta_1^{-1}(2121212121) = 2^{-1}111112.$$

L'idée est, étant donné un mot fini u , de le modifier légèrement en un mot \tilde{u} qui soit "équivalent" à u , c'est-à-dire tel que u code un morceau de droite de pente α si et seulement si \tilde{u} code un morceau de droite de pente α , mais tel que son image par β_a^{-1} (avec a bien choisi) soit un mot. Détaillons ceci. On a d'abord besoin d'affiner un peu la notion de palier. On appelle *palier interne* une suite maximale de lettres identiques consécutives, encadrée à gauche et à droite par deux lettres différentes. Par opposition, un palier non interne est appelé *externe*. Par exemple, le mot suivant a des paliers internes de longueur 2 et 3, un palier externe gauche de longueur 1 et un palier externe droit de longueur 2 :

$$u = 12112111211.$$

Si un mot fini u a des paliers internes, alors on note $a(u)$ la longueur du plus court palier interne. Ensuite, comme dans le cas des mots bi-infinis, on montre que si u code un morceau de droite de pente α , alors $a(u) = \lfloor 1/\alpha \rfloor$. Si u a un palier de longueur strictement supérieure à $a(u) + 1$, alors il ne peut s'agir d'un code de droite (rappelons qu'un code de droite comporte au plus deux longueurs de paliers différentes), et on arrête la reconnaissance. Sinon, on transforme le mot u en un mot \tilde{u} comme suit. Si u n'a pas de palier externe gauche ou si ce palier a une longueur inférieure à $a(u)$, alors on le prolonge en un palier de longueur $a(u)$ en rajoutant des 1 à gauche. Ainsi, si u code un morceau de droite, cette opération donne un mot codant un morceau de la même droite puisque le mot codant la totalité de la droite a des paliers de longueur au moins $a(u)$. Si le palier externe droit est de longueur $a(u) + 1$, alors on rajoute un 2 à droite (le palier devient donc interne), sinon, on supprime ce palier. Ainsi, si u code un morceau de droite, cette opération donne un mot codant un morceau de la même droite puisque le mot codant la totalité de la droite a des paliers de longueur au plus $a(u) + 1$. Illustrons ceci par quelques cas de figure possibles (où, à chaque fois, $a(u) = 2$) :

$$\begin{aligned} u = 12112111211 &\rightarrow \tilde{u} = 1121121112, \\ u = 112112111211 &\rightarrow \tilde{u} = 1121121112, \\ u = 1121121112111 &\rightarrow \tilde{u} = 11211211121112. \end{aligned}$$

Le mot \tilde{u} ainsi obtenu code donc un morceau de droite de pente α si et seulement si le mot u code aussi un morceau de droite de pente α . De plus, si u n'est pas rejeté, alors \tilde{u} est de la forme :

$$\tilde{u} = 1^{a(u)+\delta_1} 21^{a(u)+\delta_2} 2 \dots 1^{a(u)+\delta_k} 2,$$

avec $\delta_i \in \{0, 1\}$ pour $i = 1, \dots, k$. L'image de \tilde{u} par $\beta_{a(u)}^{-1}$ est donc le mot :

$$\beta_{a(u)}^{-1}(\tilde{u}) = 2^{\delta_1} 1 2^{\delta_2} 1 \dots 2^{\delta_k} 1.$$

On peut alors itérer sur ce mot, comme dans le cas bi-infini précédemment décrit, jusqu'à obtenir soit un mot qui ne code pas une droite, soit un mot sans palier interne (ce sont les deux cas d'arrêt). De plus, soulignons qu'il n'est pas difficile de vérifier que la taille de $\beta_{a(u)}^{-1}(\tilde{u})$ est strictement inférieure à celle de u . On est donc sûr, dans le cas fini, que le procédé s'arrête en temps fini. Finalement, examinons le cas d'un mot sans palier interne. Un tel mot est de la forme $u = 1^p 2^q 1^r$. On voit facilement qu'il code une droite si et seulement si $q \leq 1$. Plus précisément, si $q = 0$, alors $u = 1^{p+r}$ code une droite de pente $\alpha \in [0, \frac{1}{p+r}]$, et si $q = 1$, alors $u = 1^p 2 1^r$ code une droite de pente $\alpha \in]0, \frac{1}{\max(p,r)}]$. Avant d'examiner la complexité de cet algorithme, détaillons complètement son déroulement sur deux exemples.

Exemple 1.6 *Considérons le mot fini suivant :*

$$u_0 = 1121121121112112111211211121121112112111.$$

Le plus court palier interne de u_0 est de longueur $a(u_0) = 2$. On calcule :

$$\tilde{u}_0 = 1121121121112112111211211121121112,$$

et on obtient un nouveau mot u_1 en appliquant β_2^{-1} :

$$u_1 = \beta_2^{-1}(\tilde{u}_0) = 1112112112111.$$

Le plus court palier interne de u_1 est de longueur $a(u_1) = 2$. On calcule :

$$\tilde{u}_1 = 11121121121112,$$

et on obtient un nouveau mot u_2 en appliquant β_2^{-1} :

$$u_2 = \beta_2^{-1}(\tilde{u}_1) = 211121.$$

Le plus court palier interne de u_2 est de longueur $a(u_2) = 3$. On calcule :

$$\tilde{u}_2 = 11121112,$$

et on obtient un nouveau mot u_3 en appliquant β_3^{-1} :

$$u_3 = \beta_3^{-1}(\tilde{u}_2) = 11.$$

Le mot u_3 n'a pas de palier interne. Il code un morceau de droite, donc on en déduit que u_0 code aussi un morceau de droite. Plus précisément, u_3 code un morceau de

droite de pente $\alpha_3 \in [0, 1/2]$, c'est-à-dire que pour tout α_3 dans cet intervalle, il existe un codage d'une droite de pente α_3 dont u_3 est un facteur. On déduit alors de l'équation (1.9) que $\tilde{u}_2 = \beta_3(u_3)$, et donc u_2 aussi, codent un morceau de droite de pente $\alpha_2 \in [2/7, 1/3]$. En remontant ainsi de proche en proche, on en déduit finalement que u_0 code un morceau de droite dont la pente α_0 est dans l'intervalle $[16/39, 7/17]$. Cet intervalle, de longueur $1/663$, correspond à l'ensemble des réels dont le développement en fraction continue est de la forme $[2, 2, 3, a, \dots]$, avec $a \geq 1$ car tout mot codant une droite et dont u_3 est facteur a un plus court palier de taille au moins 1. Ainsi, cet algorithme calcule la partie commune des développements en fraction continue des pentes des droites que le mot initial code.

Exemple 1.7 *Considérons le mot fini suivant :*

$$v_0 = 11211211211211211211211211211211.$$

Le plus court palier interne de v_0 est de longueur $a(v_0) = 2$. On calcule :

$$\tilde{v}_0 = 112112112112112112112112112112112.$$

et on obtient un nouveau mot v_1 en appliquant β_2^{-1} :

$$v_1 = \beta_2^{-1}(\tilde{v}_0) = 111112112111.$$

Le plus court palier interne de v_1 est de longueur $a(v_1) = 2$. Or le palier externe gauche de v_1 est de longueur 5, strictement supérieure à $a(v_1) + 1$. On en déduit que v_1 , et donc v_0 non plus, ne peuvent pas coder une droite.

Examinons maintenant la complexité de cet algorithme. Soit $c(n)$ le nombre d'opérations effectuées pour reconnaître un mot de taille n . La lecture de $a(u)$, le calcul de \tilde{u} et celui de $\beta_{a(u)}^{-1}(u)$ se font en temps linéaire. Il existe donc une constante k_0 telle que $c(|u|) \leq k_0|u| + c(|\beta_{a(u)}^{-1}(u)|)$. Par ailleurs, on déduit de l'équation (1.6) :

$$|\beta_{a(u)}^{-1}(\tilde{u})| = |\tilde{u}| - \left\lfloor \frac{|\tilde{u}|_1}{|\tilde{u}|_2} \right\rfloor |\tilde{u}|_2,$$

avec, par hypothèse, $1 \leq |\tilde{u}|_2 \leq |\tilde{u}|_1$. Afin de majorer $|\beta_{a(u)}^{-1}(\tilde{u})|$, introduisons la fonction réelle f_n définie sur l'intervalle $[1, n/2]$ par :

$$f_n(x) = n - \left\lfloor \frac{n-x}{x} \right\rfloor x.$$

Cette fonction est décroissante par morceaux et discontinue à droite des points n/i , pour $i = 2, \dots, n$. Elle vaut n/i en n/i et tend vers $2n/i$ à droite de n/i . Sur $[1, n/2]$, elle est donc majorée par sa valeur à droite du point $n/3$, c'est-à-dire $2n/3$. On en déduit qu'on a : $|\beta_{a(u)}^{-1}(\tilde{u})| \leq 2/3|\tilde{u}|$. De plus, on a : $|\tilde{u}| \leq |u| + a(u) + 1$. Il existe donc une constante $\lambda < 1$ telle que, pour u assez grand, $|\beta_{a(u)}^{-1}(\tilde{u})| \leq \lambda|u|$. D'où :

$$c(n) \leq k_0n + c(\lambda n) = \mathcal{O}(n + \lambda n + \lambda^2 n + \dots) = \mathcal{O}(n).$$

Cet algorithme est donc de complexité linéaire, ce qui est le mieux qu'on puisse attendre, asymptotiquement, d'un algorithme de reconnaissance de droite.

1.2 Extension en dimensions supérieures

L'objectif principal de cette thèse est d'étendre en dimensions supérieures les interactions entre combinatoire des mots, fractions continues et géométrie discrète présentées au paragraphe 1.1. Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux notions, outils et résultats déjà existant dans un contexte multidimensionnel.

1.2.1 Pavages

La première façon de généraliser les mots qui vient à l'esprit est sans doute de considérer des lettres non plus indexées par \mathbb{N} (mot infini) ou \mathbb{Z} (mot bi-infini) mais par \mathbb{Z}^d . Un mot d -dimensionnel sur un alphabet \mathcal{A} est alors un élément de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ ou, en d'autres termes, une matrice infinie à d entrées et à coefficients dans \mathbb{A} . C'est, par exemple, l'approche suivie dans les articles [19, 20, 29, 30, 51, 86, 94, 99, 100].

Une autre approche consiste à considérer un mot comme un *pavage* de la droite, et donc à généraliser la notion de mot par celle de pavage. Rappelons qu'un pavage d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble de compacts (appelés *tuiles*), d'intérieurs non vides et deux à deux disjoints, dont la réunion est égale à D (voir, par exemple, [65] pour une présentation plus détaillée). Généralement, on exige de plus que l'ensemble des tuiles soit fini à translation près (on peut remplacer les translations par tout groupe d'isométries de l'espace). Les mots indexés par \mathbb{Z}^d peuvent être vus comme des pavages particuliers de \mathbb{R}^d (dont les tuiles sont des hypercubes).

Une classe de pavages particulièrement intéressante dans l'optique de généraliser les mots sturmiens (ou, plus généralement, les mots codant des droites du plan) est celle des pavages obtenus par *coupe et projection* dans \mathbb{R}^d . Plus précisément, suivant [68], on définit :

Définition 1.8 *Un pavage par coupe et projection canonique est un pavage obtenu en projetant sur un espace affine $V \subset \mathbb{R}^d$ de dimension k (appelé espace projectif), selon un espace affine $W \subset \mathbb{R}^d$ (appelé espace interne), l'ensemble $c(V)$ des faces k -dimensionnelles de \mathbb{Z}^d incluses dans le cylindre $V + [0, 1]^d$. Les entiers k et $d - k$ sont respectivement appelés la dimension et la codimension de ce pavage.*

La figure 1.4 illustre cette notion. Notons que l'ensemble $c(V)$ peut être vu comme une sorte d'espace affine discret (un espace affine "facettisé"). Soulignons qu'il s'agit d'un cas particulier de pavage par coupe et projection. Pour une présentation plus complète et plus générale de la méthode de coupe et projection (ainsi que des notions voisines que sont les ensembles de Delone ou de Meyer) on peut se référer, par exemple, à [66, 80, 104].

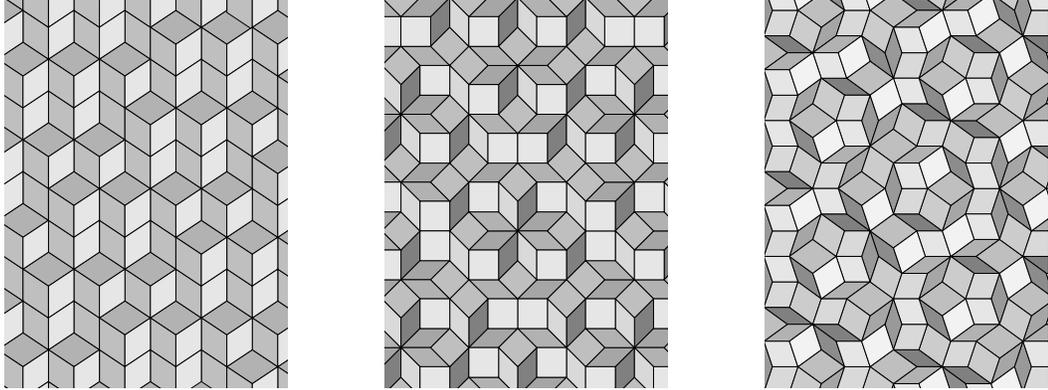


FIGURE 1.4 – Trois pavages obtenus par coupe et projection canonique de dimension 2 et de codimensions respectives 1, 2 et 3 (de gauche à droite).

On remarque alors qu’une droite arithmétique discrète standard de pente α et d’intercept ρ , telle que définie dans le paragraphe précédent, n’est rien d’autre que l’ensemble des sommets de $c(V)$, où V est l’espace affine de dimension 1 et de codimension 1 défini par :

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x} \mid (-1, \alpha) \rangle = \rho\}.$$

Ainsi, un mot codant une telle droite (qui est, rappelons le, un mot sturmien quand α est irrationnel) peut être vu comme pavage par coupe et projection canonique, de dimension 1 et de codimension 1. Ceci conduit naturellement à généraliser la notion de mot sturmien en définissant un *hyperplan sturmien* comme étant un pavage par coupe et projection canonique de codimension 1, où l’espace projectif V a un vecteur normal dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} (comme c’est le cas du vecteur $(-1, \alpha)$). Cette notion d’hyperplan sturmien a été introduite par Vuillon dans [111]. Dans [20], une définition équivalente comme codage de deux rotations sur le tore \mathbb{R}/\mathbb{Z} est donnée. Cet article montre aussi qu’un plan sturmien peut être codé par un mot indexé par \mathbb{Z}^d sur l’alphabet $\{1, 2, 3\}$.

1.2.2 Substitutions

On s’intéresse ici aux extensions multidimensionnelles des notions de substitution ou de morphisme sur les mots. Une des difficultés principales dans de telles extensions est que, contrairement au cas des mots (indexés par \mathbb{N} ou \mathbb{Z}), il n’y a pas d’opération de concaténation naturelle pour les pavages (ou les mots indexés par \mathbb{Z}^d). Ainsi, s’il est facile de définir une application envoyant une tuile sur un ensemble de tuiles (comme une substitution envoie une lettre sur un mot), il n’est

par contre pas évident de définir de manière cohérente la façon dont deux images de tuiles doivent être placées l’une par rapport à l’autre. En reprenant la terminologie de [91], on distingue deux grandes classes de substitutions.

La première classe, la plus étudiée, est celle des *substitutions géométriques*. Informellement, le principe est le suivant : une similitude (ou, plus généralement, une application linéaire) dilate uniformément les tuiles originales, puis chaque “grande” tuile ainsi obtenue est partitionnée par des tuiles originales. Un pavage point fixe d’une telle substitution est dit *auto-similaire* (ou, plus généralement, *auto-affine*). La figure 1.5 illustre cela. Une variante consiste à permettre, une fois les tuiles originales dilatées, de les remplacer par des tuiles originales qui ne les partitionnent pas nécessairement, mais en assurant cependant que, globalement, l’image d’un pavage reste un pavage (c’est-à-dire que les tuiles à cheval sur les tuiles dilatées doivent correspondre). Un pavage point fixe d’une telle substitution est alors dit *pseudo-auto-similaire* (ou *pseudo-auto-affine* si la dilatation n’est pas une similitude mais une application linéaire). La figure 1.6 illustre cela. Dans tous ces cas, la relative rigidité de la substitution a permis d’obtenir de nombreux résultats (voir, par exemple, [74, 89, 96, 105, 106] ou les références dans [91]).

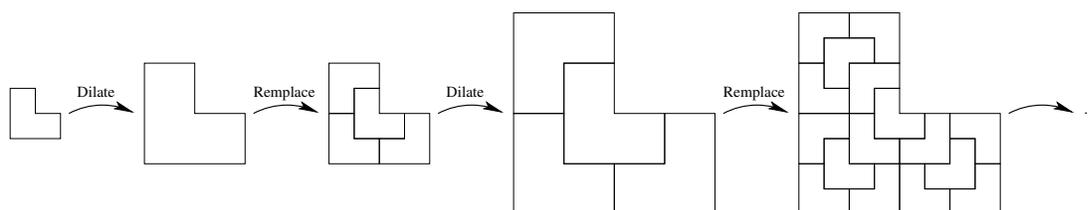


FIGURE 1.5 – Une substitution géométrique dilate chaque tuile originale puis partitionne la tuile obtenue par des tuiles originales (ici, quatre tuiles en L). En itérant, on obtient à la limite un point fixe de cette substitution, c’est-à-dire un pavage auto-similaire (ici, il s’agit du pavage appelé *chair tiling* ou *L-tiling*).

La seconde classe, moins étudiée, est celle des *substitutions combinatoires*, introduites dans [90]. Informellement, le principe est le suivant : chaque tuile est remplacée par un certain nombre fini de tuiles (on parle de *motif*), et des *règles locales* spécifient, pour toutes paires de tuiles adjacentes, comment placer leurs images respectivement l’une par rapport à l’autre. Les positions relatives des images de deux tuiles se calculent alors grâce à un chemin de tuiles adjacentes. Un tel chemin n’étant généralement pas unique, il faut que les règles locales soient définies de sorte à ce que ce calcul ne dépende pas du chemin suivi : on parle de règles locales *cohérentes*. Quelques exemples de règles locales prouvées cohérentes sont donnés dans [4, 90]. Notons que la concaténation des mots est un cas particulier de règles locales. C’est l’absence de concaténation naturelle en dimensions supérieures qui conduit à introduire cette notion plus générale de règles locales.

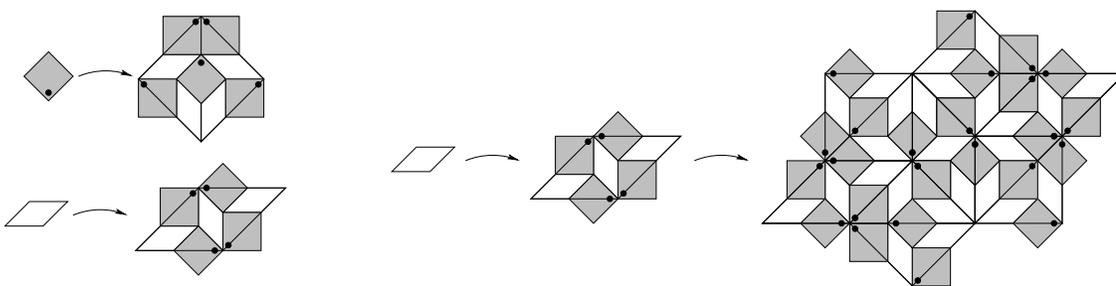


FIGURE 1.6 – Une variante consiste à dilater les tuiles originales et à remplacer la tuile obtenue par des tuiles originales qui n’en forment pas nécessairement une partition (à gauche). Il faut alors s’assurer qu’en appliquant une telle substitution, soit les tuiles obtenues après remplacement ne s’intersectent pas, soit elles sont confondues, auquel cas elles peuvent être assimilées (c’est ici le cas pour certaines tuiles carrées, à droite). En itérant, on obtient à la limite un point fixe de cette substitution, c’est-à-dire un pavage pseudo-auto-similaire (ici, il s’agit du *pavage d’Ammann-Beenker*).

Parallèlement aux deux classes de substitutions décrites ci-dessus, un type de substitutions particulier, les *substitutions généralisées*, ou *applications duales*, a été progressivement développé et étudié dans les articles [6, 7, 49, 69, 70]. Nous avons montré dans [57] que ces substitutions formaient en fait une sous-classe des substitutions combinatoires. Informellement, ces substitutions sont construites comme suit. D’abord, à une substitution sur les mots d’un alphabet à d lettres est associée une application linéaire sur les segments unités de l’espace \mathbb{R}^d . Une notion de dualité entre segments unités et hyperfaces de \mathbb{Z}^d permet ensuite d’obtenir une application (dite *duale*) sur ces faces. Cette application duale permet – sous certaines conditions – d’engendrer des ensembles croissants de faces qui, à projection près, peuvent être vus comme des pavages, ce qui explique le nom de substitution généralisée qui lui est aussi donné. Les pavages en question sont en fait des pavages par coupe et projection canonique de codimension un (donc, en particulier, les plans sturmiens). Ces applications duales ou substitutions généralisées sont celles retenues dans cette thèse pour essayer de généraliser les résultats exposés au paragraphe 1.1. Le chapitre 2 de cette thèse sera consacré à une introduction plus complète à ces substitutions, qu’il serait difficile de faire ici sans un formalisme plus conséquent.

1.2.3 Fractions continues multidimensionnelles

Nous avons rappelé au paragraphe 1.1.2 la notion de développement en fraction continue d’un réel. Trouver une extension multidimensionnelle de cette notion a été un problème très étudié en raison des nombreuses applications des fractions continues. Cependant, il semble qu’il n’existe pas de “bonne” extension, c’est-à-dire

qui généraliserait tous les résultats unidimensionnels, mais seulement différentes extensions, chacune généralisant plus ou moins bien telle ou telle propriété des fractions continues. Aussi existe-t-il une multitude d'extensions différentes, des voiles de Klein (voir, par exemple, [81]) aux nombreux algorithmes matriciels : Brun, Güting, Jacobi-Perron, Poincaré, Selmers... (voir [23] ou [103] pour une présentation détaillée de ces algorithmes et de leurs propriétés respectives).

Les algorithmes cités ci-dessus peuvent être génériquement décrits comme suit (voir [82, 103]). Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R}^d et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une partition de X . Soit T une application de X vers X , injective sur chaque X_k . Le *développement* d'un vecteur $\mathbf{x} \in X$ est alors l'unique suite $(k_i)_{i \geq 0}$ de \mathbb{N} telle que :

$$\forall i \geq 0, \quad T^i(\mathbf{x}) \in X_{k_i}.$$

De plus, on suppose que, pour tout k , il existe une matrice A_k de taille $(d+1) \times (d+1)$ telle que, pour tout \mathbf{x} dans X_k :

$$(1, T(\mathbf{x})) \propto A_k(1, \mathbf{x}),$$

où $(1, \mathbf{u})$ désigne le vecteur colonne obtenu en ajoutant une coordonnée 1 devant u (le signe \propto signifiant "proportionnel à"). Enfin, on parle de développement *fini* de longueur k si $T^k(\mathbf{x}) \in X_0$.

Intéressons nous maintenant aux éventuelles propriétés de ces fractions continues multidimensionnelles.

Une première propriété, utile pour des questions d'approximations, est celle de la convergence. Plus précisément, on dit qu'un algorithme est *fortement convergent* s'il vérifie, pour tout vecteur x de X admettant le développement $(k_i)_{i \geq 0}$:

$$\forall \mathbf{u} \in X, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_{k_1} \dots A_{k_n}(1, \mathbf{u}) = (1, \mathbf{x}).$$

On dit également que cet algorithme est *faiblement convergent* (selon la terminologie de [23]) ou *uniformément convergent* (selon la terminologie de [103]) si on a :

$$\forall \mathbf{u} \in X, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{k_1} \dots A_{k_n}(1, \mathbf{u})}{\|A_{k_1} \dots A_{k_n}(1, \mathbf{u})\|} = \frac{(1, \mathbf{x})}{\|(1, \mathbf{x})\|}.$$

Ainsi, la convergence forte est une convergence en termes de vecteurs alors que la convergence faible (ou uniforme) est simplement une convergence en termes de directions de vecteurs.

Une deuxième propriété concerne la périodicité des développements. Un résultat dû à Lagrange stipule qu'un nombre réel a un développement en fraction continue

ultimement périodique (c'est-à-dire périodique à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est quadratique (une variante de ce résultat est le théorème 1.4, mentionné au paragraphe 1.1.2). Par analogie, on voudrait que, dans le cas multidimensionnel, un vecteur \mathbf{x} ait un développement en fraction continue ultimement périodique si et seulement si ses coordonnées forment une base d'une extension de corps $\mathbb{Q}(\lambda)$, où λ est un entier algébrique de degré au plus $d + 1$. Définir un tel développement reste cependant un problème ouvert réputé difficile.

La dernière propriété que nous exposerons ici est celle de la *détection des dépendances rationnelles*, qui est vérifiée si tout vecteur \mathbf{x} dont les coordonnées sont liées sur \mathbb{Q} a un développement fini. Une propriété plus faible est celle assurant que tout vecteur dont les coordonnées sont rationnelles a un développement fini. Inversement, une propriété plus forte est celle de *réductibilité*, vérifiée si tout vecteur \mathbf{x} dont les coordonnées engendrent un sous-espace vectoriel de dimension d' sur \mathbb{Q} est tel que, pour i assez grand, $T^i(\mathbf{x})$ a exactement d' coordonnées qui ne sont pas dans X_0 . Intuitivement, ceci signifie que le développement a reconnu le degré de liberté de \mathbf{x} sur \mathbb{Q} .

Dans cette thèse, nous avons retenu l'algorithme de Brun. Cet algorithme est faiblement (ou uniformément) convergent et, au moins pour $d \leq 2$, il est fortement convergent presque partout et il détecte les dépendances rationnelles (voir, par exemple, [23]). On montrera aussi (Chap. 3) que tout vecteur dont les coordonnées sont rationnelles a un développement fini (ce qui sans doute déjà connu). Par contre, la propriété énoncée ci-dessus concernant le lien entre périodicité du développement d'un vecteur et degré d'une extension de corps contenant ses coordonnées ne semble pas vérifiée. Ce choix est quelque peu arbitraire dans la mesure où l'algorithme de Brun n'est pas le seul vérifiant ces propriétés (notamment, c'est aussi le cas de l'algorithme de Jacobi-Perron, dont l'algorithme de Brun n'est qu'une légère variante introduite pour un calcul plus facile de mesure invariante), mais il ne restreint pas la généralité des résultats qu'on obtiendra (on pourrait utiliser un autre algorithme vérifiant aussi ces propriétés).

1.2.4 Reconnaissance de plan discret

Nous avons vu au paragraphe 1.1.3 que le problème de la reconnaissance de droite discrète était important en géométrie discrète dans le processus de vectorisation de données. Naturellement, ce problème se pose aussi en dimensions supérieures, notamment en ce qui concerne la reconnaissance de plan discret de l'espace. Notons tout d'abord que la notion de droite arithmétique discrète, due à Réveillès et rappelée au paragraphe 1.1.3, s'étend très bien en dimensions supérieures. Plus précisément, toujours suivant la terminologie introduite dans [98], un *hyperplan arithmétique discret* de vecteur normal $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^+$, d'intercept ρ et d'épaisseur ω est

l'ensemble des vecteurs \mathbf{x} de \mathbb{Z}^d vérifiant :

$$\rho \leq \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho + \omega.$$

Le cas particulier où ω est la somme des coordonnées de $\boldsymbol{\alpha}$ est appelé hyperplan arithmétique discret *standard*. Notons qu'un hyperplan arithmétique discret peut être, à projection près, vu comme l'ensemble des sommets d'un pavage par coupe et projection canonique de codimension 1 (voir définition 1.8). Le problème de la reconnaissance de plan consiste alors, étant donné un sous-ensemble de \mathbb{Z}^d , à décider s'il est inclus dans un hyperplan arithmétique standard, auquel cas on veut aussi connaître les paramètres possibles d'un tel hyperplan (vecteur normal, intercept, épaisseur).

Comme dans le cas des droites discrètes, il existe plusieurs types d'approches à ce problème. On peut distinguer, en suivant [24, 25], deux classes principales d'approches : par programmation linéaire (voir, par exemple, [26, 60, 110]) ou par géométrie computationnelle (voir, par exemple, [67, 77, 78, 107]). Informellement, les approches par programmation linéaire fonctionnent comme suit. À chaque point de l'ensemble à reconnaître sont associées des inégalités liant les paramètres des plans discrets contenant ce point. L'ensemble de toutes inégalités associées aux points à reconnaître forme alors un polytope convexe de l'espace des paramètres. Reconnaître un plan signifie alors déterminer si ce polytope est non vide (et, accessoirement, en déterminer les points extrémaux - dont il est l'enveloppe convexe - afin de pouvoir explicitement donner les paramètres d'un plan discret contenant l'ensemble des points à reconnaître). Quant aux approches par géométrie computationnelle, elles reposent généralement sur le calcul de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points à reconnaître, qui doit être "assez plat" pour assurer que ces points sont bien dans un plan discret. Un comparatif détaillé des complexités des algorithmes existant peut être trouvé dans les survols [24, 25]. En particulier, notons qu'il existe des algorithmes asymptotiquement optimaux, c'est-à-dire de complexité $\mathcal{O}(n)$, où n désigne la taille de l'ensemble à reconnaître. Cependant, soulignons qu'il existe un hiatus entre les bornes asymptotiques et la complexité effective des algorithmes. Un exemple caractéristique en est sans doute l'algorithme développé dans [67] qui, malgré une complexité théorique en $\mathcal{O}(n^7)$, semble être un des plus rapides en pratique.

Pour conclure ce paragraphe, soulignons que les extensions multidimensionnelles des mots (notamment sturmiens), des substitutions et des fractions continues, présentées précédemment n'ont jamais été appliquées au problème de la reconnaissance de plan discret. C'est ce que nous faisons dans cette thèse.

1.3 Un petit détour par la physique théorique

Dans l'introduction, il a été mentionné qu'un des champs d'étude des pavages était la physique théorique, notamment en ce qui concerne la notion de matière ordonnée. Le but de ce paragraphe n'est pas d'être exhaustif mais de donner ne serait-ce qu'une idée de la manière dont apparaissent les pavages en physique et, surtout, d'introduire la notion de *flip*, qui sera utilisée dans la suite de la thèse (notamment au chapitre 4).

Une notion importante dans ce domaine est celle de *figure de diffraction*. Essayons d'en présenter intuitivement le principe (le lecteur peut aussi consulter le survol [8], très clair). Rappelons d'abord que des ondes *interfèrent* lorsqu'elles se superposent. Plus concrètement, lancer deux cailloux dans l'eau donne naissance à deux familles de cercles concentriques de vaguelettes qui, là où ils se rencontrent, *interfèrent* : deux crêtes de vaguelettes donneront naissance à une plus grosse vaguelette, tandis qu'une crête et un creux se compenseront. Rappelons ensuite qu'une onde arrivant sur un obstacle *diffracte*, c'est-à-dire qu'elle est réémise dans toutes les directions, avec une intensité variable (principalement dans un cône d'autant plus fin que la fréquence de l'onde est élevée). C'est, par exemple, ce qui vous permet de lire ce manuscrit, chaque lettre diffractant vers votre pupille la lumière qu'elle reçoit (un exemple peut-être plus agréable étant le cas d'ondes sonores diffractant sur un mur, phénomène qui vous permet d'écouter la musique de votre salon jusque dans votre cuisine). Nous pouvons maintenant expliquer ce qu'est une figure de diffraction : si une onde est envoyée sur une collection d'obstacles, ces obstacles vont tous réémettre cette onde comme autant de petites sources, et ces ondes réémises vont alors interférer, donnant un résultat fonction de la répartition spatiale des obstacles. En particulier, en physique, on éclaire aux rayons X (une onde électromagnétique) un matériau, constitué d'atomes répartis dans l'espace, et on récupère la figure de diffraction résultante. Il se trouve que si les atomes sont très ordonnés, par exemple répartis sur un réseau, alors la figure de diffraction va présenter des pics lumineux sur un fond sombre, dus à une sorte de synchronisation des ondes diffractés par chaque atome (les crêtes de chaque onde vont toutes se sommer dans une certaine direction, alors que dans une autre direction, il y aura compensation entre crêtes et creux). Inversement, des atomes répartis sans organisation particulière vont réémettre des ondes qui vont se compenser et se moyennner de sorte à donner, finalement, une figure de diffraction uniforme, sans pics lumineux. En conclusion, observer la figure de diffraction d'un matériau donne donc une idée de sa nature plus ou moins ordonnée.

À la lumière ce qui précède, il semble naturel de définir la matière ordonnée comme celle dont la figure de diffraction est formée de pics. Notamment, les *cristaux*, c'est-à-dire les arrangements périodiques de matière, s'avèrent avoir de telles figures de diffraction, qui, de plus, sont elles aussi périodiques. On a très longtemps

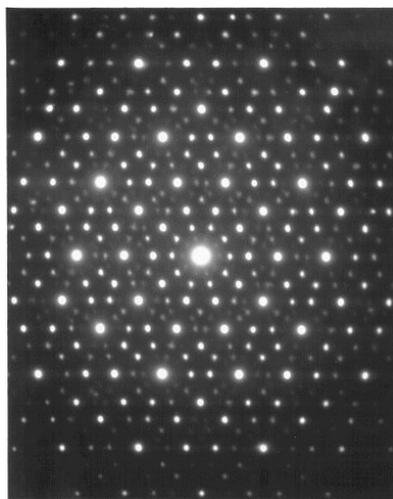


FIGURE 1.7 – Figure de diffraction de l’alliage $\text{Al}_{0.86}\text{Mn}_{0.14}$ (tirée de [101]). Notez la symétrie icosaédrique, qui exclut qu’il s’agisse d’un cristal (voir ci-dessous).

pensé que seuls les cristaux possédaient cette propriété. Aussi, en 1984, l’annonce dans [101] de la découverte d’un matériau dont la figure de diffraction est formée de pics répartis aperiodiquement fit sensation. Un tel matériau possédait donc une structure ordonnée, au même titre que les cristaux, mais sans être un cristal ! Plus précisément, ces pics se sont avérés avoir une répartition quasi-périodique, un concept étudié depuis assez longtemps en mathématiques mais qui, jusqu’alors, semblait pour le moins abstrait. D’autres expériences ont ensuite exhibé une large palette de tels matériaux (voir, par exemple, [72]). Ces matériaux ont été nommés *quasi-cristaux*, et se trouvent être à l’origine d’un fort regain d’intérêt pour l’étude des structures quasi-périodiques (voir, par exemple, les ouvrages [10, 45, 72, 84, 104] et les nombreuses références qui s’y trouvent).

C’est là qu’interviennent les pavages. En gros, chaque tuile correspond à une configuration d’atomes assez stable, et des tuiles peuvent être voisines si les interactions entre les atomes sous-jacents sont possibles. On peut alors étendre aux pavages la notion de figure de diffraction. En particulier, les pavages par coupe et projection, déjà décrits au paragraphe 1.2.1 dans le cas canonique, mais qui peuvent être étendus dans un cadre plus général (voir, par exemple, [102]), constituent un bon modèle de quasi-cristal. En effet, si le plan de coupe est irrationnel, le pavage obtenu sera aperiodique mais, sous certaines conditions, présentera une figure de diffraction formée de pics. Notons cependant que le procédé de construction par coupe et projection reste très théorique, et il difficile d’expliquer la formation de quasi-cristaux réels ainsi. De même, la construction par substitutions (exposée au paragraphe 1.2.2) est plutôt théorique, les atomes ayant peu tendance à croître et à se multiplier...

Un modèle explicatif qui semble plus réaliste est celui des *pavages aléatoires*. Informellement, un pavage aléatoire est un pavage quelconque obtenu avec les mêmes tuiles qu'un pavage par coupe et projection. Plus formellement, on peut introduire la notion de *pavage canonique* :

Définition 1.9 Soit deux entiers d et k vérifiant $d \geq k > 0$. Un pavage canonique de dimension k et de codimension $d - k$, aussi appelé simplement pavage $d \rightarrow k$, est un pavage dont les tuiles sont des translatées des tuiles définies par :

$$T_{i_1, \dots, i_k} = \{\lambda_1 \mathbf{v}_{i_1} + \dots + \lambda_d \mathbf{v}_{i_k} \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\},$$

où $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, d\}$ et $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ sont des vecteurs deux à deux linéairement indépendants d'un sous-espace affine de dimension k de \mathbb{R}^d .

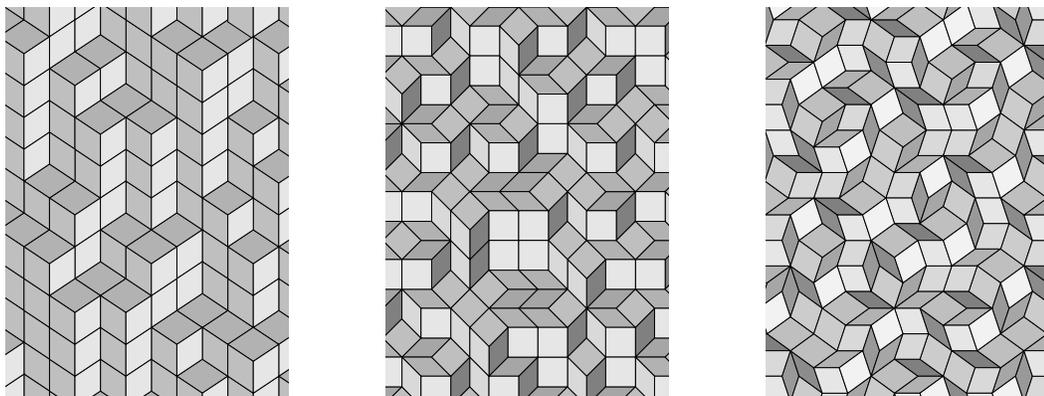


FIGURE 1.8 – Trois pavages canoniques, respectivement de type $3 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 2$ et $5 \rightarrow 2$. Les pavages par coupe et projection (Fig. 1.4) sont un cas particulier de ces pavages canoniques.

La figure 1.8 illustre cela. Soulignons qu'un pavage par coupe et projection canonique de dimension k et de codimension $d - k$ est un cas particulier de pavage $d \rightarrow k$. Expliquer la formation des quasi-cristaux (et aussi des cristaux) revient alors à expliquer comment la matière, passant par divers états modélisés par ces pavages canoniques, va finalement se figer en une structure ordonnée (ou, du moins, va osciller entre des pavages dont la structure moyenne est ordonnée). En particulier, une notion importante permettant de modéliser les passages d'un pavage à l'autre est celle de *flip*. Un flip est une transformation locale du pavage. Plus précisément, on vérifie que si exactement $k + 1$ tuiles d'un pavage de dimension k se partagent un sommet, alors il y a une et une seule façon de réorganiser différemment ces tuiles

dans le pavage ; faire un flip consiste à effectuer cette réorganisation (voir Fig. 1.9).

La notion de flip a été introduite en mécanique statistique pour modéliser les dimères polarisés (voir, par exemple, le survol [75]). En particulier, certains cas peuvent être vus comme des pavages canoniques $3 \rightarrow 2$ restreints à des domaines finis. Le point de vue adopté est alors plutôt combinatoire, et une question de base dans cette approche est celle de la *flip-accessibilité* : peut-on passer d'un pavage à un autre par une suite de flips ? Toujours dans le cas des pavages canoniques restreints à des domaines finis⁴, il a été montré que la réponse était toujours positive dans le cas $n \rightarrow n - 1$ (voir [59, 75, 92, 108]), dans le cas $n \rightarrow n - 2$ (voir [31]) ainsi que dans le cas $n \rightarrow 2$ (voir [73]). Dans le cas $n \rightarrow 3$, la réponse est souvent positive mais pas toujours (voir [43]). Les cas de dimensions ou codimensions supérieures ont été peu explorés, la flip-accessibilité étant probablement d'autant plus rare que ces dernières sont élevées. Notons au passage que la notion de flip existe également pour d'autres types de pavages, par exemple par dominos, ou même pour les graphes (voir, par exemple, [52, 92, 108]). En ce qui concerne l'interprétation physique des flips, nous renvoyons le lecteur au livre [72], en nous contentons de mentionner que, sans fournir à lui seul un modèle explicatif suffisant, le flip semble néanmoins être assez largement reconnu comme un bon modèle de mécanisme élémentaire. Dans le cadre de cette thèse, nous verrons aux chapitres 4 et 5 que la notion de flip est très pratique pour étudier l'action de substitutions (les *applications duales* introduites au chapitre 2 et brièvement mentionnés au paragraphe 1.2.2) sur les *surfaces en escalier*, qui sont en quelque sorte des relevés de pavages canoniques de codimension 1 (voir Fig. 1.8, à gauche).

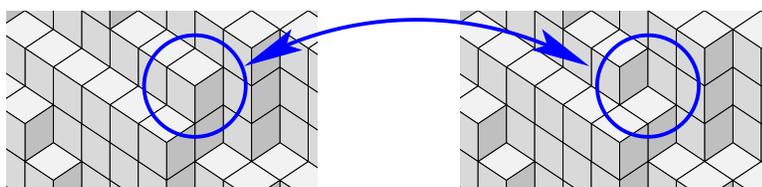


FIGURE 1.9 – Dans le cas planaire, trois tuiles en forme de parallélogramme peuvent paver de deux façons différentes un hexagone ; un flip est alors l'opération consistant à remplacer une configuration par l'autre (le reste du pavage restant inchangé).

Pour conclure ce paragraphe revenons brièvement aux pavages aléatoires. Un principe physique fondamental est qu'un matériau stable (ce qui est, forcément, le cas de ceux qu'on peut observer, cristaux et quasi-cristaux compris) doit avoir

4. On considère alors la flip-accessibilité entre des pavages du même domaine.

une *énergie libre* minimale. En d'autres termes, une légère variation (par exemple, quelques flips) doit augmenter cette énergie libre. Rappelons que l'énergie libre s'écrit $F = U - TS$, où U est l'*énergie interne*, T la température et S l'*entropie*. Le terme d'énergie interne, qui correspond aux interactions locales entre atomes (donc, d'un point de vue pavage, à des contraintes de voisinages entre tuiles), est généralement mal connu. Cependant, il devient négligeable devant le second terme aux hautes températures. On peut donc supposer que ce terme joue un rôle clé dans la formation des quasi-cristaux, d'une part, parce que ceux-ci sont expérimentalement obtenus en refroidissement brutalement un matériau à haute température (donc on peut imaginer que la matière à haute température, et sa structure éventuelle, est "figée" par ce rapide refroidissement) et, d'autre part, parce que l'entropie des quasi-cristaux est plus grande (de multiples réarrangements locaux sont possibles). Le lecteur intéressé par une discussion plus détaillée sur le sujet peut se référer, par exemple, aux articles [9, 11], ou encore au livre [72], déjà cité.

1.4 Résultats principaux

Revenons maintenant plus en détail sur les résultats principaux de cette thèse, brièvement exposés dans l'introduction.

Une première série de résultats concerne l'action des substitutions généralisées ou applications duales (brièvement introduites au paragraphe 1.2.2 et présentées plus en détail au chapitre 2) sur les plans et les surfaces en escalier, qui, à projection près, correspondent respectivement à des pavages par coupe et projection canonique et à des pavages canoniques, tous les deux de codimension 1. On peut aussi voir plans et surfaces en escalier comme des discrétisations respectivement de plans réels et, plus généralement, de surfaces.

Plus précisément, on donne au chapitre 3 une condition nécessaire et suffisante simple pour que l'application duale d'un morphisme de groupe libre envoie un plan en escalier sur un plan en escalier (Th. 3.4). De plus, le plan en escalier image est caractérisé. Notons également que, dans le cas où le morphisme est une substitution (morphisme positif), la condition nécessaire et suffisante précédente est toujours satisfaite : un plan en escalier est toujours envoyé sur un plan en escalier. Ce résultat est en fait une extension de celui résumé par l'équation (1.6) dans le cas des mots sturmiens. Nous l'avons publié d'abord dans les actes [53] dans le cas de substitutions particulières, puis dans l'article [56] dans le cas de toutes les substitutions, et enfin dans l'article [16] dans le cas des morphismes de groupe libre.

On montre ensuite, au chapitre 5, un résultat analogue pour les surfaces en escalier, à savoir une condition simple pour qu'une surface soit envoyée par une application duale de morphisme sur une surface, condition qu'on montre être toujours

vérifiée dans le cas d’une application duale de substitution (Th. 5.3). Soulignons que ce résultat a été obtenu grâce à la notion de *flip* (rappelée au paragraphe 1.3) : l’action des application duales sur ces flips permettait de ramener le cas des surfaces au cas des plans (traité au chapitre 3). Plus précisément, le lien entre flips, surfaces en escalier et plans en escalier est étudié au chapitre 4, où l’on montre notamment que tout surface peut s’obtenir en faisant une suite (éventuellement infinie) de flips sur un plan en escalier (Th. 4.16). En fait, il s’est avéré que la notion de flip, venue de la physique, pouvait être avantageusement remplacée par celle de *pseudo-flip*. En gros, les pseudo-flips permettent de s’affranchir de contrainte “réaliste” sur les flips (contraintes nécessaire pour modéliser la matière, mais pas pour étudier l’action d’applications duales de substitutions ou de morphismes). Nous avons introduit le lien entre flips et applications duales dans [55], puis dans l’article [3], où l’on prouve que l’image d’une surface en escalier par l’application duale d’une substitution est une surface en escalier. Nous avons ensuite étendu ce résultat dans l’article [16] au cas des applications duales de morphisme. Cet article a également introduit la notion de pseudo-flip, très utile pour simplifier les preuves de [3].

Une seconde série de résultats consiste à développer des liens entre les fractions continues multidimensionnelles, les applications duales de morphismes et les plans ou surfaces en escalier. On montre d’abord comment calculer le *développement de Brun* – un développement en fraction continue multidimensionnel mentionné au paragraphe 1.2.3 et exposé plus en détail au chapitre 3 – du vecteur normal d’un plan en escalier. Les deux outils utilisés à cette fin sont, d’une part, les *applications duales* et, d’autre part, une généralisation des *paliers*, tels que décrits au paragraphe 1.1.3 dans le cas des droites discrètes. Ces paliers permettent de lire une information partielle sur le vecteur normal d’un plan en escalier, information qui s’avère cependant suffisante à faire une étape du calcul du développement de Brun de ce vecteur normal (Chap. 3). L’intérêt de calculer le développement de Brun du vecteur normal d’un plan en escalier directement sur ce plan, c’est-à-dire sans supposer connu le vecteur normal mais simplement en “lisant” l’information dont on a besoin sur le plan, est qu’on peut alors étendre ceci au cas des surfaces en escalier. En effet, la notion de palier s’étend sans problème aux surfaces en escalier, et on a vu ci-dessus que les applications duales agissaient aussi sur les surfaces en escalier. Ceci permet alors de définir le développement de Brun d’une surface en escalier : c’est le développement qu’on obtient en procédant exactement comme sur un plan en escalier, bien qu’une surface en escalier n’ait pas de vecteur normal (en général). Les surfaces en escalier ayant le même développement de Brun qu’un plan en escalier donné sont aussi caractérisées (Th. 5.20). Le chapitre 5 expose ces résultats, que nous avons auparavant présentés dans [17] ainsi que dans l’article [16].

Enfin, au chapitre 6, nous adoptons un point de vue plus applicatif et montrons comment appliquer les résultats précédents aux problèmes de la génération et de la

reconnaissance de plan. Une première approche pour engendrer un plan est d'itérer une application duale sur un morceau fini. Sous certaines conditions, on peut ainsi obtenir des morceaux arbitrairement grands du plan à engendrer (Th. 6.9). Cette approche a été présentée dans [53] et dans l'article [56]. Une autre approche consiste à engendrer un plan par des itérations d'une application duale *ad hoc* sur une surface en escalier quelconque (Th. 6.10). Enfin, une dernière approche concerne le cas des plans rationnels, c'est-à-dire dont les coordonnées du vecteur normal sont rationnelles. On montre alors comment utiliser les applications duales pour engendrer des *domaines fondamentaux* de tels plans, c'est-à-dire des morceaux finis, de taille minimale, qui permettent d'engendrer tout le plan par périodicité (Th. 6.14). Les domaines fondamentaux obtenus ne sont généralement pas rectangulaire, mais ressemblent plutôt à des "ébauches de fractals". En ce qui concerne la reconnaissance de plan, ce chapitre propose une extension de l'algorithme de reconnaissance de droite discrète décrit au paragraphe 1.1.3. Informellement, généralisant les développements de Brun de plans ou surfaces en escalier des chapitres précédents, on montre comment calculer une sorte de développement de Brun d'ensembles discrets finis (les *fonctions binaires*), la nature plane ou non de l'ensemble discret initial pouvant être déduite de ce développement (Th. 6.25). Nous avons soumis une version courte de ce chapitre ([58]).

Chapitre 2

Applications duales

On introduit ici l’outil fondamental de cette thèse, à savoir les *applications duales*, aussi appelées *substitutions généralisées*. Le paragraphe 2.1 présente la manière dont ont été initialement construites les applications duales : c’est en quelque sorte la genèse de cet outil. Le paragraphe 2.2 présente ensuite une définition légèrement plus générale des applications duales, qui sera celle utilisée dans la suite de cette thèse.

Soulignons qu’il y a une certaine redondance entre les deux paragraphes. En effet, le second paragraphe a été écrit de façon à ce qu’il puisse être lu indépendamment du premier, dont la lecture n’est pas strictement nécessaire à la compréhension de la suite de cette thèse (bien qu’elle apporte un éclairage sans doute utile - notamment sur l’origine de la dénomination “application duale”).

2.1 Construction d’une application duale

La présentation donnée ici reprend, dans les grandes lignes, celle exposée dans [6] ou [7] pour le cas des substitutions et étendue dans [49] au cas des endomorphismes de groupe libre. On montre d’abord comment interpréter géométriquement un endomorphisme du groupe libre F_d comme une application linéaire sur les arêtes des hypercubes unités de \mathbb{R}^d (§2.1.1), puis on raisonne par dualité pour associer à cette application linéaire une application sur les hyperfaces de ces mêmes hypercubes (§2.1.2). Dans tout ce qui suit, (e_1, \dots, e_d) désigne la base canonique de \mathbb{R}^d .

2.1.1 Relèvement d’un morphisme

Montrons comment associer à un endomorphisme σ du groupe libre F_d une application linéaire $E_1(\sigma)$ agissant sur les arêtes des hypercubes unités de \mathbb{R}^d . Considérons d’abord le cas des substitutions sur les mots de l’alphabet $\{1, \dots, d\}$ avant

de généraliser au cas des morphismes du groupe libre. On procède en deux étapes.

La première étape consiste à associer une ligne brisée de l'espace \mathbb{R}^d à chaque mot sur l'alphabet $\{1, \dots, d\}$. Intuitivement, à un mot $w = w_1 \cdots w_k$ sera associée une ligne brisée constituée de k segments unité, chaque segment correspondant à une lettre du mot et la direction du segment étant fonction de la lettre elle-même.

On note (\mathbf{x}, i) le segment d'extrémités \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \mathbf{e}_i$. Soit alors \mathfrak{G}' le \mathbb{Z} -module libre (abstrait) engendré par les segments, c'est-à-dire les combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{Z} de segments. Un élément de \mathfrak{G}' qui s'écrit comme une somme avec seulement des coefficients 0 ou 1 s'interprète alors géométriquement comme l'union des segments dont le coefficient vaut 1. C'est en particulier le cas du *relèvement* d'un mot $w = w_1 \cdots w_k$, qui est l'élément de \mathfrak{G}' noté $\gamma(w)$ et défini par :

$$\gamma(w_1 \cdots w_k) = \sum_{i=1}^k (\mathbf{f}(w_1 \cdots w_{i-1}), w_i). \quad (2.1)$$

Exemple 2.1 *Considérons le mot $w = 1213$. On calcule :*

$$\begin{aligned} \gamma(w) &= (\mathbf{f}(\varepsilon), 1) + (\mathbf{f}(1), 2) + (\mathbf{f}(12), 1) + (\mathbf{f}(121), 3) \\ &= (\mathbf{0}, 1) + (\mathbf{e}_1, 2) + (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 1) + (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 3) \end{aligned}$$

La figure 2.1 représente l'interprétation géométrique de ce relèvement.

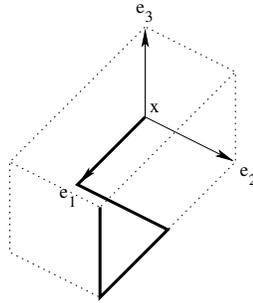


FIGURE 2.1 – L'interprétation géométrique du relèvement d'un mot (ici 1213) est une ligne brisée de l'espace (traits gras).

La seconde étape consiste à associer à une substitution σ une application linéaire sur \mathfrak{G}' , notée $E_1(\sigma)$, qui agisse sur le relèvement d'un mot w comme σ agit sur le mot w lui-même, c'est-à-dire telle qu'on ait :

$$E_1(\sigma) \circ \gamma = \gamma \circ \sigma.$$

On calcule alors, pour tout segment (\mathbf{x}, i) :

$$E_1(\sigma)(\mathbf{x}, i) = \sum_{j|\sigma(i)=p \cdot j \cdot s} (M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p), j). \quad (2.2)$$

On étend alors $E_1(\sigma)$ à tout \mathfrak{G}' par linéarité. Soulignons que $E_1(\sigma)$ est caractérisée par la matrice M_σ et par son action sur les segments $(\mathbf{0}, 1), \dots, (\mathbf{0}, d)$, puisque l'image d'un segment (\mathbf{x}, i) s'obtient en translatant celle du segment $(\mathbf{0}, i)$ par $M_\sigma \mathbf{x}$.

Exemple 2.2 Soit σ la substitution (dite de Rauzy) définie sur F_3 par :

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 12, \\ 2 \mapsto 13, \\ 3 \mapsto 1. \end{cases}$$

On calcule, par exemple :

$$\sigma(12) = \sigma(1)\sigma(2) = 1213.$$

La matrice d'incidence de cette substitution est :

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et l'application linéaire $E_1(\sigma)$ associée à σ vérifie :

$$E_1(\sigma) : \begin{cases} (\mathbf{0}, 1) \mapsto (\mathbf{0}, 1) + (\mathbf{e}_1, 2), \\ (\mathbf{0}, 2) \mapsto (\mathbf{0}, 1) + (\mathbf{e}_1, 3), \\ (\mathbf{0}, 3) \mapsto (\mathbf{0}, 1). \end{cases}$$

On en déduit son action sur tout élément de \mathfrak{G}' . La figure 2.2 illustre l'interprétation géométrique de l'action de $E_1(\sigma)$ sur un relèvement de mot.

La fin de ce paragraphe étend simplement au cas des morphismes ce qui a été fait ci-dessus pour les substitutions. Le principe est le même, seules les formules de relèvement sont modifiées.

Le relèvement d'un élément w de F_d est défini de sorte à être compatible avec le relèvement d'un mot et à vérifier $\gamma(w \cdot w^{-1}) = 0$. Si w s'écrit $w = w_1^{\varepsilon_1} \cdots w_k^{\varepsilon_k}$ avec $w_i \in \{1, \dots, d\}$ et $\varepsilon_i = \pm 1$, on calcule :

$$\gamma(w) = \sum_{i|\varepsilon_i=+1} (\mathbf{f}(w_1^{\varepsilon_1} \cdots w_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}}, w_i) - \sum_{i|\varepsilon_i=-1} (\mathbf{f}(w_1^{\varepsilon_1} \cdots w_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}}) - \mathbf{e}_i, w_i). \quad (2.3)$$

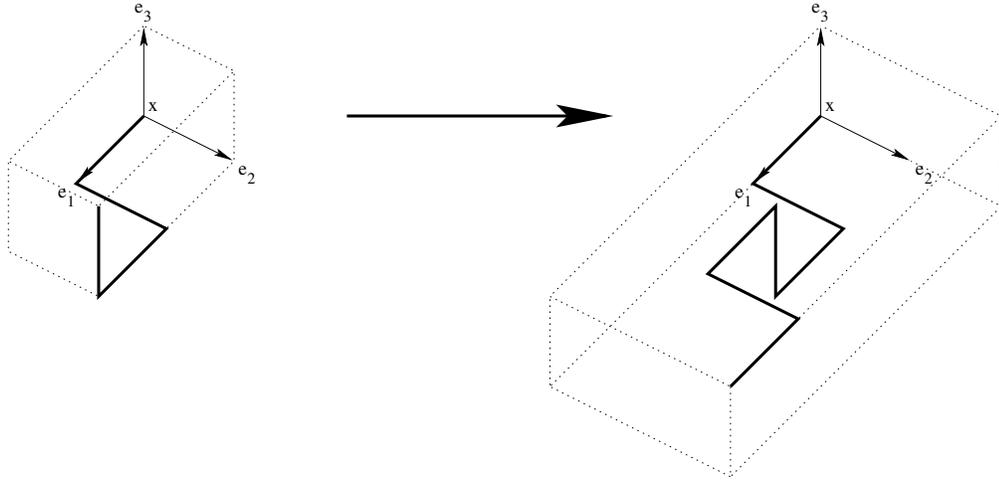


FIGURE 2.2 – Action de l’application linéaire de l’exemple 2.2. On a : $E_1(\sigma) \circ \gamma(1213) = \gamma \circ \sigma(1213) = \gamma(1213121)$.

Le relèvement $E_1(\sigma)$ d’un morphisme σ est alors l’application linéaire sur \mathfrak{G}' vérifiant la relation (2.2). On calcule, pour un segment (\mathbf{x}, i) :

$$E_1(\sigma)(\mathbf{x}, i) = \sum_{j|\sigma(i)=p \cdot j \cdot s} (M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p), j) - \sum_{j|\sigma(i)=p \cdot j^{-1} \cdot s} (M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p) - \mathbf{e}_j, j). \quad (2.4)$$

On étend ensuite $E_1(\sigma)$ à tout \mathfrak{G}' par linéarité. Ici encore, soulignons que la matrice M_σ et l’image par $E_1(\sigma)$ des segments $(\mathbf{0}, 1), \dots, (\mathbf{0}, d)$ suffisent à caractériser $E_1(\sigma)$ puisque l’image d’un segment (\mathbf{x}, i) s’obtient en traduisant celle du segment $(\mathbf{0}, i)$ par $M_\sigma \mathbf{x}$.

2.1.2 Dual d’un relèvement

Raisonnons maintenant par dualité pour associer à l’application linéaire $E_1(\sigma)$ une application duale $E_1^*(\sigma)$ agissant sur les hyperfaces des hypercubes unités de \mathbb{R}^d .

Pour $(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$, la *face* (\mathbf{x}, i^*) est la forme linéaire sur \mathfrak{G}' qui vaut un sur le segment (\mathbf{x}, i) et zéro partout ailleurs. La face (\mathbf{x}, i^*) est donc *duale* du segment (\mathbf{x}, i) , et on note \mathfrak{F}' le \mathbb{Z} -module libre engendré par les faces, c’est-à-dire les combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{Z} de faces. Les deux ensembles \mathfrak{G}' et \mathfrak{F}' sont donc duaux.

L’application duale $E_1^*(\sigma)$ de $E_1(\sigma)$ est alors l’endomorphisme de \mathfrak{F}' vérifiant, pour tout segment $(\mathbf{y}, j) \in \mathfrak{G}'$ et toute face $(\mathbf{x}, i^*) \in \mathfrak{F}'$:

$$\langle E_1(\sigma)(\mathbf{y}, j), (\mathbf{x}, i^*) \rangle = \langle (\mathbf{y}, j), E_1^*(\sigma)(\mathbf{x}, i^*) \rangle,$$

où \langle, \rangle désigne le crochet de dualité. Si M_σ appartient à $\text{GL}(d, \mathbb{Z})$, c'est-à-dire si σ est un morphisme unimodulaire, alors on obtient l'expression suivante (voir [6] ou [49]) :

$$E_1^*(\sigma)(\mathbf{x}, i^*) = \sum_{j|\sigma(j)=p \cdot i \cdot s} (M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{f}(p)), j^*) - \sum_{j|\sigma(j)=p \cdot i^{-1} \cdot s} (M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{f}(p) + \mathbf{e}_j), j^*). \quad (2.5)$$

Soulignons que la matrice M_σ et l'image par $E_1^*(\sigma)$ des faces $(\mathbf{0}, 1^*), \dots, (\mathbf{0}, d^*)$ suffisent à caractériser $E_1^*(\sigma)$ puisque l'image d'une face (\mathbf{x}, i^*) s'obtient en translatant celle de la face $(\mathbf{0}, i^*)$ par $M_\sigma^{-1}\mathbf{x}$.

Exemple 2.3 On vérifie que la substitution σ introduite dans l'exemple 2.2 est unimodulaire (le déterminant de M_σ vaut +1), et on calcule :

$$M_\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_1^*(\sigma) : \begin{cases} (\mathbf{0}, 1^*) \mapsto (\mathbf{0}, 1^*) + (\mathbf{0}, 2^*) + (\mathbf{0}, 3^*), \\ (\mathbf{0}, 2^*) \mapsto (-\mathbf{e}_3, 1^*), \\ (\mathbf{0}, 3^*) \mapsto (-\mathbf{e}_3, 2^*). \end{cases}$$

La figure 2.4 illustre l'action de $E_1^*(\sigma)$ dans quelques cas simples.

Proposons maintenant une interprétation géométrique de ce qui précède. Rappelons que $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^d . Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ et $i \in \{1, \dots, d\}$, on interprète la face (\mathbf{x}, i^*) comme le sous-ensemble de \mathbb{R}^d défini par :

$$\{\mathbf{x} + \mathbf{e}_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{e}_j, \lambda_j \in [0, 1]\}.$$

Il s'agit d'une hyperface du cube unité de \mathbb{R}^d de plus petit sommet \mathbf{x} (voir Fig. 2.3). Une simple somme de faces distinctes s'interprète alors géométriquement comme l'union des interprétations géométriques de ces faces. La figure 2.4 illustre cela.

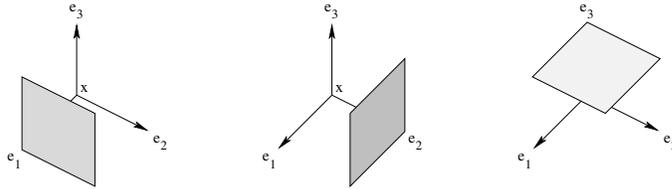


FIGURE 2.3 – Interprétation géométrique des faces $(\mathbf{x}, 1^*)$, $(\mathbf{x}, 2^*)$ et $(\mathbf{x}, 3^*)$.

2.2 Définition générale et propriétés élémentaires

On définit ici les applications duales dans un cadre légèrement plus général qu'au paragraphe précédent. Plus précisément, au lieu de se restreindre aux sommes pondérées *finies* de faces (\mathbb{Z} -module libre \mathfrak{F}'), on se place ici dans le cadre des sommes

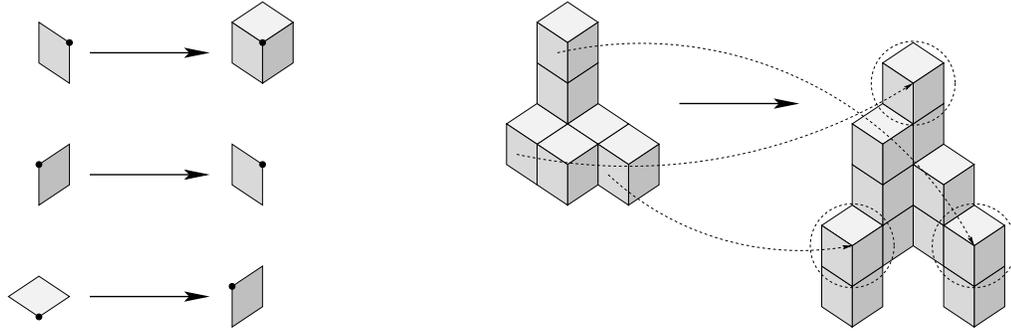


FIGURE 2.4 – Action de l’application duale associée à la substitution unimodulaire $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ sur les faces de type 1, 2 et 3 (à gauche) et sur une fonction de \mathfrak{F}' qui a la propriété remarquable que tant elle que son image s’expriment comme de simples sommes de faces distinctes (à droite).

pondérées *infinies* de faces (\mathbb{Z} -module \mathfrak{F} défini ci-dessous). Formellement, il est commode de définir ces sommes comme des fonctions afin d’éviter toute ambiguïté sur la convergence de sommes infinies. Ceci conduit aux deux définitions suivantes (qui remplacent donc les définitions similaires données au paragraphe précédent) :

Définition 2.4 Le \mathbb{Z} -module des fonctions de $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$ dans \mathbb{Z} est noté \mathfrak{F} . Le support d’une fonction de \mathfrak{F} est le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$ où cette fonction est non nulle. On note $|\mathcal{F}|$ le cardinal du support de \mathfrak{F} .

Définition 2.5 Soit $(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$. La face de type i localisée en \mathbf{x} , notée (\mathbf{x}, i^*) , est la fonction de \mathfrak{F} valant un en (\mathbf{x}, i) et zéro partout ailleurs. Géométriquement, la face (\mathbf{x}, i^*) est interprétée comme le compact de \mathbb{R}^d défini par :

$$\{\mathbf{x} + \mathbf{e}_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{e}_j \mid 0 \leq \lambda_j \leq 1\}.$$

Une fonction \mathcal{F} de \mathfrak{F} peut donc aussi être vue comme une somme pondérée (dans \mathbb{Z}) de faces, puisqu’on a :

$$\mathcal{F} = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}} \mathcal{F}(\mathbf{x}, i) (\mathbf{x}, i^*).$$

L’interprétation géométrique d’une face (\mathbf{x}, i^*) est une hyperface du cube unité de plus petit sommet \mathbf{x} (voir Fig. 2.3, plus haut). Une somme de faces dont les coefficients sont dans $\{0, 1\}$ s’interprète alors géométriquement comme l’union des interprétations géométriques des faces à coefficient 1. Plus généralement, on introduit la classe des fonctions dites *binaires*, qui sont celles ayant une interprétation géométrique naturelle :

Définition 2.6 Une fonction de \mathfrak{F} est dite binaire si elle est à valeurs dans $\{0, 1\}$. On note \mathfrak{B} l'ensemble des fonctions binaires. L'interprétation géométrique d'une fonction binaire \mathcal{B} est alors l'union des interprétations géométriques des faces (\mathbf{x}, i^*) telles que $\mathcal{B}(\mathbf{x}, i) = 1$. On appelle également morceau d'une fonction binaire \mathcal{B} toute fonction binaire inférieure à \mathcal{B} , c'est-à-dire dont l'interprétation géométrique est incluse dans celle de \mathcal{B} .

Par exemple, les fonctions représentées figure 2.4 sont toutes binaires.

Introduisons maintenant la notion d'*application duale* (rappelons que les notions de *matrice d'incidence* et d'*application de Parikh* ont été définies au chapitre 1) :

Définition 2.7 Soit σ un morphisme unimodulaire, c'est-à-dire dont la matrice d'incidence M_σ a un déterminant égal à ± 1 . L'application duale associée à σ , notée $E_1^*(\sigma)$, est l'endomorphisme de \mathfrak{F} défini pour tout $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ par :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}) : (\mathbf{x}, i) \mapsto \sum_{j|\sigma(i)=p \cdot j \cdot s} \mathcal{F}(M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p), j) - \sum_{j|\sigma(i)=p \cdot j^{-1} \cdot s} \mathcal{F}(M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p) - \mathbf{e}_j, j),$$

où \mathbf{f} désigne l'application de Parikh.

La valeur de $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})$ en un point (\mathbf{x}, i) est la somme (pondérée) des valeurs de \mathcal{F} en un nombre fini de points. En particulier, cette valeur est donc finie, ce qui assure que $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})$ appartient à \mathfrak{F} et que la définition est bien cohérente.

Un calcul simple donne alors l'image d'une face (\mathbf{x}, i^*) par l'application duale $E_1^*(\sigma)$:

$$E_1^*(\sigma)(\mathbf{x}, i^*) = \sum_{j|\sigma(j)=p \cdot i \cdot s} (M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{f}(p)), j^*) - \sum_{j|\sigma(j)=p \cdot i^{-1} \cdot s} (M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{f}(p) + \mathbf{e}_j), j^*). \quad (2.6)$$

On retrouve donc la formule (2.5) du paragraphe précédent, ce qui montre bien que la définition 2.7 ne fait qu'étendre à \mathfrak{F} la notion d'application duale précédemment obtenue sur \mathfrak{F}' (les fonctions de \mathfrak{F} à support fini). Par ailleurs, cette formule permet, par linéarité, de calculer facilement l'image de toute fonction de \mathfrak{F} à support fini. Plus généralement, on montre :

Proposition 2.8 L'application duale d'un morphisme unimodulaire σ est entièrement caractérisée par la matrice M_σ^{-1} et son action sur les faces $(\mathbf{0}, 1^*), \dots, (\mathbf{0}, d^*)$.

Preuve. Soit $E_1^*(\sigma)$ l'application duale d'un morphisme unimodulaire σ . Soit $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$. Si \mathcal{F} est une face, le résultat découle de la formule ci-dessus. Par linéarité, c'est encore vrai si \mathcal{F} est une combinaison linéaire de faces. Si maintenant \mathcal{F} est quelconque, comme la valeur de $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})$ en un point (\mathbf{x}, i) dépend de la valeur de \mathcal{F} en un nombre fini de points, il suffit de prendre une combinaison linéaire de faces qui soit égale à \mathcal{F} en tous ces points pour en déduire le résultat. \square

On vérifie facilement que la définition suivante introduit bien une distance sur \mathfrak{F} :

Définition 2.9 On note $d_{\mathfrak{F}}$ la distance sur \mathfrak{F} définie par :

$$d_{\mathfrak{F}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = 2^{-\sup\{n \in \mathbb{N} \mid \forall (\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}, \|\mathbf{x}\| \leq n \Rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, i) = \mathcal{F}'(\mathbf{x}, i)\}}.$$

Remarque 2.10 Deux fonctions binaires sont d'autant plus proches que la boule de centre zéro sur laquelle correspondent leurs interprétations géométriques est grande.

On montre alors que les applications duales sont continues :

Proposition 2.11 L'application duale d'un morphisme unimodulaire est continue sur \mathfrak{F} pour la topologie définie par $d_{\mathfrak{F}}$.

Preuve. Soit $E_1^*(\sigma)$ l'application duale d'un morphisme unimodulaire σ . Notons que pour tout $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$, la valeur de $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})$ en un point (\mathbf{x}, i) ne dépend que des valeurs de \mathcal{F} sur des points $(M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p), j)$ où p est un préfixe de $\sigma(i)$. Introduisant une constante $K > 0$ telle que :

$$\|M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p)\| \leq \|M_\sigma\| \times \|\mathbf{x}\| + K,$$

où $\|M_\sigma\|$ désigne la norme d'opérateur de M_σ . On déduit de la majoration précédente, pour tout $A \in \mathbb{N}$:

$$d_{\mathfrak{F}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \leq 2^{-(\|M_\sigma\|A + K)} \Rightarrow d_{\mathfrak{F}}(E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}), E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}')) \leq 2^{-A},$$

ce qui assure la continuité de $E_1^*(\sigma)$. \square

La proposition suivante est à mettre en rapport avec la formule (1.2) :

Proposition 2.12 Si \mathcal{F} est une fonction de \mathfrak{F} à support fini, on note $\mathbf{f}(\mathcal{F})$ le vecteur de \mathbb{Z}^d dont la i -ème coordonnée, notée $|\mathcal{F}|_i$, est définie par :

$$|\mathcal{F}|_i = \text{Card}(\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \mathcal{F}(\mathbf{x}, i) > 0\}) - \text{Card}(\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \mathcal{F}(\mathbf{x}, i) < 0\}).$$

On a alors, pour tout morphisme unimodulaire σ :

$$\mathbf{f}(E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})) = {}^t M_\sigma \mathbf{f}(\mathcal{F}).$$

Preuve. On vérifie que la formule est exacte quand \mathcal{F} est une face (\mathbf{x}, i^*) . Par linéarité, la formule est alors exacte pour toute combinaison linéaire de faces, c'est-à-dire pour toute fonction \mathfrak{F} à support fini. \square

Ainsi, le support d'une fonction positive \mathcal{F} est de taille $\sum_i |\mathcal{F}|_i = \|\mathbf{f}(\mathcal{F})\|_1$. Terminons ce chapitre par une dernière propriété élémentaire :

Proposition 2.13 Si σ et τ sont deux morphismes unimodulaires, alors on a :

$$E_1^*(\sigma \circ \tau) = E_1^*(\tau) \circ E_1^*(\sigma).$$

Preuve. Pour les fonctions à support fini, le résultat découle, par dualité, de la propriété suivante des relèvements de morphisme introduits au paragraphe 2.1 :

$$E_1(\sigma \circ \tau) = E_1(\sigma) \circ E_1(\tau).$$

Le résultat s'étend ensuite à tout \mathfrak{F} par continuité. \square

Chapitre 3

Développement de plan en escalier

Le premier paragraphe de ce chapitre définit formellement les *plans en escalier*, montre comment ils sont liés aux plans arithmétiques discrets introduits dans [98], et étudie l'action des applications duales de morphismes et de substitutions sur ces plans. Ces résultats ont été publiés dans [56] (cas des substitutions) et [16] (cas des morphismes). Ensuite, le paragraphe 3.2 rappelle la notion de développement de Brun d'un vecteur réel – une des possibles extensions multidimensionnelles des développements en fraction continue. Le lien avec les applications duales est finalement fait au paragraphe 3.3, où l'on montre notamment comment calculer le développement de Brun du vecteur normal d'un plan en escalier directement à partir de ce plan, sans supposer connu ce vecteur normal, ceci grâce à la notion de *palier* qui permet de lire une certaine information sur un plan en escalier. On parle simplement de développement de Brun d'un plan en escalier. Ceci correspond à un travail exposé dans [16].

3.1 Plan en escalier

3.1.1 Définition

Définition 3.1 *Le plan en escalier de vecteur normal $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ et d'intercept $\rho \in \mathbb{R}$ est la fonction binaire notée $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$ définie par :*

$$\mathcal{P}_{\alpha,\rho}(\mathbf{x}, i) = 1 \Leftrightarrow \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i | \alpha \rangle,$$

où $\langle . | . \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^d . L'ensemble des plans en escalier est noté \mathfrak{P} . On a donc la chaîne d'inclusions (strictes) suivante : $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$.

La figure 3.1 illustre cette notion dans le cas $d = 3$.

La proposition suivante explicite le lien entre plans en escalier et géométrie discrète :

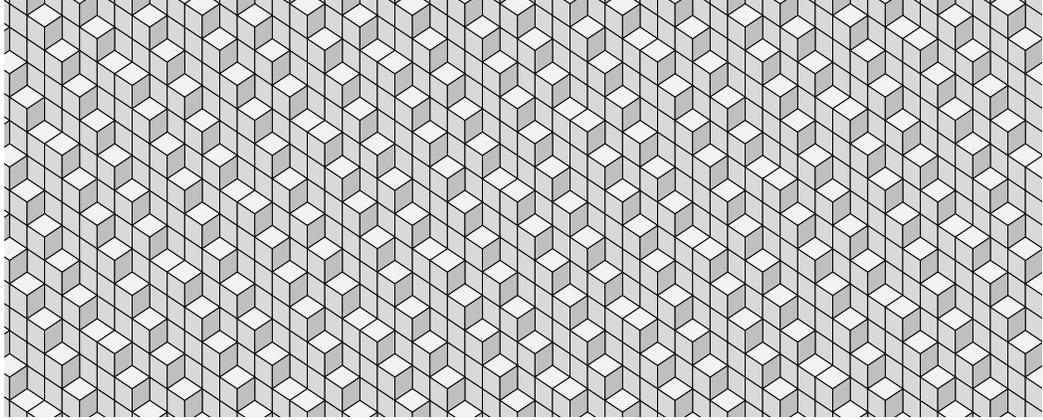


FIGURE 3.1 – Interprétation géométrique du plan en escalier $\mathcal{P}_{(24,9,10),0}$.

Proposition 3.2 Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Le sous-ensemble $V(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},\rho})$ de \mathbb{Z}^d constitué des sommets des faces du plan en escalier $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},\rho}$ vérifie :

$$\mathbf{y} \in V(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},\rho}) \Leftrightarrow \rho \leq \langle \mathbf{y} | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho + \alpha_1 + \dots + \alpha_d.$$

Selon la terminologie introduite dans [98], $V(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},\rho})$ est un plan discret de caractéristiques $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, de borne inférieure ρ et d'épaisseur arithmétique $\omega = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$. Un tel plan discret est dit standard.

Preuve. Un vecteur \mathbf{y} appartenant à l'hyperface de cube unité associé à une face $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i^*)$ de $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},\rho}$ vérifie :

$$\mathbf{y} \in \left\{ \mathbf{x} + \mathbf{e}_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{e}_j, \lambda_j \in [0, 1] \right\}.$$

Si \mathbf{y} est un sommet, donc appartient à \mathbb{Z}^d , ceci assure l'existence d'un ensemble $J \subset \{1, \dots, d\}$, $i \notin J$, tel que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i + \sum_{j \in J} \mathbf{e}_j.$$

On calcule alors :

$$\langle \mathbf{y} | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + \alpha_i + \sum_{j \in J} \alpha_j \geq \langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle \geq \rho,$$

$$\langle \mathbf{y} | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + \alpha_i + \sum_{j \in J} \alpha_j \leq \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + \sum_{k=1}^d \alpha_k < \rho + \sum_{k=1}^d \alpha_k,$$

ce qui prouve l'encadrement annoncé. Inversement, si cet encadrement est vérifié, alors on peut donc définir le plus petit entier $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que :

$$\langle \mathbf{y} - \sum_{k=1}^i \mathbf{e}_k | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{y} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{e}_k | \boldsymbol{\alpha} \rangle,$$

ce qui montre, en posant $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \sum_{k=1}^i \alpha_k$, qu'on a bien $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}(\mathbf{x}, i) = 1$. \square

Notons aussi que les paramètres d'un plan en escalier vérifient la propriété suivante :

Proposition 3.3 *Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\rho \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathcal{P}_{\lambda \boldsymbol{\alpha}, \rho} = \mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \frac{\rho}{\lambda}}.$$

3.1.2 Image par une application duale

Le théorème suivant, bien qu'un peu technique, est fondamental. Il caractérise l'action des applications duales sur les plans en escalier.

Théorème 3.4 *Soit σ un morphisme unimodulaire et $E_1^*(\sigma)$ l'application duale qui lui est associée. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Si ${}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d$, alors $E_1^*(\sigma)$ envoie le plan en escalier $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}$ sur le plan en escalier $\mathcal{P}_{{}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha}, \rho}$. Si, par contre, ${}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \notin \mathbb{R}_+^d$, alors $E_1^*(\sigma)$ envoie le plan en escalier $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}$ sur une fonction qui n'est pas binaire.*

Preuve. Considérons la fonction $\mathcal{E} = E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho})$. Fixons $(\mathbf{y}, j) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$ et calculons $\mathcal{E}(\mathbf{y}, j)$. Soit l la longueur de $\sigma(j)$. On note : $\sigma(j) = u_1 \dots u_l$. Chaque élément (\mathbf{x}, i) de $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$ tel que $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}(\mathbf{x}, i) = 1$ contribue à :

- incrémenter la valeur de $\mathcal{E}(\mathbf{y}, j)$ de 1 si et seulement si il existe $k \in \{1, \dots, l\}$ tel que $u_k = i$ et $\mathbf{y} = M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{f}(u_1 \dots u_{k-1}))$;
- décrémenter la valeur de $\mathcal{E}(\mathbf{y}, j)$ de 1 si et seulement si il existe $k \in \{1, \dots, l\}$ tel que $u_k = i^{-1}$ et $\mathbf{y} = M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{f}(u_1 \dots u_{k-1}) + \mathbf{e}_i)$.

En introduisant $\mathbf{r}_k = M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{f}(u_1 \dots u_k)$, pour $0 \leq k \leq l$, le premier cas donne :

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_{k-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} + \mathbf{e}_i = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{e}_i = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{f}(i) = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{f}(u_k) = \mathbf{r}_k,$$

tandis que le second cas donne :

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_{k-1} - \mathbf{e}_i = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{f}(i^{-1}) = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{f}(u_k) = \mathbf{r}_k \quad \text{et} \quad \mathbf{x} + \mathbf{e}_i = \mathbf{r}_{k-1}.$$

Puisque $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}(\mathbf{x}, i) = 1$ si et seulement si $\langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle$, on calcule alors :

$$\mathcal{E}(\mathbf{y}, j) = \text{Card}(\{k \mid \langle \mathbf{r}_{k-1} | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{r}_k | \boldsymbol{\alpha} \rangle\}) - \text{Card}(\{k \mid \langle \mathbf{r}_k | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{r}_{k-1} | \boldsymbol{\alpha} \rangle\}).$$

Une récurrence sur $l = |\sigma(j)|$ montre alors que, si $\langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle \leq \langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle$, on a :

$$\mathcal{E}(\mathbf{y}, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Inversement, si $\langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle > \langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle$, on a :

$$\mathcal{E}(\mathbf{y}, j) = \begin{cases} -1 & \text{si } \langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle > \rho \geq \langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, remarquons qu'on a :

$$\langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle M_\sigma \mathbf{y} | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \mathbf{y} | {}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{f}(\sigma(i)) | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle M_\sigma(\mathbf{y} + \mathbf{e}_i) | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \mathbf{y} + \mathbf{e}_i | {}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \rangle.$$

Nous pouvons maintenant conclure. Si ${}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d$, alors $\langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle \leq \langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle$, et ce qui précède montre que $\mathcal{E}(\mathbf{y}, j) = 1$ si et seulement si $\langle \mathbf{y} | {}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{y} + \mathbf{e}_i | {}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \rangle$, c'est-à-dire que $\mathcal{E} = \mathcal{P}_{{}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha}, \rho}$. Inversement, ${}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \notin \mathbb{R}_+^d$ entraîne qu'il existe i tel que $\langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle > \langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle$, et ce qui précède montre alors qu'il existe une face (\mathbf{y}, j^*) telle que $\mathcal{E}(\mathbf{y}, j) = -1$. En particulier, ceci assure que \mathcal{E} n'est pas binaire. \square

La figure 3.2 illustre ce théorème. Soulignons qu'une application duale envoie chaque face sur une combinaison linéaire de faces - notamment avec des coefficients possiblement négatifs. Ce sont des phénomènes d'annulation ou de compensation entre les coefficients de ces faces qui font que, finalement, on obtient bien un plan en escalier (sous la condition exprimée dans l'énoncé du théorème).

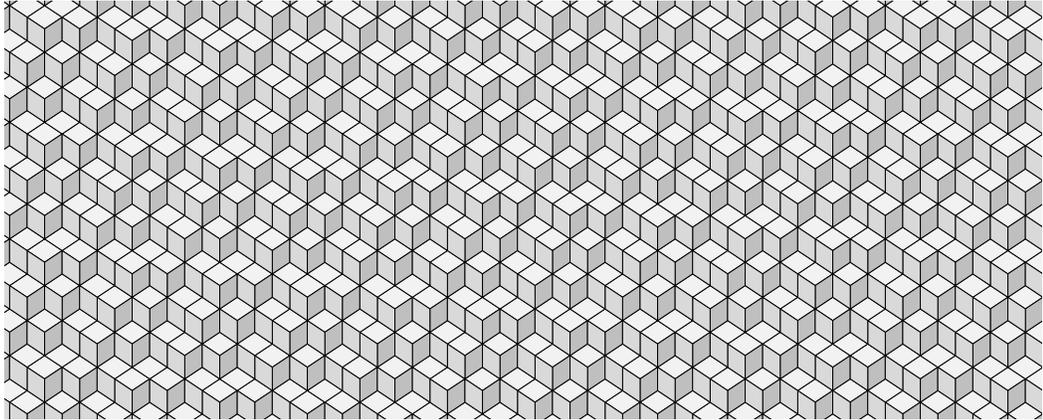


FIGURE 3.2 – Le théorème 3.4 assure que l'application duale du morphisme unimodulaire $\beta : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2^{-2}1, 3 \mapsto 3$ envoie le plan en escalier $\mathcal{P}_{(24,9,10),0}$ de la figure 3.1 sur le plan en escalier $\mathcal{P}_{(9,6,10),0}$, dont l'interprétation géométrique est ici représentée.

Par ailleurs, le théorème 3.4 montre aussi que l'action d'une application duale sur un plan en escalier ne dépend que de sa matrice d'incidence. Ainsi, si σ et τ

sont deux morphismes unimodulaires tels que $M_\sigma = M_\tau$, ils agiront exactement de la même manière sur les plans en escalier, bien qu'ils agissent différemment sur les faces de ces plans (ceci découle de la définition d'une application duale).

La remarque suivante propose une analogie utile avec le cas continu :

Remarque 3.5 Soit σ un morphisme unimodulaire et $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. On a :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle M_\sigma^{-1} \mathbf{x} | {}^t M_\sigma \alpha \rangle = 0.$$

En d'autres termes, la matrice M_σ^{-1} envoie un hyperplan réel de vecteur normal α sur un hyperplan réel de vecteur normal ${}^t M_\sigma \alpha$. Il y a donc une analogie entre l'action d'une application duale d'un morphisme σ sur les plans en escaliers (Théorème 3.4 et celle de l'application linéaire M_σ^{-1} sur les plans réels. Intuitivement, l'application duale $E_1^*(\sigma)$ est ainsi une sorte de discrétisation de l'application linéaire M_σ^{-1} . Rappelons d'ailleurs que la matrice M_σ^{-1} joue un rôle clé dans la caractérisation de l'action de $E_1^*(\sigma)$ (voir la formule 2.6 et la proposition 2.8, Chap. 2).

On peut donner du théorème 5.3 une formulation simplifiée :

Théorème 3.6 Soit σ un morphisme unimodulaire. Si l'image par $E_1^*(\sigma)$ d'un plan en escalier est binaire, alors c'est un plan en escalier. En d'autres termes :

$$E_1^*(\sigma)(\mathfrak{P}) \cap \mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}.$$

Pour finir ce paragraphe, notons que si σ est un morphisme dont la matrice d'incidence est positive – ce qui est notamment le cas quand σ est une substitution – alors tout vecteur $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ est envoyé par ${}^t M_\sigma$ sur un vecteur de \mathbb{R}_+^d . On déduit donc du théorème 3.4 :

Corollaire 3.7 Soit σ un morphisme unimodulaire dont la matrice d'incidence est positive. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Alors, l'application duale $E_1^*(\sigma)$ envoie le plan en escalier $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$ sur le plan en escalier $\mathcal{P}_{{}^t M_\sigma \alpha, \rho}$.

3.2 Développement de Brun d'un vecteur

Ce paragraphe est consacré à présenter l'algorithme de Brun et quelques-unes de ses propriétés élémentaires (notamment la caractérisation des développements finis). Le lecteur peut consulter [23] ou [103] pour un exposé plus complet des propriétés de cet algorithme.

3.2.1 Algorithme de Brun vectoriel

Définition 3.8 L'application de Brun, notée T , est l'application de $[0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ dans $[0, 1]^d$ définie en $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ par :

$$T(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}, \frac{1}{\alpha_i} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha_i} \right\rfloor, \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_d}{\alpha_i} \right),$$

où $i = \min\{j \mid \alpha_j = \|\alpha\|_\infty\}$.

Remarque 3.9 Dans le cas $d = 1$, l'application de Brun n'est rien d'autre que la classique application de Gauss, définie de $]0, 1[$ dans $[0, 1]$ par :

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Rappelons que l'application de Gauss permet de définir le développement en fraction continue d'un réel. De la même manière, l'application de Brun permet de définir une extension multidimensionnelle de ce développement :

Définition 3.10 Le développement de Brun d'un vecteur réel $\alpha \in [0, 1]^d$ est la suite $(a_n, i_n)_{n \geq 0}$ de $\mathbb{N}^* \times \{1, \dots, d\}$ définie, tant que $T^n(\alpha) \neq \mathbf{0}$, par :

$$a_n = \lfloor \|T^n(\alpha)\|_\infty^{-1} \rfloor \quad \text{et} \quad i_n = \min\{j \mid \langle T^n(\alpha) | e_j \rangle = \|T^n(\alpha)\|_\infty\}.$$

On écrit : $\alpha = [(a_0, i_0), (a_1, i_1), \dots]$.

Exemple 3.11 Un développement de Brun peut être fini, (ultimement) périodique ou apériodique, comme le montrent les développements suivant dans le cas $d = 2$:

$$\left(\frac{3}{19}, \frac{25}{76} \right) = [(3, 2), (6, 1), (4, 1), (1, 2)],$$

$$\left(\sqrt{2} - 1, \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) = [(2, 1), (2, 1), (1, 2), (1, 2), \overline{(1, 1), (4, 1)}],$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} \right) = [(1, 2), (1, 1), (3, 2), (2, 1), (1, 2), (1, 1), (3, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 1) \dots].$$

Remarque 3.12 Avec le formalisme général introduit au paragraphe 1.2.3, l'algorithme de Brun est celui défini par la partition dénombrable $X_0 \cup (X_{a,i})_{(a,i) \in \mathbb{N}^* \times \{1, \dots, d\}}$ de l'ensemble $X = [0, 1]^d$, définie par $X_0 = \{\mathbf{0}\}$ et :

$$(x_1, \dots, x_d) \in X_{a,i} \Leftrightarrow \begin{cases} x_i > x_j \text{ pour } j < i, \\ x_i \geq x_j \text{ pour } j > i, \\ \lfloor 1/x_i \rfloor = a. \end{cases}$$

Comme pour les fractions continues classiques, un vecteur de $[0, 1]^d$ est entièrement caractérisé par son développement de Brun. On sait aussi caractériser les vecteurs ayant un développement fini :

Théorème 3.13 *Un vecteur $\alpha \in [0, 1]^d$ admet un développement de Brun fini si et seulement si toutes ses coordonnées sont rationnelles.*

En effet, si un vecteur α a un développement de Brun fini, alors il existe un entier n tel que $T^n(\alpha) = \mathbf{0}$. En particulier, $T^n(\alpha) \in \mathbb{Q}^d$. Or la définition 3.8 entraîne l'équivalence suivante :

$$T(\alpha) \in \mathbb{Q}^d \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}^d.$$

Donc $T^n(\alpha) \in \mathbb{Q}^d$ entraîne $\alpha \in \mathbb{Q}^d$, ce qui prouve un sens de l'équivalence annoncée. L'autre sens découle alors de la proposition suivante, qui borne la longueur du développement de Brun d'un vecteur rationnel :

Proposition 3.14 *Pour tout vecteur $\alpha \in [0, 1]^d$ rationnel, on pose :*

$$m(\alpha) = p_1 + \dots + p_d + q,$$

où p_1, \dots, p_d, q sont des entiers premiers entre eux tels que $\alpha = (p_1/q, \dots, p_d/q)$. Alors, la longueur du développement de Brun de $\alpha \in [0, 1]^d \cap \mathbb{Q}^d$ est majorée par :

$$\log_{\frac{d+2}{d+1}}(m(\alpha)),$$

où \log_a désigne le logarithme de base a .

Preuve. On montre par récurrence sur $k \geq 1$ que si α est un vecteur rationnel dont le développement de Brun est de longueur k , alors on a :

$$m(\alpha) \geq \left(\frac{d+2}{d+1}\right)^k.$$

Pour $k = 1$, on suppose donc $T(\alpha) = \mathbf{0}$. On déduit de la définition de T que α est de la forme :

$$\alpha = (0, \dots, 0, 1/q, 0, \dots, 0),$$

avec $q \geq 1$. On a donc : $m(\alpha) = 1 + q \geq 2 \geq (d+2)/(d+1)$. Supposons maintenant le résultat acquis au rang k et considérons un vecteur rationnel $\alpha \in [0, 1]^d$ dont le développement de Brun est de longueur $k+1$. Le vecteur $T(\alpha)$ étant rationnel, on peut l'écrire :

$$T(\alpha) = (p_1/q, \dots, p_d/q),$$

avec $\text{pgcd}(p_1, \dots, p_d, q) = 1$. La définition de T assure alors l'existence d'un couple $(a, i) \in \mathbb{N}^* \times \{1, \dots, d\}$ tel que :

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{p_1}{aq + p_i}, \dots, \frac{p_{i-1}}{aq + p_i}, \frac{q}{aq + p_i}, \frac{p_{i+1}}{aq + p_i}, \dots, \frac{p_d}{aq + p_i} \right).$$

Comme $\text{pgcd}(p_1, \dots, p_{i-1}, q, p_{i+1}, \dots, p_d, aq + p_i) = \text{pgcd}(p_1, \dots, p_d, q) = 1$, on a :

$$m(\boldsymbol{\alpha}) = p_1 + \dots + p_{i-1} + q + p_{i+1} + \dots + p_d + aq + p_i,$$

c'est-à-dire $m(\boldsymbol{\alpha}) = m(T(\boldsymbol{\alpha})) + aq$. Or $a \geq 1$ et $q \geq p_1, \dots, p_d$. D'où :

$$m(\boldsymbol{\alpha}) \geq m(T(\boldsymbol{\alpha})) + \frac{p_1 + \dots + p_d + q}{d+1} = \frac{d+2}{d+1} m(T(\boldsymbol{\alpha})).$$

Le résultat au rang $k+1$ découle alors du résultat au rang k . □

3.2.2 Formulation matricielle

Soit $(a, i) \in \mathbb{N} \times \{1, \dots, d\}$. Introduisons la matrice $(d+1) \times (d+1)$ définie par :

$$B_{a,i} = \begin{pmatrix} a & & & 1 \\ & I_{i-1} & & \\ 1 & & 0 & \\ & & & I_{d-i} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

où I_p désigne la matrice identité $p \times p$ et où tous les coefficients non précisés sont implicitement égaux à zéro. On vérifie facilement que $B_{a,i}$ appartient au groupe linéaire $\text{GL}(d+1, \mathbb{Z})$ (son déterminant vaut -1).

Considérons maintenant un vecteur $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in [0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. Un calcul simple montre qu'en posant $i = \min\{j \mid \alpha_j = \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\}$ et $a = \lfloor \alpha_i^{-1} \rfloor$, on a :

$$(1, \boldsymbol{\alpha}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty B_{a,i}(1, T(\boldsymbol{\alpha})), \quad (3.2)$$

où, si \mathbf{u} est le vecteur (colonne) de coordonnées u_1, \dots, u_n , alors $(1, \mathbf{u})$ désigne le vecteur (colonne) de coordonnées $1, u_1, \dots, u_n$. Comme $B_{a,i}$ est inversible, on peut aussi écrire l'équation précédente ainsi :

$$(1, T(\boldsymbol{\alpha})) = \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^{-1} B_{a,i}^{-1}(1, \boldsymbol{\alpha}). \quad (3.3)$$

Ces formules permettent donc de définir matriciellement l'application de Brun T .

En particulier, si $\boldsymbol{\alpha}$ admet un développement de Brun $(a_n, i_n)_n$, l'équation (3.2) donne, pour tout indice n du développement :

$$(1, \boldsymbol{\alpha}) = \mu_n B_n(1, T^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})), \quad (3.4)$$

où $\mu_n = \|T^0(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty \times \dots \times \|T^n(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty$ et $B_n = B_{a_0, i_0} \dots B_{a_n, i_n}$. Ceci permet de préciser les notions de *convergence faible* et de *convergent* dans le cas des développements de Brun. Une preuve de la proposition suivante est donnée dans [23] :

Proposition 3.15 *Si $\boldsymbol{\alpha} \in [0, 1]^d$, alors son développement de Brun $(a_n, i_n)_{n \geq 0}$ est faiblement convergent, c'est-à-dire qu'il vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ t.q. } (n \geq N, \mathbf{u} \in [0, 1]^d) \Rightarrow \|(1, \boldsymbol{\alpha}) - \mu_n B_n(1, \mathbf{u})\| \leq \varepsilon,$$

où $\mu_n = \|T^0(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty \times \dots \times \|T^n(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty$ et $B_n = B_{a_0, i_0} \dots B_{a_n, i_n}$.

La faible convergence permet d'approcher un vecteur réel par une suite de vecteurs rationnels dont toutes les coordonnées ont le même dénominateur (on parle d'*approximation simultanée*). En effet, si $\boldsymbol{\alpha} \in [0, 1]^d$ a pour développement de Brun la suite $(a_n, i_n)_n$, son n -ème *convergent* est le vecteur de \mathbb{Z}^{d+1} défini par :

$$(q_n, \mathbf{p}_n) = B_{a_0, i_0} \dots B_{a_n, i_n}(1, \mathbf{0}). \quad (3.5)$$

La proposition 3.15 assure alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n (q_n, \mathbf{p}_n) = (1, \boldsymbol{\alpha}). \quad (3.6)$$

On en déduit, en divisant les d dernières coordonnées par $\mu_n q_n$ (qui tend vers 1) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{p}_n}{q_n} = \boldsymbol{\alpha}.$$

Exemple 3.16 *Le 12^{ème} convergent de $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$ est (1533, 1084, 1204). On vérifie :*

$$\left\| \left(\frac{1084}{1533}, \frac{1204}{1533} \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} \right) \right\|_\infty \leq 10^{-5}.$$

3.3 Développement de Brun d'un plan

3.3.1 Substitutions de Brun

Définition 3.17 *Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, \dots, d\}$. La substitution de Brun associée au couple (a, i) , notée $\beta_{a, i}$, est définie sur les mots sur $\{1, \dots, d+1\}$ par :*

$$\beta_{a, i} : \begin{cases} 1 & \mapsto 1^a \cdot (i+1), \\ (i+1) & \mapsto 1, \\ j & \mapsto j. \end{cases}$$

On vérifie que la matrice d'incidence de $\beta_{a,i}$ est la matrice $B_{a,i}$ introduite par l'équation (3.1). Il s'agit donc d'une substitution unimodulaire, et on calcule :

$$E_1^*(\beta_{a,i}) : \begin{cases} (\mathbf{0}, 1^*) & \mapsto (\mathbf{0}, (i+1)^*) + \sum_{k=0}^{a-1} (-k\mathbf{e}_{i+1}, 1^*), \\ (\mathbf{0}, (i+1)^*) & \mapsto (-a\mathbf{e}_{i+1}, 1^*), \\ (\mathbf{0}, j^*) & \mapsto (\mathbf{0}, j^*). \end{cases}$$

La figure 3.3 illustre l'action de ces applications duales.

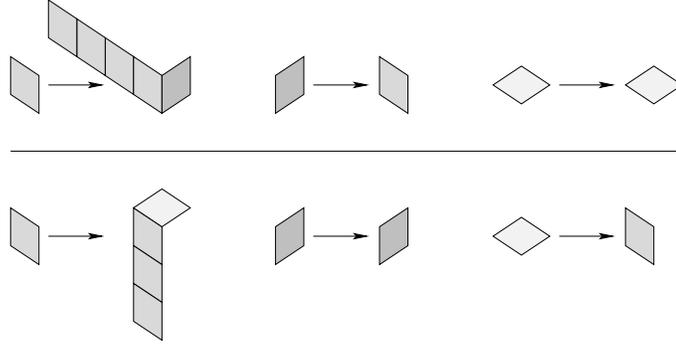


FIGURE 3.3 – Action des applications duales $E_1^*(\beta_{4,1})$ (en haut) et $E_1^*(\beta_{3,2})$ (en bas) sur les faces $(\mathbf{0}, 1^*)$, $(\mathbf{0}, 2^*)$ et $(\mathbf{0}, 3^*)$.

L'équation suivante découle alors directement du théorème 3.4 et de l'équation (3.2), en remarquant que $B_{a,i}$ est symétrique :

$$E_1^*(\beta_{a,i})(\mathcal{P}_{\|\alpha\|_\infty(1, T(\alpha)), \rho}) = \mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}. \quad (3.7)$$

La proposition 2.13 permet également de déduire de l'équation (3.4) :

$$E_1^*(\beta_n)(\mathcal{P}_{\mu_n(1, T^{n+1}(\alpha)), \rho}) = \mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}, \quad (3.8)$$

où $\mu_n = \|T^0(\alpha)\|_\infty \times \dots \times \|T^n(\alpha)\|_\infty$ et $\beta_n = \beta_{a_n, i_n} \circ \dots \circ \beta_{a_0, i_0}$.

De plus, les substitutions de Brun sont inversibles, et on calcule :

$$\beta_{a,i}^{-1} : \begin{cases} 1 & \mapsto (i+1), \\ (i+1) & \mapsto (i+1)^{-a} \cdot 1, \\ j & \mapsto j. \end{cases}$$

L'application duale associée est alors :

$$E_1^*(\beta_{a,i}^{-1}) : \begin{cases} (\mathbf{0}, 1^*) & \mapsto (a\mathbf{e}_1, (i+1)^*), \\ (\mathbf{0}, (i+1)^*) & \mapsto (\mathbf{0}, 1^*) - \sum_{k=1}^a (k\mathbf{e}_1, (i+1)^*), \\ (\mathbf{0}, j^*) & \mapsto (\mathbf{0}, j^*). \end{cases}$$

Toujours grâce au théorème 3.4, l'équation (3.3) donne alors :

$$\mathcal{P}_{\|\alpha\|_\infty(1,T(\alpha)),\rho} = E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})(\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho}). \quad (3.9)$$

Les équations ci-dessus montrent donc que l'action de l'application de Brun T sur un vecteur α peut être interprétée comme l'action d'une application duale sur un plan en escalier de vecteur normal $(1, \alpha)$.

3.3.2 Paliers d'un plan

Introduisons la notion de *palier* d'une fonction binaire :

Définition 3.18 Soit $i \neq j$ deux entiers de $\{1, \dots, d\}$. Un (i, j) -palier d'une fonction binaire \mathcal{B} est une fonction binaire maximale parmi les fonctions binaires inférieures à \mathcal{B} de la forme :

$$\sum_{k \in I} (\mathbf{x} + k\mathbf{e}_j, i^*),$$

où \mathbf{x} est un vecteur de \mathbb{Z}^d et I un intervalle de \mathbb{Z} . On note respectivement $a_{i,j}^-(\mathcal{B})$ et $a_{i,j}^+(\mathcal{B})$ l'infimum et le supremum des tailles des (i, j) -paliers de \mathcal{B} .

Autrement dit, un (i, j) -palier d'une fonction binaire \mathcal{B} est une suite maximale de faces de type i alignées dans la direction \mathbf{e}_j et dont l'interprétation géométrique est incluse dans celle de \mathcal{B} (voir Fig. 3.4). Soulignons qu'un (i, j) -palier peut être de taille infinie ; par exemple, on vérifie que tous les $(1, i)$ -paliers d'un plan en escalier de vecteur normal $(1, \mathbf{0})$ sont infinis. On a donc, *a priori*, $a_{i,j}^\pm(\mathcal{P}) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

L'intérêt des paliers est qu'ils permettent de "lire" directement sur un plan en escalier des informations sur son vecteur normal. Plus précisément, on montre :

Proposition 3.19 Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Pour $\alpha_j \neq 0$, on a :

$$a_{i,j}^-(\mathcal{P}_{\alpha,\rho}) = \max(\lfloor \alpha_i/\alpha_j \rfloor, 1) \quad \text{et} \quad a_{i,j}^+(\mathcal{P}_{\alpha,\rho}) = \max(\lceil \alpha_i/\alpha_j \rceil, 1)$$

Preuve. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ et $I \subset \mathbb{Z}$ tels que la fonction \mathcal{K} définie ci-dessous soit un (i, j) -palier de $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$:

$$\mathcal{K} = \sum_{k \in I} (\mathbf{x} + k\mathbf{e}_j, i^*).$$

Supposons que I contienne un intervalle $[a, b]$, de longueur $b - a + 1$. On a alors :

$$\mathcal{P}_{\alpha,\rho}(\mathbf{x} + a\mathbf{e}_j, i) = 1 \Rightarrow \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle + a\alpha_j < \rho \leq \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle + a\alpha_j + \alpha_i,$$

$$\mathcal{P}_{\alpha,\rho}(\mathbf{x} + b\mathbf{e}_j, i) = 1 \Rightarrow \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle + b\alpha_j < \rho \leq \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle + b\alpha_j + \alpha_i.$$

On en déduit :

$$a\alpha_j < \rho - \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle \leq b\alpha_j + \alpha_i,$$

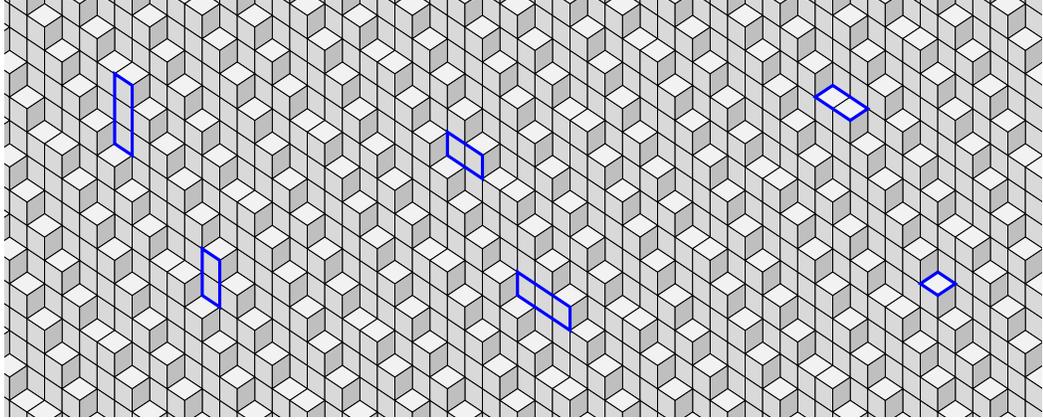


FIGURE 3.4 – Ce plan en escalier a des $(1, 3)$ -paliers de taille 2 ou 3 (encadrés, à gauche), des $(1, 2)$ -paliers de taille 2 ou 3 (au centre) et des $(3, 2)$ -paliers de taille 1 ou 2 (à droite). Tous les autres paliers sont de taille 1.

puis, pour $\alpha_j \neq 0$:

$$b - a + 1 < \frac{\alpha_i}{\alpha_j} + 1,$$

ce qui majore la longueur de I . On peut donc écrire $I = [a, b]$. On a alors :

$$\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x} + a\mathbf{e}_j, i) = 1 \Rightarrow \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + (a - 1)\alpha_j < \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + a\alpha_j < \rho,$$

et on en déduit :

$$\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x} + (a - 1)\mathbf{e}_j, i) = 0 \Rightarrow \rho > \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + (a - 1)\alpha_j + \alpha_i.$$

De même, on montre :

$$\rho \leq \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + (b + 1)\alpha_j.$$

Finalement, on a :

$$(a - 1)\alpha_j + \alpha_i < \rho - \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle \leq (b + 1)\alpha_j,$$

soit, pour $\alpha_j \neq 0$:

$$b - a + 1 > \frac{\alpha_i}{\alpha_j} - 1.$$

La longueur de I est donc minorée. En conclusion, on a montré :

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_j} - 1 < a_{i,j}^-(\mathcal{P}_{\alpha, \rho}) \leq a_{i,j}^+(\mathcal{P}_{\alpha, \rho}) < \frac{\alpha_i}{\alpha_j} + 1.$$

Le résultat annoncé en découle (le maximum venant du fait qu'un palier est toujours de taille au moins 1). \square

En particulier, cette proposition assure que, pour i et j fixés, la taille des (i, j) -paliers prend au plus deux valeurs. Ceci généralise un résultat analogue connu pour les droites discrètes (voir, par exemple, [61]).

3.3.3 Algorithme de Brun géométrique

On montre ici que la notion de palier définie au paragraphe précédent permet de définir directement sur un plan en escalier de normale $(1, \alpha)$ une application permettant de calculer le développement de Brun du vecteur α .

Introduisons d'abord les deux sous-ensembles de \mathfrak{P} suivants :

$$\mathfrak{P}_{\exists} = \{\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho} \mid \alpha \in [0, 1]^d, \rho \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}_{\forall} = \{\mathcal{P}_{(1, 0), \rho} \mid \rho \in \mathbb{R}\}.$$

On déduit de l'équation (3.9) que ces deux ensembles peuvent aussi s'écrire :

$$\mathfrak{P}_{\exists} = \{\mathcal{P} \in \mathfrak{P} \mid \exists a \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, d\}, E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})(\mathcal{P}) \in \mathfrak{P}\},$$

$$\mathfrak{P}_{\forall} = \{\mathcal{P} \in \mathfrak{P} \mid \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, d\}, E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})(\mathcal{P}) \in \mathfrak{P}\}.$$

On utilise ensuite les paliers pour définir deux fonctions particulières sur $\mathfrak{P}_{\exists} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}$:

Définition 3.20 Soit \mathcal{P} un plan en escalier $\mathfrak{P}_{\exists} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}$. On définit :

$$i(\mathcal{P}) = \min_{1 \leq i \leq d} \{i \mid \max_{1 \leq j \leq d} a_{j+1, i+1}^+(\mathcal{P}) \leq 1\} \quad \text{et} \quad a(\mathcal{P}) = a_{1, i(\mathcal{P})+1}^-(\mathcal{P}).$$

Ces fonctions vérifient alors :

Proposition 3.21 Soit $\alpha \in [0, 1]^d \setminus \{0\}$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

$$i(\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}) = \min\{i \mid \alpha_i = \|\alpha\|_{\infty}\} \quad \text{et} \quad a(\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}) = \lfloor \|\alpha\|_{\infty}^{-1} \rfloor.$$

Preuve. D'après la proposition 3.19, $a_{j+1, i+1}^+(\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}) \leq 1$ assure $\lceil \alpha_j / \alpha_i \rceil \leq 1$, donc $\alpha_i \geq \alpha_j$. On en déduit la première égalité. La seconde égalité découle alors de la proposition 3.19. \square

Exemple 3.22 Soit $(1, \alpha, \beta)$ le vecteur normal (inconnu) du plan en escalier \mathcal{P} de la figure 3.4. On "lit" sur le plan \mathcal{P} $a_{2,3}^-(\mathcal{P}) = 0$ et $a_{3,2}^-(\mathcal{P}) = 1$. On en déduit $i(\mathcal{P}) = 2$, puis $a(\mathcal{P}) = a_{1,3}^-(\mathcal{P}) = 2$, c'est-à-dire $\alpha < \beta$ et $\lfloor \beta^{-1} \rfloor = 2$.

Ainsi, bien que les fonctions a et i soient définies à partir des seuls paliers d'un plan et non de son vecteur normal, elles donnent l'information suffisante à calculer l'image de ce vecteur par l'application de Brun (Déf. 3.8). Ceci permet d'introduire :

Définition 3.23 L'application de Brun géométrique, notée \tilde{T} , est l'application définie sur un plan en escalier $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}_{\exists} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}$ par :

$$\tilde{T}(\mathcal{P}) = E_1^*(\beta_{a(\mathcal{P}), i(\mathcal{P})}^{-1})(\mathcal{P}).$$

La proposition 3.21 et l'équation (3.9) assurent alors que \tilde{T} est à valeurs dans \mathfrak{P}_{\exists} . Plus précisément, on a :

Proposition 3.24 Soit $\alpha \in [0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

$$\tilde{T}(\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}) = \mathcal{P}_{\|\alpha\|_{\infty}(1, T(\alpha)), \rho}.$$

Ainsi, l'application \tilde{T} permet de calculer le développement d'un vecteur α à partir d'un plan de vecteur normal $(1, \alpha)$. En effet, si $(a_n, i_n)_n$ désigne le développement de Brun de α , on a, pour tout $\rho \in \mathbb{R}$:

$$a_n = a(\tilde{T}^n(\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho})) \quad \text{et} \quad i_n = i(\tilde{T}^n(\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho})). \quad (3.10)$$

Par extension, on appelle aussi *développement de Brun* du plan $\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}$ la suite $(a_n, i_n)_n$. Contrairement à un vecteur, un plan n'est pas totalement caractérisé par son développement de Brun (à cause du paramètre ρ). La figure 3.5 illustre le calcul du développement de Brun d'un plan en escalier.

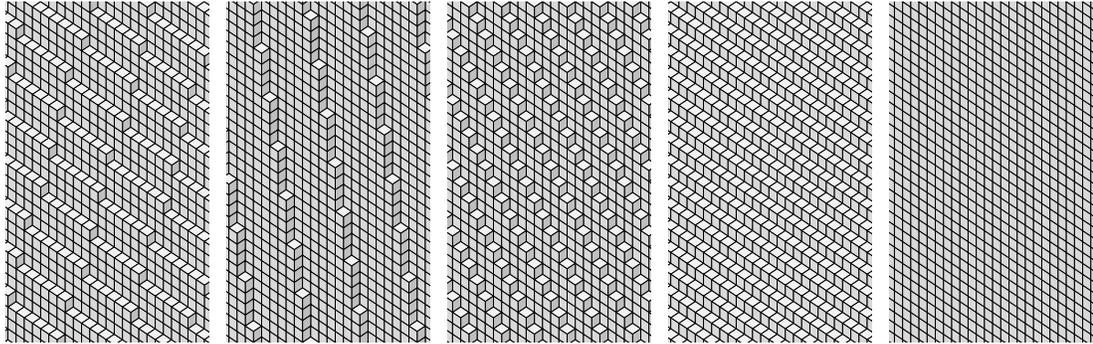


FIGURE 3.5 – Applications itérées de \tilde{T} sur un plan en escalier \mathcal{P} (de gauche à droite). Le développement de Brun de \mathcal{P} est alors la suite définie par $(a(\tilde{T}^n(\mathcal{P})), i(\tilde{T}^n(\mathcal{P})))_n$. Ici, on obtient le même développement que celui du vecteur $(1/19, 25/76)$: on en déduit que le plan \mathcal{P} est un plan de vecteur normal $(1, 1/19, 25/76)$.

Chapitre 4

Flips : des plans aux surfaces

Ce chapitre joue le rôle de charnière entre le chapitre précédent et le suivant. On commence par rappeler la notion de *surface en escalier*, introduite par D. Jamet dans [71] et on montre quelques propriétés élémentaires associées. On définit alors la notion de *flip* en utilisant le formalisme introduit aux chapitres précédents. On montre alors que toute surface en escalier peut être obtenue comme une suite de flips effectués sur un plan en escalier (Th. 4.16). Nous avons publié ce résultat dans l'article [3]. On introduit une nouvelle variante du flip, le *pseudo-flip*, qui conduit à des résultats proches de ceux concernant les flips, mais plus simple à montrer et suffisants pour les besoins du chapitre suivant (Th. 4.20 et 4.21). Ceci a été décrit dans l'article [16].

4.1 Surfaces en escalier

4.1.1 Pavages canoniques de codimension un

La propriété suivante découle facilement de la définition d'un plan en escalier (Déf. 3.1) et de son interprétation géométrique :

Proposition 4.1 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Alors, le plan en escalier $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$ est la somme des faces dont l'interprétation géométrique est incluse dans la "tranche" de \mathbb{R}^d définie par :*

$$\rho + \alpha^\perp + [0, 1]^d.$$

Autrement dit, un plan en escalier peut être vu comme une discrétisation par des faces d'hypercubes d'une coupe de \mathbb{R}^d par un espace affine de codimension 1. On montre également (voir [20]) :

Proposition 4.2 *Soit $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_d$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Alors, la projection orthogonale sur \mathbf{u}^\perp , notée π , est un homéomorphisme de l'interprétation géométrique du plan en escalier $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$ sur l'hyperplan \mathbf{u}^\perp .*

Notamment, il découle de la proposition précédente qu'en projetant l'interprétation géométrique de tout plan en escalier par π , on obtient un pavage de l'hyperplan \mathbf{u}^\perp par les proto-tuiles T_1, \dots, T_d , où T_i est le compact obtenu en projetant par π l'interprétation géométrique de la face $(\mathbf{0}, i^*)$. Plus précisément, le pavage obtenu est un pavage canonique de codimension 1, ou encore, un pavage $d \rightarrow d - 1$ (voir Déf. 1.9). Par exemple, la figure 3.1 peut être vue comme un pavage par trois proto-tuiles en forme de losange (identiques à rotation d'angle $2\pi/3$ près).

Cependant, soulignons qu'il est clair qu'on ne peut obtenir tous les pavages canoniques de codimension 1 comme des projections de plan en escalier (de telles projections sont très régulières, ce qui n'est pas nécessairement le cas d'un pavage canonique). Ceci conduit à généraliser la notion de plan en escalier par celle de *surface en escalier*, introduite dans [71] comme suit :

Définition 4.3 Soit $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_d$. Une surface en escalier est une fonction binaire \mathcal{S} dont l'interprétation géométrique est homéomorphe à \mathbf{u}^\perp par la projection orthogonale sur \mathbf{u}^\perp , notée π . On note \mathfrak{S} l'ensemble des surface en escalier.

Un plan en escalier est donc un cas particulier de surface en escalier. La figure 4.1 représente une surface en escalier dont il est facile de se convaincre que ce n'est pas un plan en escalier. On peut résumer ceci par la chaîne d'inclusions (strictes) suivante :

$$\mathfrak{P} \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}.$$

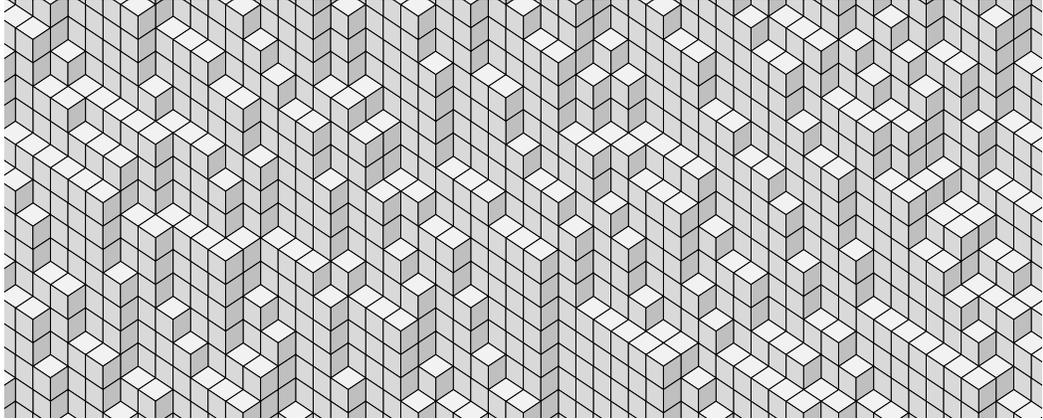


FIGURE 4.1 – Interprétation géométrique d'une surface en escalier de \mathbb{R}^3 (qui n'est pas un plan en escalier). En projetant sur l'hyperplan $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)^\perp$, on obtient un pavage du plan par trois types de losanges (proto-tuiles).

Intuitivement, un plan en escalier correspond aux faces d'hypercubes unités obtenues en prenant une "tranche droite" de \mathbb{R}^d (c'est le sens de la proposition 4.1)

alors qu'une surface en escalier correspond à une "tranche courbe" de \mathbb{R}^d . On obtient une discrétisation de plan dans le premier cas et de surface dans le second cas.

On montre alors, en s'inspirant des travaux de Thurston dans le cas fini (voir [108]), que tout pavage canonique de codimension 1 par les proto-tuiles T_1, \dots, T_d , où T_i est le compact obtenu en projetant par π de l'interprétation géométrique de la face $(\mathbf{0}, i^*)$, s'obtient comme projection par π d'une surface en escalier (unique à translation selon $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_d$ près). Plus précisément si \mathcal{T} est un tel pavage, on définit sur les sommets de ce pavage (c'est-à-dire les sommets des tuiles) une fonction $h_{\mathcal{T}}$ à valeurs dans \mathbb{Z}^d , appelée *fonction de hauteur*, en posant $h_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_0) = 0$ pour un sommet \mathbf{x}_0 fixé (quelconque) de \mathcal{T} et, pour tous sommets \mathbf{x} et \mathbf{y} de \mathcal{T} reliés par une arête qui est la projection d'un vecteur \mathbf{e}_i (toutes les arêtes du pavage sont de ce type), $h_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}) - h_{\mathcal{T}}(\mathbf{y}) = \mathbf{e}_i$. On vérifie que cette définition est cohérente par induction sur la taille d'un cycle d'arêtes du pavage. Une preuve plus détaillée de ceci est donnée dans [3].

4.1.2 Propriétés élémentaires

Commençons par définir les *sommets* d'une surface en escalier :

Définition 4.4 *Soit $\mathcal{S} \in \mathfrak{S}$ une surface en escalier. Alors, l'ensemble des sommets de \mathcal{S} , noté $V(\mathcal{S})$, est l'ensemble des sommets des faces de \mathcal{S} , c'est-à-dire les vecteurs entiers appartenant à l'interprétation géométrique de \mathcal{S} .*

On montre (voir, par exemple, [3]) :

Proposition 4.5 *Une surface en escalier \mathcal{S} est entièrement caractérisée par l'ensemble $V(\mathcal{S})$ de ses sommets.*

La propriété suivante, plus délicate, sera souvent utile :

Proposition 4.6 *Si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont deux sommets distincts d'une surface en escalier, alors $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ n'est ni strictement positif ni strictement négatif.*

Preuve. Supposons que \mathbf{x} et \mathbf{y} soient deux sommets d'une surface en escalier \mathcal{S} tels que $\mathbf{y} - \mathbf{x} > 0$ (le cas $\mathbf{y} - \mathbf{x} < 0$ étant similaire). Une surface étant connexe, il n'est pas difficile de voir qu'il existe une suite $(x_n)_{0 \leq n \leq N}$ de sommets de \mathcal{S} tels que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{y}$ et, pour tout n , $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n = \mathbf{e}_{i_{n+1}}$, pour $i_n \in \{1, \dots, d\}$. On déduit de $\mathbf{y} - \mathbf{x} > 0$ qu'on a :

$$\{i_1, \dots, i_N\} = \{1, \dots, d\}.$$

Considérons alors la suite croissante d'entiers $(r(k))_{1 \leq k \leq d}$, où $r(k)$ est défini par :

$$r(k) = \min\{n \mid \text{Card}(\{i_1, \dots, i_n\}) = k\}.$$

On a $r(k) \geq k$ pour $k = 1, \dots, d$. Montrons que quitte à modifier la suite $(x_n)_n$, on peut se ramener au cas où $r(k) = k$ pour $k = 1, \dots, d$.

Par définition, $r(1) = 1$. Pour $k = 2$, quitte à remplacer \mathbf{x} par $\mathbf{x}_{r(2)-2}$, qui vérifie aussi $\mathbf{y} - \mathbf{x}_{r(2)-2} > 0$, on se ramène $r(2) = 2$.

Soit alors $k \geq 3$ tel que $r(k') = k'$ pour $k' < k$ et $r(k) > k$. Considérons les trois sommets de \mathcal{S} suivants :

$$\mathbf{x}_{r(k)-2}, \quad \mathbf{x}_{r(k)-1} = \mathbf{x}_{r(k)-2} + \mathbf{e}_{i_{r(k)-1}}, \quad \mathbf{x}_{r(k)} = \mathbf{x}_{r(k)-2} + \mathbf{e}_{i_{r(k)-1}} + \mathbf{e}_{i_{r(k)}}.$$

La définition de $r(k)$ assure qu'on a $i_{r(k)-1} \neq i_{r(k)}$. Le sommet ci-dessous est alors le quatrième sommet d'une "sous-face" de dimension 2 d'une face de \mathcal{S} :

$$\mathbf{x}_{r(k)-2} + \mathbf{e}_{i_{r(k)}}.$$

En remplaçant $\mathbf{x}_{r(k)-1}$ par ce sommet, on obtient une nouvelle suite de sommets de \mathcal{S} reliant \mathbf{x}_0 à $\mathbf{x}_N = \mathbf{y}$, et la valeur de $r(k)$ a été décrétementée de 1 par cette opération. En itérant, on se ramène donc à $r(k) = k$.

Finalement, on obtient un chemin tel que $r(k) = k$ pour tout $k = 1, \dots, d$. En particulier, de $r(d) = d$ on déduit $\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_{i_1} + \dots + \mathbf{e}_{i_d} = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_d$, et donc $\pi(\mathbf{x}_d) = \pi(\mathbf{x}_0)$. Ceci montre que π n'est pas injective sur \mathcal{S} , ce qui contredit la définition d'une surface en escalier. Le résultat en découle. \square

Définition 4.7 La hauteur d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ est le réel $h(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{u} \rangle$. Si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont deux vecteurs entiers tels que $\pi(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{y})$, on dit alors que \mathbf{x} est au-dessus de \mathbf{y} si $h(\mathbf{x}) \geq h(\mathbf{y})$ et en dessous si $h(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{y})$.

En particulier, la proposition 4.6 entraîne que deux sommets distincts d'une surface en escalier ne sont jamais l'un au-dessus de l'autre. On dit alors que $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ est au-dessus d'une surface en escalier s'il est au-dessus d'un sommet de cette surface, et qu'une surface en escalier est au-dessus d'une autre si chacun des sommets de la première surface est au-dessus de la seconde surface. Comme, de plus, deux faces distinctes ne peuvent s'intersecter que sur leurs frontières, ceci permet de définir deux opérations simples sur les surfaces en escalier :

Définition 4.8 Soit \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux surfaces en escalier. On note $\mathcal{S} \wedge \mathcal{S}'$ et $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}'$ les surfaces en escalier dont les sommets sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned} V(\mathcal{S} \wedge \mathcal{S}') &= \{\mathbf{x} \in V(\mathcal{S}) \cup V(\mathcal{S}') \mid \mathbf{x} \text{ est en dessous de } \mathcal{S} \text{ et } \mathcal{S}'\}, \\ V(\mathcal{S} \vee \mathcal{S}') &= \{\mathbf{x} \in V(\mathcal{S}) \cup V(\mathcal{S}') \mid \mathbf{x} \text{ est au-dessus de } \mathcal{S} \text{ et } \mathcal{S}'\}. \end{aligned}$$

Plus intuitivement, l'interprétation géométrique de $\mathcal{S} \wedge \mathcal{S}'$ (resp. $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}'$) est ce qu'on voit si on regarde "du dessous" (resp. "du dessus") les interprétations géométriques de \mathcal{S} et de \mathcal{S}' (représentées sur une même figure). La figure 4.2 illustre l'opération \wedge .

On introduit alors les surfaces particulière suivantes (voir Fig. 4.3) :

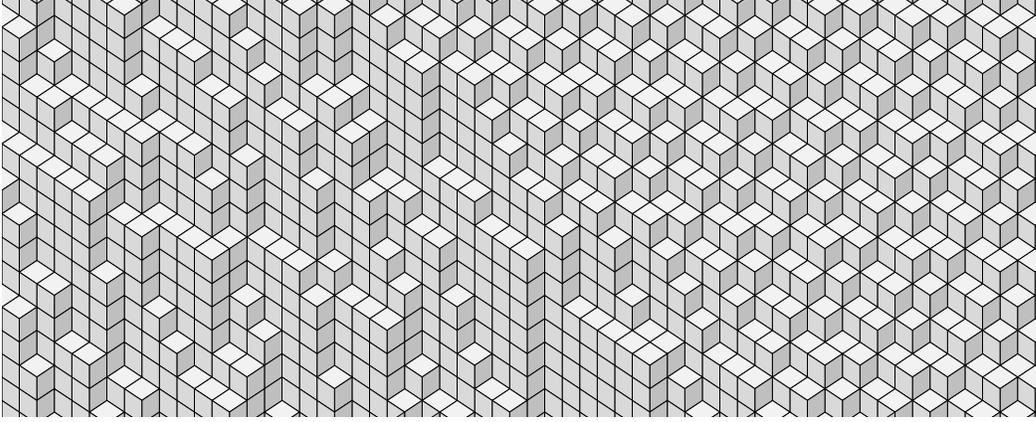


FIGURE 4.2 – Interprétation géométrique de la surface en escalier $\mathcal{P} \wedge \mathcal{S}$, où \mathcal{P} et \mathcal{S} sont les surfaces en escalier respectivement représentés par les figures 3.2 et 4.1.

Définition 4.9 Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$. Soit $\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$ et $\check{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$ les surfaces en escalier définies par :

$$\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}} = \bigwedge_{1 \leq i \leq d} \mathcal{P}_{\mathbf{e}_i, x_i} \quad \text{et} \quad \check{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}} = \bigvee_{1 \leq i \leq d} \mathcal{P}_{\mathbf{e}_i, x_i}.$$

Ces surfaces sont respectivement appelées coin sortant et coin rentrant.

En particulier, \mathbf{x} est un sommet de $\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$ et $\check{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$. De plus, on déduit de la proposition 4.6 que toute surface en escalier dont \mathbf{x} est un sommet est à la fois au-dessus de $\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$ et en dessous de $\check{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$. Toute surface en escalier \mathcal{S} vérifie donc l'équation :

$$\mathcal{S} = \bigvee_{\mathbf{x} \in V(\mathcal{S})} \hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}} = \bigwedge_{\mathbf{x} \in V(\mathcal{S})} \check{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}. \quad (4.1)$$

Ceci permet d'ailleurs de montrer que la réciproque de la proposition 4.6 est vraie : si deux vecteurs entiers \mathbf{x} et \mathbf{y} sont tels que $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ n'est ni strictement positif ni strictement négatif, alors ce sont des sommets d'une surface en escalier puisque, par exemple, la surface $\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}} \vee \hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{y}}$ convient.

Pour conclure cette section, montrons que \mathfrak{S} est fermé dans \mathfrak{F} pour la topologie induite par la distance $d_{\mathfrak{F}}$ (Déf. 2.9) :

Proposition 4.10 L'ensemble \mathfrak{S} des surfaces en escalier est fermé.

Preuve. Soit $(\mathcal{S}_n)_n$ une suite convergente de surfaces en escalier de limite \mathcal{S} . Pour tout $R \geq 0$, il existe $N \geq 0$ tel que pour $n \geq N$, \mathcal{S}_n et \mathcal{S} coïncident sur $B_R = \{(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\} \mid \|\mathbf{x}\| \leq R\}$. En particulier, π est donc un homéomorphisme de la restriction de \mathcal{S} à B_R sur son image, qui contient une boule de \mathbf{u}^\perp

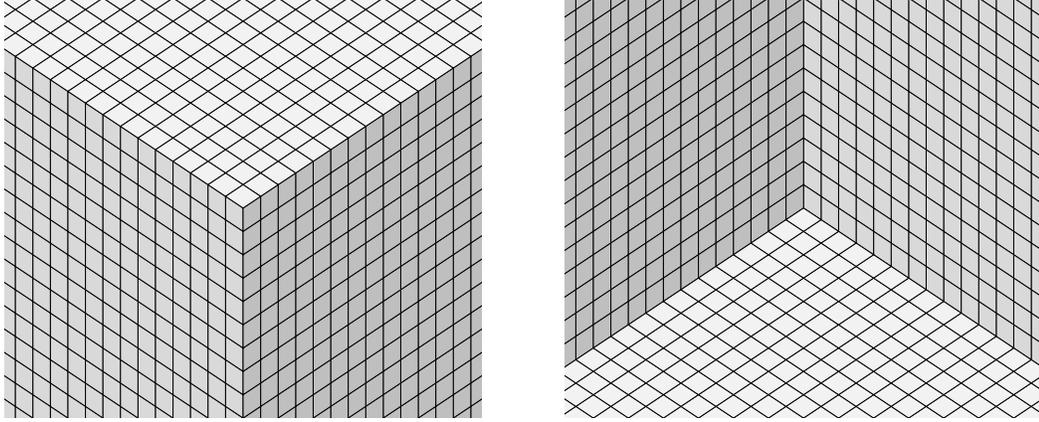


FIGURE 4.3 – Le coin sortant $\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$ (à gauche) et le coin rentrant $\check{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$ (à droite). Le vecteur \mathbf{x} est un sommet de ces coins, plus précisément c’est “le sommet” (au sens usuel du terme) de chacun de ces coins.

de rayon R . Ceci valant pour tout R , on en déduit que π est un homéomorphisme de \mathcal{S} sur \mathbf{u}^\perp , c’est-à-dire que \mathcal{S} est une surface en escalier. \square

A contrario, soulignons que l’ensemble des plans en escalier n’est pas fermé, comme l’illustre la figure 4.4.

4.2 Flips

4.2.1 Flip-accessibilité

On utilise ici le formalisme des fonctions de $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$ dans \mathbb{Z} (c’est-à-dire l’ensemble \mathfrak{F}) pour donner un équivalent en termes de surfaces en escalier de la notion de flip, définie au chapitre 1. Plus précisément, on définit :

Définition 4.11 *Le flip localisé en $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ est la fonction $\mathcal{F}_{\mathbf{x}} \in \mathfrak{F}$ définie par :*

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^d (\mathbf{x}, i^*) - \sum_{i=1}^d (\mathbf{x} - \mathbf{e}_i, i^*).$$

On dit alors qu’on *fait un flip ascendant* (resp. *descendant*) en \mathbf{x} sur une surface en escalier \mathcal{S} si on ajoute (resp. soustrait) $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}$ à \mathcal{S} de telle sorte que la fonction $\mathcal{S} \pm \mathcal{F}_{\mathbf{x}}$ obtenue soit binaire. Comme π est clairement un homéomorphisme de $(\mathbf{x}, 1^*) + \dots + (\mathbf{x}, d^*)$ sur $(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1, 1^*) + \dots + (\mathbf{x} - \mathbf{e}_d, d^*)$, la fonction obtenue est alors

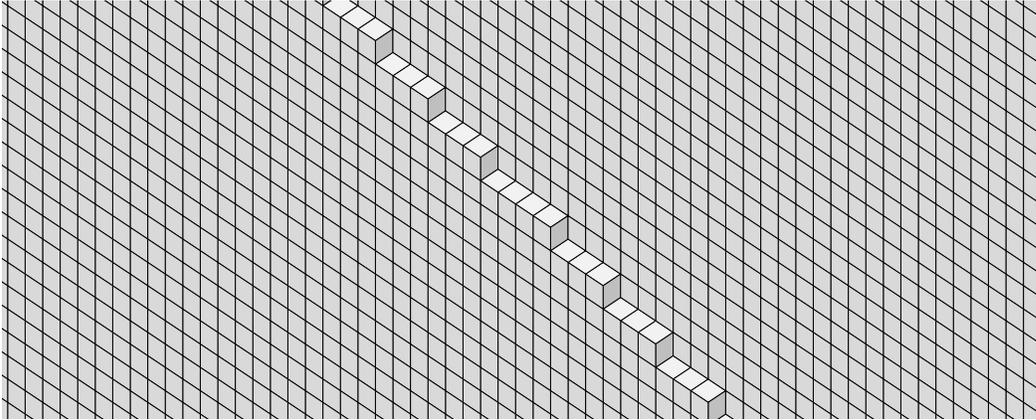


FIGURE 4.4 – La suite de plans $(\mathcal{P}_{(n,1,\pi),0})_{n \geq 1}$ converge vers la surface en escalier représentée ici, qui n'est pas un plan en escalier (mais qui peut être vue comme un plan en escalier dégénéré).

en fait encore une surface en escalier. On en déduit que l'ensemble des surfaces en escalier est stable par flips. Soulignons que faire un flip sur une surface en escalier correspond bien à faire un flip classique sur le pavage canonique de codimension 1 associé cette surface en escalier (voir, par exemple, Fig. 4.5).

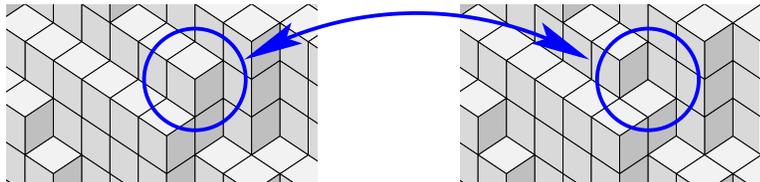


FIGURE 4.5 – Faire un flip ascendant (resp. descendant) sur une surface en escalier, c'est ajouter (resp. retrancher) une fonction \mathcal{F}_x de sorte à obtenir une nouvelle surface (ici, flip ascendant de gauche à droite, descendant dans l'autre sens).

Définissons maintenant la notion de *flip-accessibilité* en s'inspirant de la notion correspondante introduite sur les pavages :

Définition 4.12 Une surface en escalier \mathcal{S}' est dite flip-accessible à partir d'une surface en escalier \mathcal{S} s'il existe une suite $(\mathcal{S}_n)_n$ de surfaces en escalier telle que :

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}, \quad \mathcal{S}_{n+1} - \mathcal{S}_n \in \{\pm \mathcal{F}_x \mid x \in \mathbb{Z}^d\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n = \mathcal{S}'.$$

Si $(\mathcal{S}_n)_n$ est finie, alors \mathcal{S}' est dite finiment flip-accessible à partir de \mathcal{S} .

Soulignons que cette notion de flip-accessibilité n'est pas restreinte aux suites finies de flips, mais vaut aussi pour des suites infinies, ce qui est rendu possible par la notion de convergence définie par la distance $d_{\mathfrak{F}}$ (Déf. 2.9). Il n'est pas très difficile de voir que cette notion de flip-accessibilité est *asymétrique*, c'est à dire qu'une surface peut être flip-accessible à partir d'une autre sans que la réciproque ne soit vraie (la figure 4.6, ci-dessous, donne un exemple). Il est donc naturel de chercher à *caractériser* la flip-accessibilité entre deux surfaces données. C'est à cet effet qu'on introduit la notion d'*ombre* :

Définition 4.13 Soit π_i la projection de \mathbb{R}^d sur \mathbb{R}^{d-1} définie par :

$$\pi_i(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

La $i^{\text{ème}}$ -ombre d'une surface en escalier \mathcal{S} est alors l'image par π_i de l'interprétation géométrique de \mathcal{S} , notée $\pi_i(\mathcal{S})$.

Les ombres de \mathcal{S} sont donc des sous-ensembles de \mathbb{R}^{d-1} . Notons que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ et tous $i, j \in \{1, \dots, d\}$, on a :

$$\pi_i(\mathbf{x}, j^*) = \pi_i(\mathbf{x} - \mathbf{e}_j, j^*)$$

On en déduit que faire un flip ascendant ou descendant sur une surface en escalier ne modifie pas ses ombres. Ceci reste valable pour un nombre fini de flips, mais pas nécessairement pour un nombre infini de flips. En effet, on a seulement (voir aussi Fig. 4.6) :

Proposition 4.14 Si \mathcal{S}' est une surface en escalier flip-accessible à partir d'une surface en escalier \mathcal{S} , alors chaque ombre de \mathcal{S}' est incluse dans l'ombre correspondante de \mathcal{S} .

Preuve. Un point dans une ombre de \mathcal{S}' est de la forme $\pi_i(\mathbf{z})$, où \mathbf{z} est un point de l'interprétation géométrique de \mathcal{S}' . Par définition de la flip-accessibilité, pour toute boule de taille fixée, il existe une séquence finie de flips telle que \mathcal{S} soit transformée en une surface en escalier qui coïncide avec \mathcal{S}' sur cette boule. En particulier, en considérant une boule contenant \mathbf{z} , l'invariance des ombres par un nombre fini de flips assure que $\pi_i(\mathbf{z})$ est aussi dans l'ombre $\pi_i(\mathcal{S})$. Le résultat annoncé en découle. \square

En fait, on montre que la condition nécessaire donnée par la proposition 4.14 est une condition suffisante. Commençons par le lemme suivant :

Lemme 4.15 Soit \mathcal{S} une surface en escalier et \mathbf{x} un vecteur entier au-dessus (resp. en dessous) de \mathcal{S} . Si, pour $i = 1, \dots, d$, $\pi_i(\mathbf{x}) \in \pi_i(\mathcal{S})$, alors la surface $\mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}}$ (resp. $\mathcal{S} \wedge \check{C}_{\mathbf{x}}$) est finiment flip-accessible à partir de \mathcal{S} .

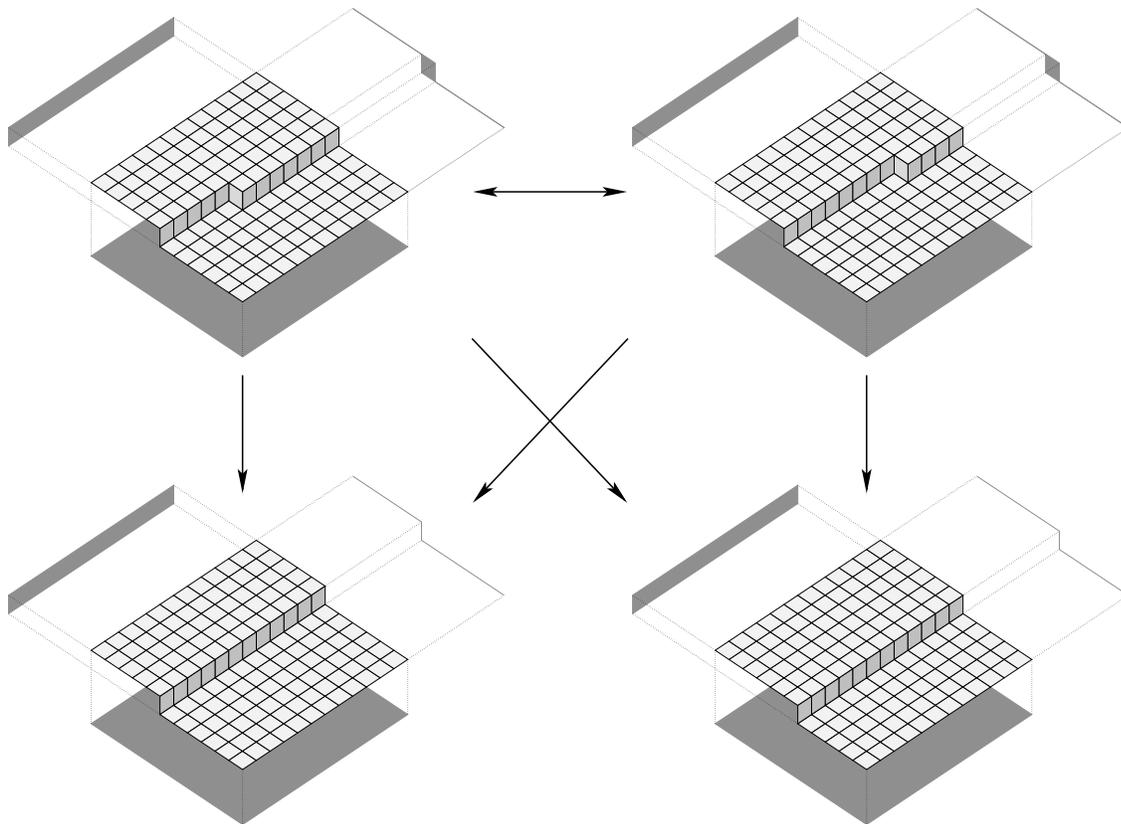


FIGURE 4.6 – Quatre surfaces en escalier, avec une flèche d’une surface à une autre si cette dernière est flip-accessible à partir de la première. Les ombres de ces surfaces sont représentées (en sombre). D’après le théorème 4.16 (ci-dessous), il y a flip-accessibilité exactement quand il y a inclusion des ombres.

Preuve. Supposons, par exemple, que \mathbf{x} est au-dessus de \mathcal{S} (l'autre cas étant similaire). Les hypothèses assurent que, pour $i = 1, \dots, d$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{x} - \lambda_i \mathbf{e}_i$ soit un sommet de \mathcal{S} . Introduisons le vecteur $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \lambda_1 \mathbf{e}_1 - \dots - \lambda_d \mathbf{e}_d$. On déduit alors de la proposition 4.6 et de la définition de $\hat{C}_{\mathbf{x}}$ qu'un vecteur \mathbf{y} au-dessus de \mathcal{S} et strictement en dessous de $\mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}}$ vérifie $\mathbf{z} \leq \mathbf{y} < \mathbf{x}$. En particulier, il y a un nombre fini N de tels vecteurs. Raisonnons alors par récurrence sur N . Si $N = 0$, on a $\mathcal{S} = \mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}}$ et il n'y a pas besoin de faire de flips. Sinon, soit \mathbf{y}_0 le vecteur de hauteur minimale (Déf. 4.7) parmi ceux au-dessus de \mathcal{S} et strictement en dessous de $\mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}}$. Il n'est pas difficile de voir qu'un tel vecteur est nécessairement un sommet de \mathcal{S} , car sinon on pourrait le remplacer par $\mathbf{y}_0 - \mathbf{e}_1 - \dots - \mathbf{e}_d$, qui a une hauteur strictement inférieure. De plus, pour $i = 1, \dots, d$, $\mathbf{y}_0 - \mathbf{e}_i$ n'est pas un sommet de \mathcal{S} (car ce vecteur a aussi une hauteur strictement inférieure à celle de \mathbf{y}_0). On en déduit que les sommets de \mathcal{S} voisins de \mathbf{y}_0 sont $\mathbf{y}_0 + \mathbf{e}_i$, pour $i = 1, \dots, d$, et donc $\mathcal{S}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{e}_i, i) = 1$, pour $i = 1, \dots, d$. En ajoutant $\mathcal{F}_{\mathbf{y}_0}$ à \mathcal{S} on obtient donc une surface \mathcal{S}' , qui est telle qu'il y a $N - 1$ vecteurs au-dessus d'elle et strictement en dessous de $\mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}}$ (les N précédents moins \mathbf{y}_0). Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}}$ est finiment flip-accessible à partir de \mathcal{S}' , donc à partir de \mathcal{S} avec le flip $\mathcal{F}_{\mathbf{y}_0}$. \square

Ainsi, le lemme précédent montre comment transformer par flips une surface en escalier de façon à ce que la surface obtenue ait pour sommet un vecteur fixé. On utilise alors ce résultat pour montrer :

Théorème 4.16 *Une surface en escalier \mathcal{S}' est flip-accessible à partir d'une surface en escalier \mathcal{S} si et seulement si chaque ombre de \mathcal{S}' est incluse dans l'ombre correspondante de \mathcal{S} :*

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\text{flips}} \mathcal{S}' \Leftrightarrow \forall i, \pi_i(\mathcal{S}') \subset \pi_i(\mathcal{S}).$$

Preuve. Notons $V(\mathcal{S}') = \{\mathbf{x}_n \mid n \geq 1\}$ de telle sorte que si \mathbf{x}_m a une norme supérieure à \mathbf{x}_n , alors $m \geq n$. D'après le lemme 4.15, en supposant, par exemple, que \mathbf{x}_1 est au-dessus de \mathcal{S} , on transforme \mathcal{S} en $\mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}_1}$, qui est une surface dont \mathbf{x}_1 est un sommet, en effectuant un nombre fini de flips. Supposons alors qu'on ait transformé \mathcal{S} en une surface \mathcal{S}_n dont $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ sont des sommets, en effectuant un nombre fini de flips. Toujours d'après le lemme 4.15, en supposant, par exemple, que \mathbf{x}_{n+1} est au-dessus de \mathcal{S}_n , on transforme \mathcal{S}_n en une surface $\mathcal{S}_{n+1} = \mathcal{S}_n \vee \hat{C}_{\mathbf{x}_{n+1}}$ dont \mathbf{x}_{n+1} est un sommet. De plus, la preuve du lemme montre que ces flips sont tous localisés en dessous du coin $\hat{C}_{\mathbf{x}_{n+1}}$. Or la proposition 4.6 assure que \mathbf{x}_{n+1} n'est ni strictement inférieur ni strictement supérieur à aucun des sommets $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. On en déduit qu'en transformant \mathcal{S}_n en \mathcal{S}_{n+1} , aucun flip localisé en \mathbf{x}_i , avec $i \leq n$, n'est fait. Donc $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$ sont tous des sommets de \mathcal{S}_{n+1} . Par récurrence, on obtient une suite de surfaces en escalier convergeant vers une surface qui a les mêmes sommets que \mathcal{S}' : il s'agit donc de \mathcal{S}' , ce qui termine la preuve. \square

La figure 4.6 illustre ce théorème. Un cas particulier intéressant est celui des plans en escalier. En effet, ceux-ci ont des ombres particulières :

Proposition 4.17 *Un plan en escalier de \mathfrak{P} dont le vecteur a toutes ses coordonnées strictement positives n'a que des ombres complètes, c'est-à-dire égales à \mathbb{R}^{d-1} .*

Preuve. Soit \mathcal{P} un plan en escalier de vecteur normal $\boldsymbol{\alpha} > 0$ et d'intercept ρ . Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ un vecteur dont la $i^{\text{ème}}$ coordonnée est nulle. On peut écrire $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$, avec $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ et $\mathbf{z} \in [0, 1]^d$ ayant tous les deux une $i^{\text{ème}}$ coordonnée nulle. La suite $(\langle \mathbf{x} + k\mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle)_k$ est strictement croissante car la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $\boldsymbol{\alpha}$ est strictement positive. Donc il existe k tel que :

$$\langle \mathbf{x} + k\mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{x} + k\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle,$$

c'est-à-dire $\mathcal{P}(\mathbf{x}, i) = 1$. En particulier, le vecteur $\mathbf{x} + k\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i + \mathbf{z}$, dont l'image par π_i est \mathbf{y} , appartient à l'interprétation géométrique de \mathcal{P} (ceci découle de la définition de l'interprétation géométrique d'une face, voir Déf. 2.5, Chap. 2). Ceci prouve que l'ombre $\pi_i(\mathcal{P})$ est complète. \square

On déduit alors immédiatement du théorème 4.16 :

Corollaire 4.18 *Si \mathcal{P} est un plan en escalier de \mathfrak{P} dont le vecteur a toutes ses coordonnées strictement positives, alors toute surface en escalier de \mathfrak{S} est flip-accessible à partir de \mathcal{P} .*

Par exemple, la surface en escalier de la figure 4.1 peut être obtenue en faisant des flips sur le plan en escalier de la figure 3.1 (Chap. 3).

4.2.2 Pseudo-flip-accessibilité

La notion de flip-accessibilité introduite dans le paragraphe précédent pour les surfaces en escalier est directement inspirée de la notion correspondante pour les pavages. Cependant, soulignons que la définition d'un flip comme une fonction de \mathfrak{F} (Déf. 4.11) permet de dépasser le cadre des surfaces en escalier (et donc la correspondance avec les pavages). Plus précisément, on peut définir la notion suivante de flip-accessibilité, appelée *pseudo-flip-accessibilité* pour la distinguer de la précédente :

Définition 4.19 *Une fonction $\mathcal{E}' \in \mathfrak{F}$ est dite pseudo-flip-accessible à partir d'une fonction $\mathcal{E} \in \mathfrak{F}$ s'il existe une suite $(\mathcal{E}_n)_n$ de fonctions de \mathfrak{F} telle que :*

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n \in \{\pm \mathcal{F}_x \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n = \mathcal{E}'.$$

Si $(\mathcal{E}_n)_n$ est finie, alors \mathcal{E}' est dite finiment pseudo-flip-accessible à partir de \mathcal{E} .

Soulignons qu'une surface flip-accessible à partir d'une autre surface est, *a fortiori*, pseudo-flip-accessible à partir de cette surface. La réciproque est en général fautive, puisque le théorème suivant montre qu'il y a en fait toujours pseudo-flip-accessibilité entre deux surfaces en escalier :

Théorème 4.20 *Si \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont deux surfaces en escalier, alors \mathcal{S}' est pseudo-flip-accessible à partir de \mathcal{S} .*

Preuve. Soit \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux surfaces en escalier. Soit $\varepsilon_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$ la fonction de \mathbb{Z}^d dans $\{-1, 0, 1\}$ définie par :

$$\varepsilon_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est au-dessus de } \mathcal{S} \text{ et strictement en dessous de } \mathcal{S}' \\ -1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est en dessous de } \mathcal{S} \text{ et strictement au-dessus de } \mathcal{S}' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit alors $\{\mathbf{x}_n \mid n \geq 1\}$ l'ensemble des vecteurs de \mathbb{Z}^d envoyés dans $\{-1, 1\}$ par $\varepsilon_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$. On suppose que cet ensemble est indexé de telle sorte que si $i \leq j$, alors \mathbf{x}_i a une norme inférieure à \mathbf{x}_j . Ceci assure la convergence de la suite de fonction $(\mathcal{S}_n)_n$ définie par :

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S} + \sum_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(\mathbf{x}_k) \mathcal{F}_{\mathbf{x}_k}.$$

De plus, cette suite converge vers \mathcal{S}' puisque que tant qu'un point de \mathcal{S}_n est au-dessus (resp. en dessous) de \mathcal{S}' , il sera remonté (resp. descendu) par un flip (selon le signe ± 1 donné au flip par $\varepsilon_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$). La surface \mathcal{S}' est donc pseudo-flip-accessible à partir de \mathcal{S} . \square

La pseudo-flip-accessibilité est donc une notion strictement plus puissante que celle de flip-accessibilité. On peut se demander quel intérêt a cette notion, qui semble trop détachée d'une quelconque interprétation géométrique (puisqu'on s'autorise à enlever ou ajouter un cube unité, ou voxel, n'importe où dans l'espace). Le théorème suivant montre cependant que cette notion peut être utile pour décider si une fonction binaire est une surface en escalier. Ce théorème sera notamment utilisé dans la suite (Chap. 5) pour relier l'action des applications duales sur les surfaces en escalier (Chap. 5) à leur action sur les plans en escalier (Chap. 3).

Théorème 4.21 *Une fonction binaire pseudo-flip-accessible à partir d'une surface en escalier est elle-même une surface en escalier.*

Preuve. Soit \mathcal{B} une fonction binaire pseudo-flip-accessible à partir d'une surface en escalier \mathcal{S} . Il existe une suite $(\mathbf{x}_n, \varepsilon_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$ telle que :

$$\mathcal{B} = \mathcal{S} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq n \leq N} \varepsilon_n \mathcal{F}_{\mathbf{x}_n}.$$

On peut supposer que $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$ pour $i \neq j$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de flip ajouté puis retranché), et donc que $\varepsilon_n = \pm 1$ (car si un flip est fait, par exemple, 2 fois, au moins un autre flip devra être fait au même endroit mais dans l'autre sens sinon \mathcal{B} ne sera pas binaire).

Fixons maintenant $R \geq 0$. Il existe $N \geq 0$ tel que \mathcal{B} et $\mathcal{S} + \varepsilon_1 \mathcal{F}_{\mathbf{x}_1} + \dots + \varepsilon_N \mathcal{F}_{\mathbf{x}_N}$ soient égales sur $\{(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\} \mid \|\mathbf{x}\| \leq R\}$. On peut réordonner les flips $\mathcal{F}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \mathcal{F}_{\mathbf{x}_N}$ de telle sorte qu'on ait :

$$\mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_j \Rightarrow \begin{cases} i \leq j & \text{si } \varepsilon_i = \varepsilon_j = 1, \\ i \geq j & \text{si } \varepsilon_i = \varepsilon_j = -1. \end{cases}$$

Montrons alors, par récurrence sur n , que la fonction $\mathcal{S}_n = \mathcal{S} + \sum_{k \leq n} \varepsilon_k \mathcal{F}_{\mathbf{x}_k}$ est une surface en escalier pour $n = 0, \dots, N$. C'est vrai pour $n = 0$ puisque \mathcal{S} est une surface en escalier. Supposons que, pour $n < N$, \mathcal{S}_n soit une surface en escalier. Supposons aussi que $\varepsilon_{n+1} = 1$ (le cas $\varepsilon_{n+1} = -1$ est similaire). Si \mathcal{S}_{n+1} n'est pas binaire, c'est que l'ajout flip $\mathcal{F}_{\mathbf{x}_{n+1}}$ a donné un coefficient négatif à une face $(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{e}_i, i^*)$ ou plus grand que deux à une face (\mathbf{x}_{n+1}, i^*) (ceci découle de la définition d'un flip). Considérons le premier cas, le second étant similaire. Comme \mathcal{S}_N est binaire sur $\{(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\} \mid \|\mathbf{x}\| \leq R\}$, le coefficient négatif d'une face $(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{e}_i, i^*)$ devra être modifié par un flip ultérieur, mettons $\varepsilon_{n'} \mathcal{F}_{\mathbf{x}_{n'}}$, avec $n' > n+1$. Si $\varepsilon_{n'} = 1$, alors $\mathbf{x}_{n'} = \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{e}_i$, ce qui est impossible vu la manière dont sont ordonnés les flips. Si $\varepsilon_{n'} = -1$, alors $\mathbf{x}_{n'} = \mathbf{x}_{n+1}$, ce qui est exclu car les \mathbf{x}_i sont distincts. Donc \mathcal{S}_{n+1} est binaire. Or, une fonction binaire obtenue en ajoutant un flip à une surface en escalier est nécessairement une surface en escalier. Donc \mathcal{S}_{n+1} est une surface en escalier, ce qui termine la récurrence.

Finalement, la fonction \mathcal{B} coïncide sur des boules arbitrairement grandes avec une surface en escalier. On en déduit que \mathcal{B} est une surface en escalier (\mathcal{G} étant fermé). \square

En particulier, ce théorème sera utile dans le chapitre suivant pour décrire une surface en escalier quelconque comme un ensemble de flips faits sur un plan en escalier, sans se préoccuper de l'ordre dans lequel ces flips peuvent être faits. Autrement dit, on ramène ainsi l'étude des surfaces en escalier – objets souvent complexes – aux plans en escalier et aux flips – objets bien plus simples.

Chapitre 5

Développement de surface en escalier

Ce chapitre est en quelque sorte l'extension du chapitre 3 au cas des surfaces en escalier. On commence par caractériser l'action des applications duales sur les surfaces en escalier. Plus précisément, nous donnons une condition nécessaire et suffisante simple pour que l'image d'un plan en escalier par l'application duale d'un morphisme soit un plan en escalier (Th. 5.3). Ce résultat a été publié dans [3] dans le cas d'une application duale d'une substitution, puis détaillé dans [16] (soumis), dans le cas général d'une application duale d'un morphisme. On montre ensuite que le procédé consistant à calculer le développement d'un plan grâce à ses paliers (voir Chap. 3) peut être étendu aux surfaces en escalier, ceci bien qu'une surface en escalier n'ait généralement pas de vecteur normal, contrairement à un plan en escalier. Enfin, on caractérise en termes de *quasi-plans* les surfaces en escalier ayant le même développement qu'un vecteur réel donné (Th. 5.14 et 5.20). Une version partielle de ce dernier résultat se trouve dans l'article [16].

5.1 Action des applications duales

5.1.1 Cas général

Le point clé pour étendre l'action des applications duales des plans aux surfaces en escaliers est la notion de flip introduite dans le chapitre 4 (Déf 4.11). Plus précisément, la proposition suivante est fondamentale :

Proposition 5.1 *Soit σ un morphisme unimodulaire. Alors, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, l'application duale $E_1^*(\sigma)$ envoie le flip localisé en \mathbf{x} sur le flip localisé en $M_\sigma^{-1}\mathbf{x}$:*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d, \quad E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_{\mathbf{x}}) = \mathcal{F}_{M_\sigma^{-1}\mathbf{x}}.$$

Preuve. Rappelons que pour $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$, on a :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})(\mathbf{y}, j) = \sum_{i|\sigma(j)=p \cdot i \cdot s} \mathcal{F}(M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{f}(p), i) - \sum_{i|\sigma(j)=p \cdot i^{-1} \cdot s} \mathcal{F}(M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{f}(p) - \mathbf{e}_i, i).$$

Notons $\sigma(j) = u_1^{\varepsilon_1} \cdots u_l^{\varepsilon_l}$, avec, pour $k = 0, \dots, l$, $u_k \in \{1, \dots, d\}$ et $\varepsilon_k = \pm 1$. Introduisons alors, pour $k = 0, \dots, l$:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{f}(u_1^{\varepsilon_1} \cdots u_k^{\varepsilon_k}).$$

En remarquant que $\mathbf{f}(p) - \mathbf{e}_i = \mathbf{f}(p \cdot i^{-1})$, on peut alors réécrire $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})(\mathbf{y}, j)$:

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})(\mathbf{y}, j) = \sum_{\varepsilon_k > 0} \mathcal{F}(M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{r}_{k-1}, u_k) - \sum_{\varepsilon_k < 0} \mathcal{F}(M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{r}_k, u_k).$$

Prenons maintenant pour \mathcal{F} un flip \mathcal{F}_x (Déf. 4.11). Notons respectivement A et B la première et la seconde somme de l'équation ci-dessus. On a $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_x)(\mathbf{y}, j) = A - B$, et on calcule :

$$A = \text{Card}\{\varepsilon_k > 0 \mid M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{r}_{k-1} = \mathbf{x}\} - \text{Card}\{\varepsilon_k > 0 \mid M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{r}_{k-1} = \mathbf{x} - \mathbf{e}_{u_k}\},$$

$$B = \text{Card}\{\varepsilon_k < 0 \mid M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{r}_k = \mathbf{x}\} - \text{Card}\{\varepsilon_k < 0 \mid M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{r}_k = \mathbf{x} - \mathbf{e}_{u_k}\}.$$

Pour $\varepsilon_k > 0$ (resp. $\varepsilon_k < 0$), on a $\mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{e}_{u_k} = \mathbf{r}_k$ (resp. $\mathbf{r}_k + \mathbf{e}_{u_k} = \mathbf{r}_{k-1}$). Ceci permet de réécrire A et B :

$$A = \text{Card}\{\varepsilon_k > 0 \mid \mathbf{r}_{k-1} = \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y}\} - \text{Card}\{\varepsilon_k > 0 \mid \mathbf{r}_k = \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y}\},$$

$$B = \text{Card}\{\varepsilon_k < 0 \mid \mathbf{r}_k = \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y}\} - \text{Card}\{\varepsilon_k < 0 \mid \mathbf{r}_{k-1} = \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y}\}.$$

On obtient alors (en regroupant les termes croisés de A et B) :

$$A - B = \text{Card}\{\varepsilon_k \mid \mathbf{r}_{k-1} = \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y}\} - \text{Card}\{\varepsilon_k \mid \mathbf{r}_k = \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y}\}.$$

On en déduit :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_x)(\mathbf{y}, j) = A - B = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y} = \mathbf{r}_0, \\ -1 & \text{si } \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y} = \mathbf{r}_l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En remarquant que $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{r}_l = \mathbf{f}(\sigma(j)) = M_\sigma \mathbf{e}_j$, on obtient finalement :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_x)(\mathbf{y}, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{y} = M_\sigma^{-1} \mathbf{x}, \\ -1 & \text{si } \mathbf{y} = M_\sigma^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{e}_j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_x)(\mathbf{y}, j) = \mathcal{F}_{M_\sigma^{-1} \mathbf{x}}(\mathbf{y}, j)$. Ceci prouve le résultat annoncé. \square

Ainsi, les applications duales agissent de manière simple sur les flips : elles ne font que les déplacer. Les résultats du chapitre 4, notamment les théorèmes 4.20 et 4.21, vont alors permettre d'étendre aux surfaces en escalier le théorème 3.4, qui caractérise l'action des application duales sur les plans en escalier.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.2 *Soit σ un morphisme unimodulaire. S'il existe une surface en escalier \mathcal{S} telle que $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$ soit une fonction binaire, alors il existe un vecteur $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que ${}^t M_\sigma \alpha \in \mathbb{R}_+^d$.*

Preuve. Soit \mathcal{S} une surface en escalier telle que $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}) \in \mathfrak{B}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note \mathcal{S}_n la fonction binaire définie par :

$$\mathcal{S}_n : (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i^*) \mapsto \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i^*) & \text{si } \|\mathbf{x}\| \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Géométriquement, \mathcal{S}_n est la restriction de \mathcal{S} à la boule de rayon n centrée en $\mathbf{0}$. Pour n assez grand, la taille $|\mathcal{S}_n|$ de \mathcal{S}_n est strictement positive. Par ailleurs, comme la suite $(\mathcal{S}_n)_n$ tend vers \mathcal{S} et que $E_1^*(\sigma)$ est continue sur \mathfrak{F} , la suite $(E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}_n))_n$ tend vers \mathfrak{B} . En particulier, il n'est pas difficile de voir que ceci implique, pour n assez grand, $|E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}_n)| > 0$. On peut donc, pour n assez grand, définir les deux vecteurs réels positifs et non nuls suivant :

$$\alpha_n = \frac{1}{|\mathcal{S}_n|} (|\mathcal{S}_n|_1, \dots, |\mathcal{S}_n|_d), \quad \beta_n = \frac{1}{|E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}_n)|} (|E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}_n)|_1, \dots, |E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}_n)|_d).$$

D'après la proposition 2.12, on a alors ${}^t M_\sigma \alpha_n = \lambda_n \beta_n$, avec :

$$\lambda_n = \frac{|E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}_n)|}{|\mathcal{S}_n|} = \frac{\|{}^t M_\sigma \mathbf{f}(\mathcal{S}_n)\|_1}{\|\mathbf{f}(\mathcal{S}_n)\|_1} \leq \|{}^t M_\sigma\|,$$

où $\|{}^t M_\sigma\|$ désigne la norme d'opérateur de ${}^t M_\sigma$. Comme $\|\alpha_n\|_1 = \|\beta_n\|_1 = 1$, par compacité, on peut extraire des suites $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ et $(\lambda_n)_n$ des suites convergentes de limites respectives α , β et λ . Par continuité de M_σ , on a encore ${}^t M_\sigma \alpha = \lambda \beta$, avec $\|\alpha\|_1 = 1$, ce qui termine la preuve. \square

Soulignons qu'il existe des applications duales qui n'envoient *aucune* surface en escalier sur une fonction binaire. C'est, par exemple, le cas de celles associées aux morphismes dont la matrice d'incidence est négative.

Par ailleurs, on peut remarquer que la réciproque de ce lemme est vraie. En effet, si un vecteur $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ vérifie ${}^t M_\sigma \alpha \in \mathbb{R}_+^d$, alors le théorème 3.4 assure que la surface en escalier $\mathcal{S} = \mathcal{P}_{\alpha,0}$ est envoyée sur la fonction binaire $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}) = \mathcal{P}_{{}^t M_\sigma \alpha, 0}$.

Nous pouvons maintenant donner le résultat principal de ce paragraphe, qui étend le théorème 3.6 au cas des surfaces en escalier :

Théorème 5.3 *Soit σ un morphisme unimodulaire. Si l'image par $E_1^*(\sigma)$ d'une surface en escalier est binaire, alors c'est une surface en escalier. En d'autres termes :*

$$E_1^*(\sigma)(\mathfrak{S}) \cap \mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}.$$

Preuve. Soit \mathcal{S} une surface en escalier telle que $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$ soit binaire. D'après le lemme 5.2, il existe donc un vecteur $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que ${}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d$. Le théorème 4.20 permet alors d'écrire \mathcal{S} comme une limite de flips faits sur le plan $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},0}$:

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},0} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \mathcal{F}_{\mathbf{x}_k},$$

où, pour tout k , $\varepsilon_k = \pm 1$ et $\mathbf{x}_k \in \mathbb{Z}^d$. Comme $E_1^*(\sigma)$ est continue sur \mathfrak{F} (Prop. 2.11), on obtient en appliquant $E_1^*(\sigma)$:

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}) = E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},0}) + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_{\mathbf{x}_k}).$$

D'après le théorème 3.4 et la proposition 5.1, on en déduit :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}) = \mathcal{P}_{{}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha},0} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \mathcal{F}_{M_\sigma^{-1} \mathbf{x}_k}.$$

Ainsi, la fonction binaire $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$ est pseudo-flip-accessible à partir du plan en escalier $\mathcal{P}_{{}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha},0}$. C'est donc, d'après le théorème 4.21, une surface en escalier. \square

5.1.2 Cas positif

Lemme 5.4 *Soit σ une substitution unimodulaire. Alors, pour toute surface en escalier \mathcal{S} , $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$ est une fonction binaire.*

Preuve. Soit \mathcal{S} une surface en escalier. Supposons que $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$ ne soit pas binaire. Comme les faces de $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$ ont des coefficients positifs, c'est qu'il existe deux faces (\mathbf{x}_1, i_1^*) et (\mathbf{x}_2, i_2^*) de \mathcal{S} dont les images se chevauchent, c'est-à-dire telles que, pour un entier $j \in \{1, \dots, d\}$, on ait :

$$\sigma(j) = p_1 \cdot i_1 \cdot s_1 = p_2 \cdot i_2 \cdot s_2 \quad \text{et} \quad M_\sigma^{-1}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{f}(p_1)) = M_\sigma^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{f}(p_2)).$$

Notons que $(\mathbf{x}_1, i_1^*) \neq (\mathbf{x}_2, i_2^*)$ entraîne $p_1 \neq p_2$. Supposons, par exemple, que p_2 soit plus court que p_1 . On déduit donc de ce qui précède :

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{f}(p_1) - \mathbf{f}(p_2) \geq \mathbf{f}(i_2) = \mathbf{e}_{i_2}.$$

Introduisons alors les deux vecteurs suivants :

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 + \sum_{i=1}^d \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{e}_{i_2}.$$

Ce sont des sommets respectivement de (\mathbf{x}_1, i_1^*) et (\mathbf{x}_2, i_2^*) , et ils vérifient :

$$\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = (\mathbf{x}_1 + \sum_{i=1}^d \mathbf{e}_i) - (\mathbf{x}_2 + \mathbf{e}_{i_2}) = \underbrace{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \mathbf{e}_{i_2})}_{\geq \mathbf{0}} + \sum_{i=1}^d \mathbf{e}_i.$$

En d'autres termes, \mathbf{y}_1 et \mathbf{y}_2 sont des sommets de \mathcal{S} tels que $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$ a toutes ses coordonnées strictement positives. Ceci est en contradiction avec la proposition 4.6. On en déduit que $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$ est binaire. \square

Ce lemme permet alors de déduire du théorème 5.3 le théorème suivant, qui généralise le corollaire 3.7 dans le cas des surfaces en escalier :

Théorème 5.5 *L'application duale d'une substitution unimodulaire envoie toute surface en escalier sur une surface en escalier.*

5.2 Développement de Brun d'une surface

On montre ici comment étendre aux surfaces en escalier la notion de développement de Brun d'un plan en escalier.

5.2.1 Surface cohérente

Le point clé consiste à remarquer que la notion de palier (Déf. 3.18) peut aussi être utilisée pour les surfaces en escalier. Par exemple, la figure 5.1 représente quelques paliers d'une surface en escalier.

Rappelons que les paliers permettent de "lire" sur un plan une information partielle sur son vecteur normal (Prop. 3.19). Notamment, deux fonctions a et i ont été définies sur les plans en escalier (Déf. 3.20), qui vérifient, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in [0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ et tout $\rho \in \mathbb{R}$ (Prop. 3.21) :

$$i(\mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho}) = \min\{i \mid \alpha_i = \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\} \quad \text{et} \quad a(\mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho}) = \lfloor \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^{-1} \rfloor.$$

Dans le cas plus général d'une surface, il est plus difficile d'interpréter l'information donnée par les paliers, puisque la notion même de vecteur normal perd son sens. Cependant, en notant ici aussi respectivement $a_{i,j}^-(\mathcal{S})$ et $a_{i,j}^+(\mathcal{S})$ l'infimum et le supremum des tailles des (i, j) -paliers d'une surface en escalier \mathcal{S} , on s'aperçoit que les formules définissant les fonctions a et i sur les plans restent valables sur presque toutes les surfaces. Plus précisément, introduisons la notion suivante :

Définition 5.6 *Une surface en escalier \mathcal{S} est dite cohérente s'il existe un entier $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que :*

$$\max_{1 \leq j \leq d} a_{j+1, i+1}^+(\mathcal{S}) \leq 1.$$

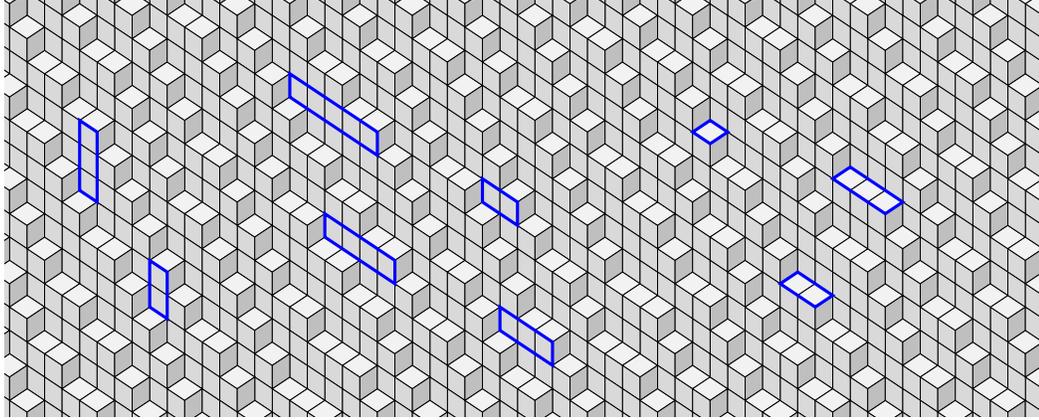


FIGURE 5.1 – Cette surface en escalier a des $(1, 3)$ -paliers de taille 2 ou 3 (encadrés, à gauche), des $(1, 2)$ -paliers de taille 2, 3 ou 4 (au centre) et des $(3, 2)$ -paliers de taille 1, 2 ou 3 (à droite).

Intuitivement, une surface est cohérente si l'on peut définir l'indice de la plus grande coordonnée d'un éventuel vecteur normal (si jamais cette surface est plane). On peut alors étendre les fonctions a et i sur les surfaces cohérentes :

$$i(\mathcal{S}) = \min_{1 \leq i \leq d} \{i \mid \max_{1 \leq j \leq d} a_{j+1, i+1}^+(\mathcal{S}) \leq 1\} \quad \text{et} \quad a(\mathcal{S}) = a_{1, i(\mathcal{S})+1}^-(\mathcal{S}).$$

Notons qu'une surface est cohérente si et seulement si elle ne contient pas à la fois un $(i + 1, j + 1)$ -palier et un $(j + 1, i + 1)$ -palier qui soient tous les deux de taille supérieure à 2. Par exemple, on vérifie aisément que la surface en escalier représentée sur la figure 4.1 n'est pas cohérente, alors que celle représentée sur la figure 5.1 l'est.¹ En particulier, on en déduit qu'une surface qui n'est pas cohérente ne peut pas être un plan, car sinon on déduirait de la proposition 3.19 que le vecteur normal d'un tel plan aurait deux coordonnées α_{i+1} et α_{j+1} vérifiant :

$$\alpha_{i+1} < \alpha_{j+1} \quad \text{et} \quad \alpha_{j+1} < \alpha_{i+1}.$$

Cependant, une surface cohérente n'est pas nécessairement un plan. La notion de cohérence permet seulement de discriminer les surfaces qui sont "potentiellement planes" de celles qui sont "clairement non planes".

5.2.2 Algorithme de Brun géométrique

Le paragraphe précédent a montré que les fonctions a et i , initialement introduites pour déduire d'un plan l'information nécessaire à calculer son développement

1. Du moins, la partie finie qui en est représentée n'exclut pas qu'elle soit cohérente.

de Brun, sont en fait définies sur toute surface en escalier cohérente. Montrons que cela permet de prolonger naturellement l'application \tilde{T} (Déf. 3.23) aux surfaces.

Rappelons que \tilde{T} a été définie (Déf. 3.23) sur le sous-ensemble $\mathfrak{P}_\exists \setminus \mathfrak{P}_\forall$ de \mathfrak{P} constitué des plans en escalier dont le vecteur normal peut s'écrire $(1, \boldsymbol{\alpha})$, avec $\boldsymbol{\alpha} \in [0, 1]^d$. Par analogie, on introduit les deux sous-ensembles de \mathfrak{S} suivants :

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_\exists &= \{\mathcal{S} \in \mathfrak{S} \mid \exists a \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, d\}, E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})(\mathcal{S}) \in \mathfrak{S}\}, \\ \mathfrak{S}_\forall &= \{\mathcal{S} \in \mathfrak{S} \mid \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, d\}, E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})(\mathcal{S}) \in \mathfrak{S}\}.\end{aligned}$$

On a alors :

$$\mathfrak{P}_\exists = \mathfrak{S}_\exists \cap \mathfrak{P} \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}_\forall = \mathfrak{S}_\forall \cap \mathfrak{P}.$$

En particulier, $\mathfrak{P}_\exists \setminus \mathfrak{P}_\forall$ est inclus dans $\mathfrak{S}_\exists \setminus \mathfrak{S}_\forall$. L'application \tilde{T} se prolonge donc naturellement sur toute surface cohérente de $\mathfrak{S}_\exists \setminus \mathfrak{S}_\forall$ en posant :

$$\tilde{T}(\mathcal{S}) = E_1^*(\beta_{a(\mathcal{S}), i(\mathcal{S})}^{-1})(\mathcal{S}). \quad (5.1)$$

L'intérêt de la définition initiale de l'application \tilde{T} était de calculer le développement de Brun d'un plan en escalier. En particulier, cela suppose que \tilde{T} puisse être itérée, c'est-à-dire qu'elle envoie un plan sur un plan. Si on veut, par analogie, calculer le développement de Brun d'une surface en escalier, il faut donc que \tilde{T} , prolongée, puisse aussi être itérée, c'est-à-dire qu'elle envoie une surface sur une surface. La proposition suivante montre que c'est bien le cas :

Proposition 5.7 *L'image par \tilde{T} d'une surface cohérente de $\mathfrak{S}_\exists \setminus \mathfrak{S}_\forall$ est une surface en escalier.*

Preuve. Soit \mathcal{S} une surface cohérente. Les entiers $a(\mathcal{S})$ et $i(\mathcal{S})$ sont donc bien définis. Soit alors \mathcal{B} la fonction binaire définie, pour tout vecteur \mathbf{x} de \mathbb{Z}^{d+1} , par :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbf{x}, 1) &= \mathcal{S}(B_{a(\mathcal{S}), i(\mathcal{S})} \mathbf{x}, i(\mathcal{S}) + 1), \\ \mathcal{B}(\mathbf{x}, i(\mathcal{S}) + 1) &= \mathcal{S}(B_{a(\mathcal{S}), i(\mathcal{S})} \mathbf{x} - a \mathbf{e}_{i(\mathcal{S})+1}, 1),\end{aligned}$$

et, pour $j \notin \{1, i(\mathcal{S}) + 1\}$:

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, j) = \mathcal{S}(B_{a(\mathcal{S}), i(\mathcal{S})} \mathbf{x}, j).$$

Les définitions des entiers $a(\mathcal{S})$ et $i(\mathcal{S})$ assurent que si $\mathcal{S}(\mathbf{y}, i(\mathcal{S}) + 1) = 1$, alors $\mathcal{S}(\mathbf{y} - k \mathbf{e}_{i(\mathcal{S})+1}, 1) = 1$, pour $k = 0, \dots, a(\mathcal{S}) - 1$ (taille minimale d'un $(1, i(\mathcal{S}) + 1)$ -palier). On en déduit que l'image de \mathcal{B} par $E_1^*(\beta_{a(\mathcal{S}), i(\mathcal{S})})$ est la surface en escalier \mathcal{S} (voir Déf. 3.17). On en déduit :

$$\tilde{T}(\mathcal{S}) = E_1^*(\beta_{a(\mathcal{S}), i(\mathcal{S})}^{-1})(\mathcal{S}) = \mathcal{B} \in \mathfrak{B}.$$

Le théorème 5.3 permet alors de conclure que $\tilde{T}(\mathcal{S})$ est une surface en escalier. \square

On définit alors le développement de Brun d'une surface en escalier par analogie avec le cas d'un plan en escalier :

Définition 5.8 Le développement de Brun d'une surface en escalier \mathcal{S} est la suite $(a_n, i_n)_{n \geq 0}$ définie, tant que $\tilde{T}^n(\mathcal{S})$ est une surface cohérente de $\mathfrak{S}_{\exists} \setminus \mathfrak{S}_{\forall}$, par :

$$a_n = a(\tilde{T}^n(\mathcal{S})) \quad \text{et} \quad i_n = i(\tilde{T}^n(\mathcal{S})).$$

Ce développement est dit dégénéré s'il existe n tel que $\tilde{T}^n(\mathcal{S}) \notin \mathfrak{S}_{\exists}$.

Les figures 5.2 et 5.3 illustrent ceci dans le cas de développements finis, respectivement non dégénéré et dégénéré.

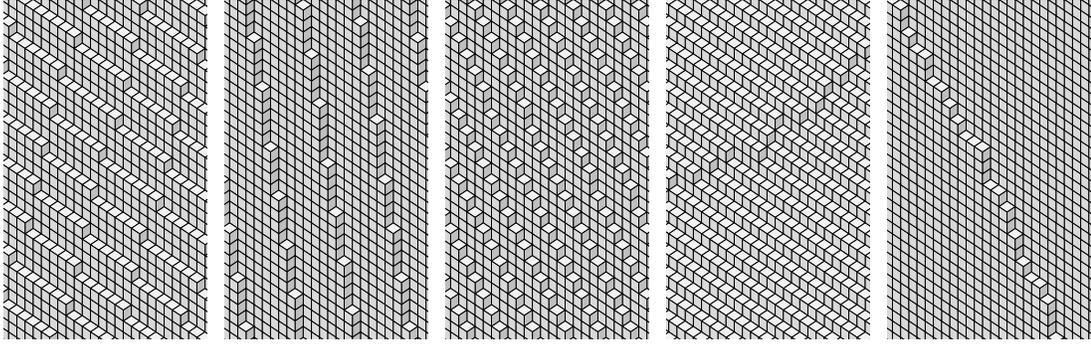


FIGURE 5.2 – Applications itérées de \tilde{T} sur une surface en escalier (de gauche à droite). Cette surface a le même développement de Brun que le plan de la figure 3.5, mais la dernière itération tombe dans $\mathfrak{S}_{\forall} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}$ (et n'est pas cohérente).

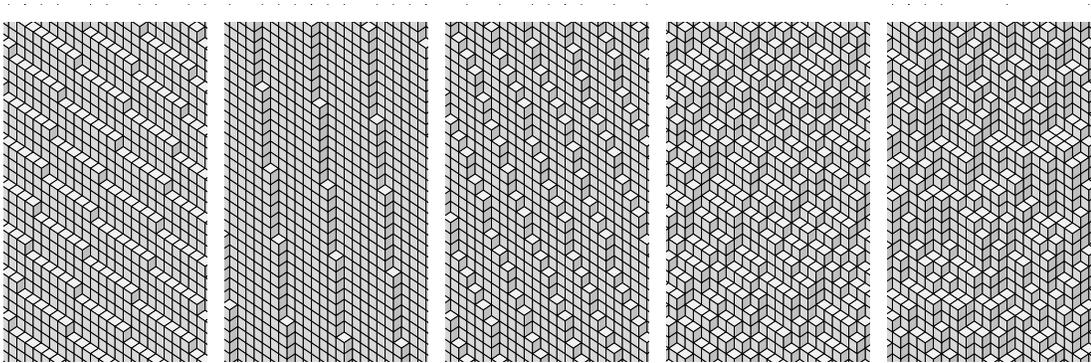


FIGURE 5.3 – Applications itérées de \tilde{T} sur une surface en escalier (de gauche à droite). Cette surface a également le même développement de Brun que plan de la figure 3.5, mais la dernière itération tombe hors de \mathfrak{S}_{\exists} (il s'agit d'un cas dégénéré).

Notons que seuls les développements finis peuvent être dégénérés, et qu'un plan en escalier n'a jamais de développement dégénéré (car $\tilde{T}(\mathfrak{P}_{\exists} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}) \subset \mathfrak{P}_{\exists}$).

5.3 Développements communs

Rappelons qu'un plan en escalier a le même développement de Brun qu'un vecteur α si et seulement si ce plan admet $(1, \alpha)$ pour vecteur normal. Par contre, il est plus difficile de caractériser les surfaces en escalier qui ont le même développement de Brun qu'un vecteur donné. On s'intéresse à ce problème dans ce paragraphe, en se restreignant au cas des développements non dégénérés (Déf. 5.8).

5.3.1 Quasi-plan en escalier

On introduit ici une classe de surfaces en escalier utile pour la suite :

Définition 5.9 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Un quasi-plan en escalier de vecteur normal α et d'intercept ρ et de défaut D est une surface en escalier \mathcal{S} de la forme :

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_{\alpha, \rho} + \sum_{x \in D} \mathcal{F}_x,$$

où D est un sous-ensemble du réseau $D_{\alpha, \rho}$ défini par :

$$D_{\alpha, \rho} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle = \rho\}.$$

Dans la suite, on note $\mathcal{S} \simeq \mathcal{P}_{\alpha, \rho}$ pour signifier que \mathcal{S} est un quasi-plan en escalier de paramètres α et ρ (et de défaut quelconque). Un plan est un donc cas particulier de quasi-plan. La figure 5.4 illustre cette notion.

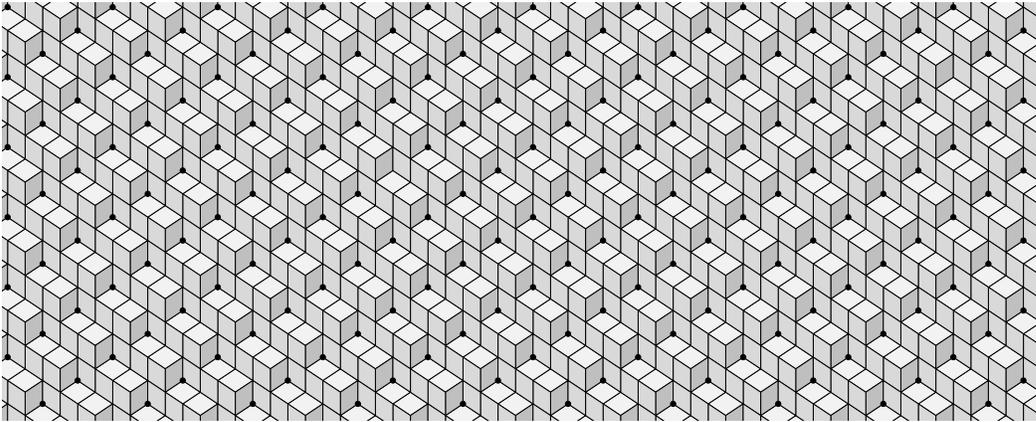


FIGURE 5.4 – Un quasi-plan de paramètres α et ρ se déduit du plan $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$ en ajoutant des flips localisés dans le réseau $D_{\alpha, \rho}$ (ici de rang 2, représenté par des points noirs).

Par ailleurs, il n'est pas difficile de montrer qu'une limite de plans est un quasi-plan :

Proposition 5.10 *Soit respectivement $(\alpha_n)_n$ et $(\rho_n)_n$ deux suites de $\mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$ et \mathbb{R} de limites $\alpha \neq 0$ et ρ . Si la suite $(\mathcal{P}_{\alpha_n, \rho_n})_n$ converge dans \mathfrak{F} , alors sa limite est un quasi-plan en escalier de paramètres α et ρ :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{\alpha_n, \rho_n} \simeq \mathcal{P}_{\alpha, \rho}.$$

Notons que la convergence des paramètres d'une suite de plans n'entraîne pas la convergence de cette suite, et que la limite d'une suite de plans n'est pas nécessairement un plan. De plus, la réciproque de la proposition précédente est clairement fautive, comme l'illustre la figure 5.5, qui représente deux quasi-plans de défauts différents – un seul des deux étant une limite de plans.

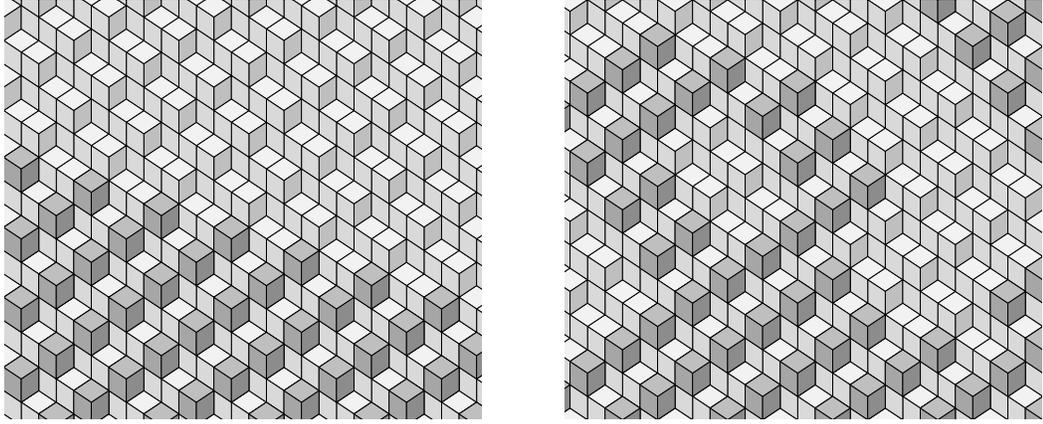


FIGURE 5.5 – La limite d'une suite de plans en escalier, si elle existe, est un quasi-plan en escalier (à gauche - les flips du défaut foncés). Inversement, un quasi-plan en escalier qui n'est pas toujours la limite d'une suite de plans en escalier (à droite).

En outre, ajouter à un plan $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$ des flips localisés dans un défaut $D \subset D_{\alpha, \rho}$ ne conduit pas nécessairement à un quasi-plan : il faut en effet, par définition, que la fonction obtenue soit une surface en escalier. La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit le cas :

Proposition 5.11 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$, $\rho \in \mathbb{R}$ et $D \subset D_{\alpha, \rho}$. On définit $\mathcal{Q} \in \mathfrak{F}$ par :*

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\alpha, \rho} + \sum_{x \in D} \mathcal{F}_x.$$

Alors, \mathcal{Q} est un quasi-plan si et seulement si on a, pour tout i :

$$\langle \alpha | e_i \rangle = 0 \Rightarrow D \subset D + e_i.$$

Preuve. Soit $(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$. On calcule :

$\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x}, i)$	$\mathbf{x} \in D?$	$\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \in D?$	$\mathcal{Q}(\mathbf{x}, i)$
0	non	non	0
0	non	oui	-1
0	oui	non	1
0	oui	oui	0
1	non	non	1
1	non	oui	0
1	oui	non	2
1	oui	oui	1

Si \mathcal{Q} est un quasi-plan en escalier, alors c'est une fonction binaire. On a donc bien $D \subset D + \mathbf{e}_i$, sauf éventuellement à la sixième ligne. Dans ce cas, $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x}, i) = 1$ entraîne $\langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho$, et $\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \in D$ entraîne $\langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \rho$. On en déduit que $\langle \boldsymbol{\alpha} | \mathbf{e}_i \rangle$ n'est pas nul. Inversement, si $D \subset D + \mathbf{e}_i$, alors \mathcal{Q} est binaire, sauf éventuellement à la deuxième ou à la septième ligne. Dans le premier cas, $\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \in D$ entraîne $\langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \rho$, et $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x}, i) = 1$ entraîne $\langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle \leq \rho$. On en déduit que $\langle \boldsymbol{\alpha} | \mathbf{e}_i \rangle$ est nul. Le second cas est en fait impossible, car $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x}, i) = 1$ entraîne $\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho$, alors que $\mathbf{x} \in D$ entraîne $\langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \rho$. On en conclut que \mathcal{Q} est binaire. Comme \mathcal{Q} est pseudo-flip-accessible depuis un plan, le théorème 4.20 assure alors que c'est bien une surface. \square

En particulier, on déduit de la proposition précédente que les $(1, i)$ -paliers d'un quasi-plan de vecteur normal \mathbf{e}_1 sont tous infinis ($i \neq 1$). En effet, si $(\mathbf{x}, 1^*)$ est une face d'un quasi-plan de paramètres \mathbf{e}_1 et ρ et de défaut D , alors soit $\mathbf{x} \in D$, auquel cas, pour tout $k \geq 0$, $\mathbf{x} - k\mathbf{e}_i \in D$, et la face $(\mathbf{x}, 1^*)$ fait partie du $(1, i)$ -palier infini définie par :

$$\sum_{k \geq 0} (\mathbf{x} - k\mathbf{e}_i, 1^*),$$

soit $\mathbf{x} \notin D$, auquel cas, pour tout $k \geq 0$, $\mathbf{x} + k\mathbf{e}_i \notin D$, et la face $(\mathbf{x}, 1^*)$ fait partie du $(1, i)$ -palier infini définie par :

$$\sum_{k \geq 0} (\mathbf{x} + k\mathbf{e}_i, 1^*).$$

Ceci conduit à une nouvelle caractérisation de l'ensemble \mathfrak{S}_\vee (introduit au début du paragraphe 5.2.2) :

Proposition 5.12 *L'ensemble des quasi-plans de vecteur normal \mathbf{e}_1 est égal à \mathfrak{S}_\vee .*

Enfin, une preuve calquée sur celle du théorème 3.4 montre :

Théorème 5.13 *Soit σ un morphisme unimodulaire. Si l'image par $E_1^*(\sigma)$ d'un quasi-plan en escalier de paramètres $\boldsymbol{\alpha}$ et ρ et de défaut D est binaire, alors c'est un quasi-plan en escalier de paramètres ${}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha}$ et ρ et de défaut $M_\sigma^{-1} D$.*

5.3.2 Une condition nécessaire

Ce paragraphe est consacré à démontrer la condition nécessaire suivante :

Théorème 5.14 *Si une surface en escalier \mathcal{S} a un développement de Brun non dégénéré identique au développement de Brun d'un vecteur $\alpha \in [0, 1]^d$, alors \mathcal{S} un quasi-plan de vecteur normal $(1, \alpha)$.*

Le cas d'un développement fini se prouve facilement. En effet, si \mathcal{S} a un développement de Brun non dégénéré de longueur N , alors, par définition, $\tilde{T}^N(\mathcal{S}) \in \mathfrak{S}_\vee$. D'après la proposition 5.12, $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$ est donc un quasi-plan de vecteur normale \mathbf{e}_1 . Le théorème 5.13 appliqué au morphisme $\beta_{a_1, i_1} \circ \dots \circ \beta_{a_N, i_N}$, où (a_n, i_n) est le développement de \mathcal{S} , assure alors que \mathcal{S} (qui est une fonction binaire) est un quasi-plan de vecteur normal $(1, \alpha)$.

Le cas d'un développement infini nécessite plusieurs lemmes techniques. L'idée directrice est que, à cause de la convergence faible de l'algorithme de Brun, itérer l'application \tilde{T} sur une surface formée de flips ajoutés à un plan aura tendance à concentrer ces flips. Localement, la surface deviendra donc de plus en plus "tordue", jusqu'à sortir de \mathfrak{S}_\exists , ce qui correspond à un développement dégénéré. La figure 5.3 illustre assez bien cela. Pour avoir un développement non dégénéré, une surface ne doit donc différer d'un plan que par des flips qui "échappent" à cet effet de concentration. Il s'avère qu'une telle surface est alors un quasi-plan.

Lemme 5.15 *Soit \mathbf{x} un vecteur entier ni strictement positif ni strictement négatif. Alors, l'enveloppe convexe de $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ contient un vecteur réel orthogonal à \mathbf{x} .*

Preuve. Notons $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$. S'il existe i tel que $x_i = 0$, alors \mathbf{e}_i convient. Sinon, soit i et j tels que $x_i > 0$ et $x_j < 0$. On vérifie que $\frac{x_i}{|x_i - x_j|} \mathbf{e}_j - \frac{x_j}{|x_i - x_j|} \mathbf{e}_i$ convient. \square

Dans ce qui suit, on note $d(\mathbf{x}, \mathbb{R}\alpha)$ (resp. $d(\mathbf{x}, \alpha^\perp)$) la distance d'un vecteur \mathbf{x} à la droite $\mathbb{R}\alpha$ (resp. à l'hyperplan de vecteur normal α). Le lemme suivant, soit se voit géométriquement (en termes d'angles de cônes d'axe $\mathbb{R}\alpha$), soit se démontre par un calcul (voir [16]) :

Lemme 5.16 *Soit \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs réels orthogonaux. Alors, on a :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{d(\mathbf{x}, \mathbb{R}\alpha)}{d(\mathbf{x}, \alpha^\perp)} \leq a \Rightarrow \frac{d(\mathbf{y}, \mathbb{R}\alpha)}{d(\mathbf{y}, \alpha^\perp)} \geq \frac{1}{a}$$

Lemme 5.17 *Soit $\alpha \in [0, 1]^d$ et $r \geq 0$. Alors, il existe un entier N tel que :*

$$(n \geq N, \mathbf{x} \in S, \langle B_n^{-1} \mathbf{x} | (1, \alpha) \rangle \neq 0) \Rightarrow \|B_n^{-1} \mathbf{x}\| \geq r,$$

où $(a_n, i_n)_{n \geq 0}$ est le développement de Brun de α , $B_n = B_{a_0, i_0} \dots B_{a_n, i_n}$ et S est l'ensemble des vecteurs entiers ni strictement positifs ni strictement négatifs.

Preuve. Introduisons le nombre réel positif suivant :

$$a_r = \min\{d(\mathbf{y}, (1, \boldsymbol{\alpha})^\perp) \mid \mathbf{y} \in S, \langle \mathbf{y} \mid (1, \boldsymbol{\alpha}) \rangle \neq 0, \|\mathbf{y}\| \leq r\}.$$

Soulignons que les hypothèses assurent que ce nombre est non nul. Notons alors, premièrement, que la faible convergence de l'algorithme de Brun assure qu'il existe un entier N tel que :

$$(n \geq N, \mathbf{u} \in \text{Conv}(\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}\})) \Rightarrow \frac{d(B_n \mathbf{u}, \mathbb{R}(1, \boldsymbol{\alpha}))}{d(B_n \mathbf{u}, (1, \boldsymbol{\alpha})^\perp)} < \frac{a_r}{r},$$

où $\text{Conv}(A)$ désigne l'enveloppe convexe de A . Notons, deuxièmement, que le lemme 5.15 permet d'associer à tout vecteur $\mathbf{x} \in S$ un vecteur $\mathbf{u} \in \text{Conv}(\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}\})$ qui lui est orthogonal (en particulier, pour tout n , on a $\langle B_n^{-1} \mathbf{x} \mid B_n \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{u} \rangle = 0$). Le lemme 5.16 relie alors les deux points précédents et assure :

$$(n \geq N, \mathbf{x} \in S, \langle B_n^{-1} \mathbf{x} \mid (1, \boldsymbol{\alpha}) \rangle \neq 0) \Rightarrow \frac{d(B_n^{-1} \mathbf{x}, \mathbb{R}(1, \boldsymbol{\alpha}))}{d(B_n^{-1} \mathbf{x}, (1, \boldsymbol{\alpha})^\perp)} \geq \frac{r}{a_r}.$$

Soulignons que si $\|B_n^{-1} \mathbf{x}\| \leq r$, alors on a $d(B_n^{-1} \mathbf{x}, \mathbb{R}(1, \boldsymbol{\alpha})) \leq \|B_n^{-1} \mathbf{x}\| \leq r$ et $d(B_n^{-1} \mathbf{x}, (1, \boldsymbol{\alpha})^\perp) \geq a_r$. On en déduit que l'inégalité du membre droit de l'équation ci-dessus ne peut être vérifiée que si $\|B_n^{-1} \mathbf{x}\| \geq r$. Ceci prouve le résultat annoncé. \square

On peut alors terminer la preuve du théorème 5.14 dans le cas d'un développement infini. Notons $(a_n, i_n)_n$ le développement (infini) commun à $\boldsymbol{\alpha}$ et \mathcal{S} . D'après le théorème 4.20, on peut écrire, pour tout n :

$$\tilde{T}^n(\mathcal{S}) = \mathcal{P}_{\mu_n^{-1} B_n^{-1}(1, \boldsymbol{\alpha}), 0} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_{k,n} \mathcal{F}_{\mathbf{x}_{k,n}},$$

où $\mu_n = \|T^0(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty \times \dots \times \|T^n(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty$ et $B_n = B_{a_0, i_0} \dots B_{a_n, i_n}$. On a alors :

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), 0} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_{k,n} \mathcal{F}_{B_n^{-1} \mathbf{x}_{k,n}}. \quad (5.2)$$

Comme deux surfaces égales à translation près ont le même développement de Brun, on peut supposer sans restriction de généralité que $\mathbf{0}$ est un sommet de \mathcal{S} . On en déduit, d'après la proposition 4.6, que pour tout k et tout n , $B_n^{-1} \mathbf{x}_{k,n}$ n'est ni strictement positif ni strictement négatif. En faisant tendre n vers l'infini dans l'équation (5.2), on déduit du lemme 5.17 qu'il existe une suite $(\varepsilon_k)_k$ de \mathbb{Z} et une suite $(\mathbf{y}_k)_k$ vérifiant, pour tout k , $\langle \mathbf{y}_k \mid (1, \boldsymbol{\alpha}) \rangle = 0$, telles que \mathcal{S} s'écrive :

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), 0} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \mathcal{F}_{\mathbf{y}_k}.$$

De plus, pour tout k , on a $\varepsilon_k = 1$ car sinon \mathcal{S} ne serait pas binaire. Ceci montre, selon la définition 5.9, que \mathcal{S} est un quasi-plan de vecteur normal $(1, \boldsymbol{\alpha})$.

Le théorème 5.14 est donc prouvé.

5.3.3 Caractérisation dans le cas réductible

La condition nécessaire donnée par le théorème 5.14 s'avère ne pas être suffisante, c'est-à-dire que le développement de Brun d'un quasi-plan en escalier de vecteur normal $(1, \alpha)$ n'est pas toujours identique à celui du vecteur α . Ceci notamment parce que de nombreux quasi-plans ont des développements de Brun dégénérés, comme l'illustrent la figure 5.6 ou l'exemple 5.18.

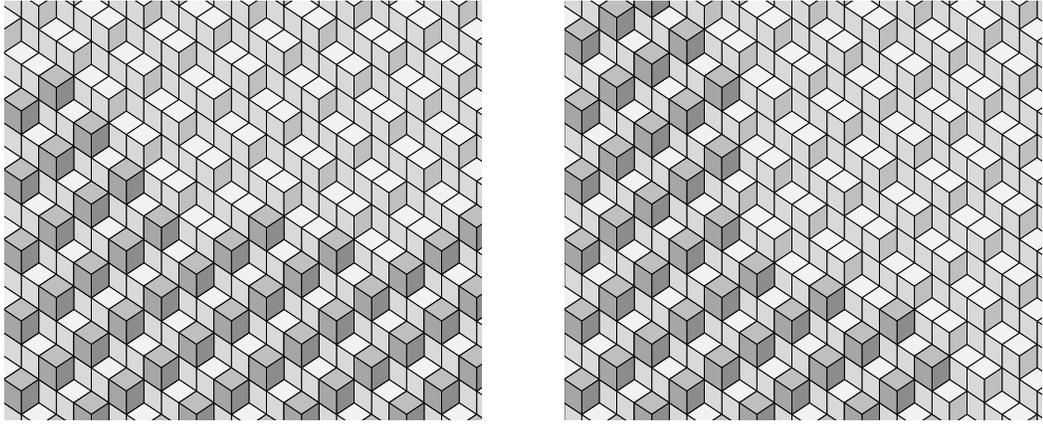


FIGURE 5.6 – Deux quasi-plans de vecteur normal $(1, 1/3, 2/3)$. Quelques itérations de \tilde{T} montrent que le premier (à gauche) a un développement de Brun fini identique à celui du vecteur $(1/3, 2/3)$, tandis que le second (à droite) a un développement de Brun dégénéré (préfixe strict du développement de Brun de $(1/3, 2/3)$).

Exemple 5.18 Soit $\alpha = (\sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2})$ et $\rho = 0$. Notons que les coordonnées de α sont liées sur \mathbb{Q} . Un calcul montre que α admet le développement infini $[(1, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1)]$. Par ailleurs, on a :

$$D_{(1, \sqrt{2}-1, 2-\sqrt{2}), 0} = \mathbb{Z}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3).$$

Pourtant, parmi les quasi-plans de vecteur normal $(1, \sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2})$, seuls ont un développement de Brun non dégénéré ceux dont le défaut est de la forme :

$$D_a = \{k(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \mid k \leq a\}$$

où $a \in \mathbb{Z}$. En effet, si le défaut n'est pas de cette forme, on vérifie que la deuxième itération de \tilde{T} tombe hors de \mathfrak{S}_3 . La figure 5.7 illustre cela. Notons que ceci vaut en particulier pour un défaut de la forme :

$$D'_a = \{k(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \mid k \geq a\},$$

bien qu'un tel quasi-plan puisse être obtenu comme limite d'une suite de plans.

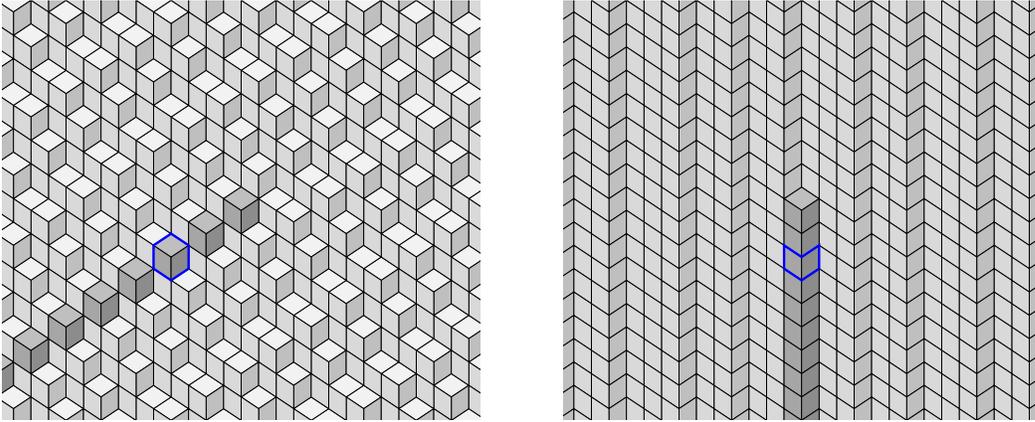


FIGURE 5.7 – Un quasi-plan de vecteur normal $(1, \sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2})$ (à gauche - flips du défaut forcés) peut avoir un développement de Brun dégénéré. En effet, la troisième itération de \tilde{T} montre que le défaut doit avoir une forme bien particulière (à droite - flips du défaut forcés. Le flip encadré à droite est l'image du flip encadré à gauche : son absence rendrait la fonction non binaire, donc le développement dégénéré).

Ce problème nous a conduit à nous restreindre au cas *réductible* :

Définition 5.19 *Un vecteur $\alpha \in [0, 1]^d$ est dit réductible au rang N si le nombre de coordonnées non nulles de $T^N(\alpha)$ égale la dimension du \mathbb{Q} -espace vectoriel $\mathbb{Q}[\alpha]$.*

Le théorème 3.13 montre que tout vecteur rationnel est réductible : le rang de réductibilité est simplement la longueur du développement (fini) de ce vecteur. Quant à un vecteur *totalemtent irrationnel*, c'est-à-dire dont les coordonnées sont libres sur \mathbb{Q} , il est lui aussi réductible : le rang de réductibilité est toujours nul.

Cependant, tous les vecteurs ne sont pas réductibles. Considérons l'exemple suivant, tiré de [23]. Soit $\alpha \in [0, 1]^3$ défini par :

$$\alpha = \left(\frac{1}{2 - \lambda^2}, \frac{1 - \lambda}{2 - \lambda^2}, \frac{\lambda}{2 - \lambda^2} \right),$$

où λ est la racine réelle de $X^3 - 3X + 1$ ($\lambda \simeq 0.3473$). Un calcul montre que $T^6(\alpha) = \alpha$. Il découle de la définition de T (Déf. 3.8) qu'une coordonnée nulle reste nulle par application de T . On en déduit que les trois coordonnées de $T^n(\alpha)$ sont toujours non nulles. Or la dimension du \mathbb{Q} espace vectoriel $\mathbb{Q}[\alpha]$ vaut deux (la deuxième coordonnée de α est égale à la première moins la troisième). Donc, par définition, α n'est pas réductible.

Dans ce cadre, on montre alors la condition nécessaire et suffisante suivante :

Théorème 5.20 *Une surface en escalier \mathcal{S} a un développement de Brun non dégénéré identique au développement de Brun d'un vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ réductible au rang N si et seulement si l'image de \mathcal{S} par \tilde{T}^N est un quasi-plan de vecteur normal $(1, T^N(\boldsymbol{\alpha}))$.*

Ici encore, la preuve nécessite quelques lemmes techniques. L'idée est de prouver d'abord le cas d'un vecteur totalement irrationnel (c'est-à-dire dont les coordonnées sont libres sur \mathbb{Q}), puis de se ramener à ce cas grâce à l'hypothèse de réductibilité.

Le premier lemme, illustré par la figure 5.8, porte sur des paliers (Déf. 3.18) :

Lemme 5.21 *Soit α un vecteur totalement irrationnel et $\rho \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \rho$. Alors, $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho} + \mathcal{F}_{\mathbf{x}}$ est un quasi-plan qui, pour tout i et tout j , a les mêmes tailles de (i, j) -paliers que $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}$.*

Preuve. Fixons i et j dans $\{1, \dots, d\}$ et notons $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. Remarquons d'abord qu'il y a deux tailles distinctes de (i, j) -paliers, car sinon on déduirait de la proposition 3.19 que $\lfloor \alpha_i / \alpha_j \rfloor = \lceil \alpha_i / \alpha_j \rceil$, c'est-à-dire $\alpha_i / \alpha_j \in \mathbb{Z}$, ce qui est exclu. Le palier dont la taille est décrémentée par le flip est de la forme :

$$\sum_{k=0}^a (\mathbf{x} - \mathbf{e}_i + k\mathbf{e}_j, i^*).$$

Comme c'est un palier de $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}$, on a en particulier :

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{e}_i + a\mathbf{e}_j | \boldsymbol{\alpha} \rangle > \rho.$$

Or, on calcule :

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{e}_i + a\mathbf{e}_j | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle - \alpha_i + a\alpha_j = \rho - \alpha_i + a\alpha_j.$$

On a donc $a > \alpha_i / \alpha_j$, et on déduit de la proposition 3.19 que c'est un grand palier.² Similairement, le palier dont la taille est incrémentée par le flip est de la forme :

$$\sum_{k=0}^a (\mathbf{x} - k\mathbf{e}_j, i^*).$$

Comme c'est un palier de $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}$, on a en particulier :

$$\langle \mathbf{x} - a\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle \geq \rho.$$

2. Rappelons qu'un plan en escalier a toujours au plus deux tailles de paliers (exactement deux dans le cas irrationnel ici étudié). On appelle naturellement "grand palier" le plus grand des deux, et "petit palier" l'autre.

Or, on calcule :

$$\langle \mathbf{x} - a\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle - a\alpha_j + \alpha_i = \rho - a\alpha_j + \alpha_i.$$

On a donc $a \leq \alpha_i/\alpha_j$, et même $a < \alpha_i/\alpha_j$ puisque $\alpha_i/\alpha_j \notin \mathbb{Z}$. On déduit de la proposition 3.19 que c'est un petit palier.

Ainsi, ce flip augmente la taille d'un petit palier et diminue celle d'un grand palier. On en déduit le résultat. \square

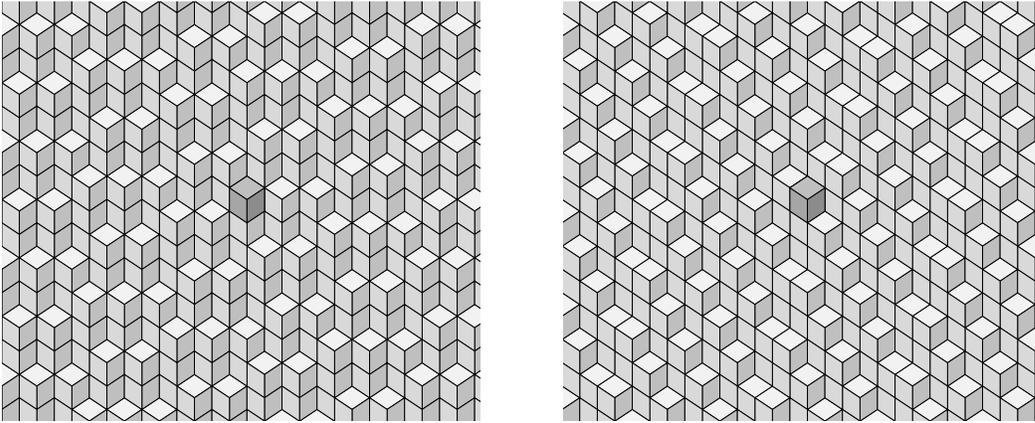


FIGURE 5.8 – Un quasi-plan dont le vecteur normal est totalement irrationnel \mathbf{a} , globalement, les mêmes tailles de paliers qu'un plan de même vecteur normal (à gauche - l'unique flip du défaut étant foncé). C'est en général faux pour un vecteur normal quelconque (à droite - le flip du défaut étant foncé).

Ce lemme permet de prouver la proposition suivante :

Proposition 5.22 *Si $\boldsymbol{\alpha} \in [0, 1]^d$ est un vecteur totalement irrationnel, alors tout quasi-plan de vecteur normal $(1, \boldsymbol{\alpha})$ a le même développement de Brun que $\boldsymbol{\alpha}$.*

Preuve. Soit $(a_n, i_n)_n$ le développement (infini) de $\boldsymbol{\alpha}$. Soit $\mathcal{S} \simeq \mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho}$ un quasi-plan. Comme $\boldsymbol{\alpha}$ est, en particulier, libre sur \mathbb{Q} , il existe au plus un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \rho$. Le défaut de \mathcal{S} comporte donc au plus un flip. Si ce flip n'est pas dans le défaut, alors $\mathcal{S} = \mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho}$, et le résultat est acquis. Sinon, le lemme 5.21 montre que ce flip ne modifie pas, globalement, les tailles des paliers de $\mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho}$. On a donc $a_0 = a(\mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho}) = a(\mathcal{S})$ et $i_0 = i(\mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho}) = i(\mathcal{S})$. Comme $T(\boldsymbol{\alpha})$ reste totalement irrationnel, on en déduit le résultat par récurrence. \square

On se sert alors de cette proposition pour prouver le théorème 5.20 :

Preuve. Si \mathcal{S} a le même développement que α , le théorème 5.14 assure que c'est un quasi-plan de vecteur normal $(1, \alpha)$, et le théorème 5.13 assure alors que $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$ est un quasi-plan de vecteur normal $(1, T^N(\alpha))$.

Inversement, supposons que $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$ soit un quasi-plan de vecteur normal $(1, T^N(\alpha))$. Le théorème 5.14 assure que \mathcal{S} est un quasi-plan de vecteur normal $(1, \alpha)$. Or le développement d'un vecteur étant unique, le fait que $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$ soit un quasi-plan de vecteur normal $(1, T^N(\alpha))$ montre que les développements de Brun de \mathcal{S} et α partagent les mêmes N premiers termes.

Si le développement de \mathcal{S} est fini, alors $T^N(\alpha) = \mathbf{0}$ et $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$ est donc un quasi-plan de vecteur normal \mathbf{e}_1 . En particulier, le développement de \mathcal{S} n'est pas dégénéré.

Si le développement de \mathcal{S} est infini, il est alors forcément non dégénéré, et α étant réductible au rang N , on peut supposer que $T^N(\alpha)$ s'écrit $(\beta, \mathbf{0})$, où β est un vecteur totalement irrationnel. On déduit alors de la proposition 5.11 et du lemme 5.21 que $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$ a, globalement, les mêmes tailles de palier que le plan de vecteur normal $(1, T^N(\alpha))$. Ceci restant vrai en appliquant \hat{T} , on en déduit que $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$ a le même développement de Brun que $T^N(\alpha)$. Les développements de Brun de \mathcal{S} et α sont donc aussi identiques à partir du $(N + 1)$ -ème terme.

Le développement de Brun de \mathcal{S} est donc non dégénéré et identique à celui de α . \square

En résumé, si toute surface en escalier ayant le même développement de Brun qu'un vecteur α est nécessairement un quasi-plan de vecteur normal $(1, \alpha)$, seuls certains quasi-plans de vecteur normal $(1, \alpha)$ ont le même développement de Brun que le vecteur α .

Chapitre 6

Génération et reconnaissance de plan

Dans ce chapitre, nous montrons comment appliquer les résultats des chapitres précédents en géométrie discrète, plus précisément dans le cadre des problèmes de génération et de reconnaissance de plans discrets (rôle joué par les plans en escalier).

On commence par introduire les *morceaux de plans en escalier* et étudier l'action des applications duales sur ces morceaux (paragraphe 6.1).

On expose ensuite, au paragraphe 6.2, trois procédés différents pour engendrer un plan en escalier. Le premier consiste à itérer une application duale sur un morceau fini de plan en escalier, et à engendrer ainsi – sous certaines conditions – des morceaux de plus en plus grands de ce plan (Th. 6.9). Ce résultat a été publié dans [56]. Le second procédé repose sur les résultats du chapitre 5 : en itérant une application duale adéquate sur une surface en escalier, on obtient – sous certaines conditions – une suite de surfaces en escalier convergeant vers le plan en escalier désiré (Th. 6.10). Enfin, le dernier procédé consiste à engendrer un plan dont le vecteur normal a des coordonnées rationnelles à partir d'un *domaine fondamental*, c'est-à-dire d'un morceau de plan fini engendrant tout ce plan par périodicité. On montre comment construire un domaine fondamental de taille minimale grâce aux applications duales associées au développement en fraction continue du vecteur normal du plan que l'on veut engendrer (6.14). Ce résultat a été publié dans [58]. Notons que ce dernier procédé peut être vu comme une généralisation multidimensionnelle d'un procédé exposé dans [14] pour engendrer des droites discrètes.

En ce qui concerne la reconnaissance de plan, étudiée au paragraphe 6.3, on décrit un algorithme qui généralise la méthode de reconnaissance de droite exposée au chapitre 1 : on calcule le développement d'une fonction binaire et on en déduit sa nature – plan en escalier ou non (Th. 6.25). La complexité d'un tel algorithme est finalement discutée. Ce résultat a été publié dans [58].

6.1 Morceau de plan et application duale

Définition 6.1 Soit $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ un plan en escalier. Un morceau de \mathcal{P} est une fonction binaire inférieure à \mathcal{P} . En particulier, l'interprétation géométrique d'un morceau de plan est incluse dans celle du plan en question.

Rappelons que selon la terminologie habituelle propre aux fonctions à valeur dans un ensemble ordonné – ce qui concerne en particulier les plans en escalier et les fonctions binaires – une fonction est *inférieure* (ou *supérieure*) à une autre si, en chaque point, la valeur de la première est inférieure (ou supérieure) à la valeur de la seconde. La figure 6.1 représente un morceau de plan.

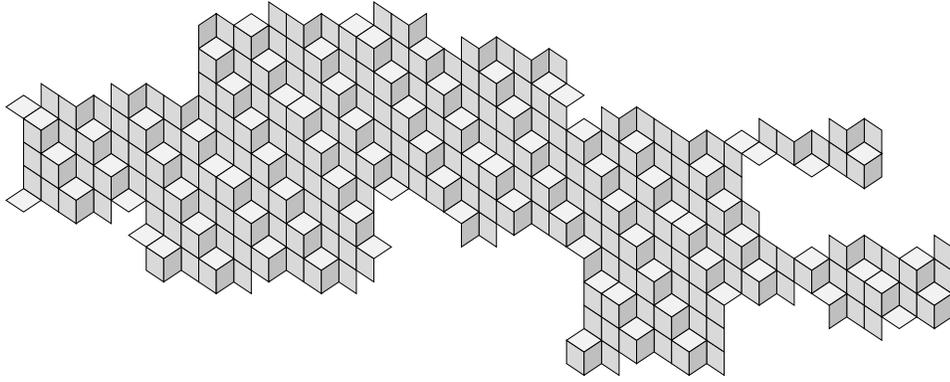


FIGURE 6.1 – Un morceau fini (de taille 405) du plan en escalier de la figure 3.1.

Une application duale étant définie sur tout l'ensemble \mathfrak{F} , elle est en particulier définie sur les morceaux de plan. Cependant, si σ est un morphisme unimodulaire quelconque, alors l'image d'un morceau de plan par $E_1^*(\sigma)$ comporte généralement des faces à coefficients négatifs et n'est donc pas un morceau de plan. La suite de ce paragraphe est dédiée à deux cas particuliers qui seront utiles par la suite.

Le premier cas particulier est celui des substitutions. On a alors :

Proposition 6.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$ et $\rho \in \mathbb{R}$. L'application duale d'une substitution unimodulaire σ envoie un morceau du plan en escalier $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$ sur un morceau du plan en escalier $\mathcal{P}_{t_{M_\sigma}\alpha,\rho}$.

Preuve. Soit \mathcal{B} un morceau de $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$. Il est facile de voir que l'ensemble des fonctions positives de \mathfrak{F} est stable par l'application duale d'une substitution. Le morceau \mathcal{B} étant positif, son image $E_1^*(\sigma)(\mathcal{B})$ l'est aussi. De même, la fonction $\mathcal{P}_{\alpha,\rho} - \mathcal{B}$ est positive (c'est le morceau de $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$ complémentaire de \mathcal{B}), donc son image $E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\alpha,\rho} - \mathcal{B})$ l'est aussi. Or on a :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\alpha,\rho} - \mathcal{B}) = E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\alpha,\rho}) - E_1^*(\sigma)(\mathcal{B}) = \mathcal{P}_{t_{M_\sigma}\alpha,\rho} - E_1^*(\sigma)(\mathcal{B}).$$

On en déduit : $0 \leq E_1^*(\sigma)(\mathcal{B}) \leq \mathcal{P}_{t_{M\sigma\alpha,\rho}}$, ce qui prouve le résultat. \square

Notamment, en itérant une application duale de substitution sur un morceau de plan, on obtient une suite de morceaux de plans, généralement de taille croissante puisque chaque face est envoyée sur une combinaison linéaire à coefficients *positifs* de faces (voir Fig. 6.2). Ceci explique le terme de *substitution généralisée* parfois employé pour les applications duales de substitution.

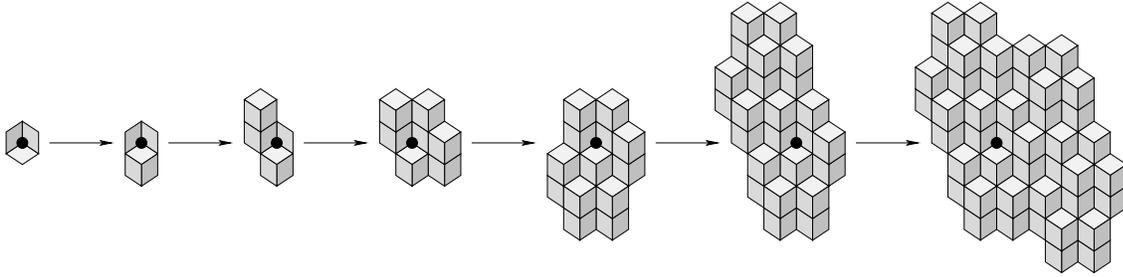


FIGURE 6.2 – En itérant l’application duale de substitution sur un morceau de plan, on obtient une suite de morceaux de taille croissante (de gauche à droite).

Le second cas particulier est celui des *désstitutions*, c’est-à-dire des morphismes inverses d’une substitution. Introduisons d’abord la notion de σ -pavage :

Définition 6.3 Soit σ une substitution unimodulaire. Soit \mathcal{B} une fonction binaire. Un σ -pavage de \mathcal{B} est un sous-ensemble $E \subset \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$ tel que :

$$\mathcal{B} = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} \mathbf{x} + E_1^*(\sigma)(\mathbf{0}, i^*).$$

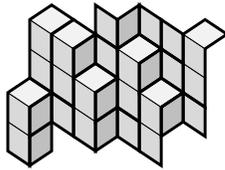


FIGURE 6.3 – Fonction binaire admettant un $\beta_{2,2}$ -pavage, où $\beta_{2,2}$ est une substitution de Brun (Déf. 3.17, voir aussi Fig. 3.3). On peut voir ce $\beta_{2,2}$ -pavage comme un pavage par trois types de tuiles (encadrées en noir).

La figure 6.3 illustre cette notion. Le terme *pavage* vient du fait que si E est un σ -pavage d’une fonction binaire \mathcal{B} , alors les interprétations géométriques de $\mathbf{x} + E_1^*(\sigma)(\mathbf{0}, i^*)$, pour $\mathbf{x} \in E$, forment un pavage de \mathcal{B} (au sens le plus général d’un pavage, tel que rappelé au chapitre 1). La proposition suivante montre qu’un σ -pavage, s’il existe, est unique :

Proposition 6.4 *Si σ est une substitution unimodulaire inversible, alors toute fonction binaire admet au plus un σ -pavage.*

Preuve. Supposons que \mathcal{B} admette un σ -pavage E :

$$\mathcal{B} = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} \mathbf{x} + E_1^*(\sigma)(\mathbf{0}, i^*).$$

On calcule alors :

$$\mathcal{B} = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} \mathbf{x} + E_1^*(\sigma)(\mathbf{0}, i^*) = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} E_1^*(\sigma)(M_\sigma \mathbf{x}, i^*) = E_1^*(\sigma) \left(\sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} (M_\sigma \mathbf{x}, i^*) \right).$$

On en déduit :

$$E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{B}) = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} (M_\sigma \mathbf{x}, i^*).$$

On a donc :

$$(\mathbf{x}, i) \in E \Leftrightarrow E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{B})(M_\sigma \mathbf{x}, i) = 1,$$

ce qui montre que E est entièrement caractérisé par \mathcal{B} . \square

La notion de σ -pavage permet notamment de donner une caractérisation des morceaux de plan qui se désubstituent en morceaux de plan :

Proposition 6.5 *Soit σ une substitution unimodulaire inversible. L'image d'un plan en escalier \mathcal{P} par $E_1^*(\sigma^{-1})$ est un plan si et seulement si \mathcal{P} est σ -pavable. De plus, si c'est le cas, alors l'image d'un morceau \mathcal{B} de \mathcal{P} est un morceau de $E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{P})$ si et seulement si \mathcal{B} admet un σ -pavage inclus dans celui de \mathcal{P} .*

Preuve. Supposons que $E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{P})$ soit un plan et notons E' son support.¹ En appliquant $E_1^*(\sigma)$, on obtient :

$$\mathcal{P} = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E'} E_1^*(\sigma)(\mathbf{x}, i) = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E'} M_\sigma^{-1} \mathbf{x} + E_1^*(\sigma)(\mathbf{0}, i),$$

ce qui montre que $E = \{(M_\sigma^{-1} \mathbf{x}, i) \mid (\mathbf{x}, i) \in E'\}$ est un pavage de \mathcal{P} . Inversement, supposons que E soit un pavage de \mathcal{P} . On calcule alors :

$$E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{P}) = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} M_\sigma^{-1} \mathbf{x} + (\mathbf{0}, i^*).$$

L'image de \mathcal{P} par $E_1^*(\sigma^{-1})$ est donc binaire : le théorème 3.6 assure alors que c'est un plan en escalier. Considérons maintenant un morceau \mathcal{B} de \mathcal{P} . Si son image par

1. C'est-à-dire, selon la définition 2.4, le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$ où ce plan (qui est une fonction de \mathfrak{F}) ne s'annule pas.

$E_1^*(\sigma^{-1})$ est un morceau de plan, alors son support est inclus dans le support E' ci-dessus. On en déduit, en appliquant $E_1^*(\sigma)$, un σ -pavage inclus (au sens des parties de $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$, *c.f.* Déf. 6.3) dans celui de \mathcal{P} . Inversement, si \mathcal{B} admet un σ -pavage inclus dans celui de \mathcal{P} , alors on en déduit que $E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{B})$ est inférieure à $E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{P})$, et en est donc un morceau. \square

Un morceau de plan peut très bien admettre un σ -pavage sans que celui-ci soit inclus dans ce plan. Par exemple, on montre que le morceau de la figure 6.1 admet un $\beta_{2,2}$ -pavage² qui n'est pas inclus dans le $\beta_{2,2}$ -pavage du plan de la figure 3.1.

6.2 Génération de plan

6.2.1 Plan substitutif

Rappelons qu'un mot est dit *substitutif* si c'est l'image par un morphisme d'un mot u engendré par une substitution σ , c'est-à-dire s'écrivant :

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(v),$$

où v un mot fini (idéalement, une simple lettre). Le mot u est alors un point fixe de σ . Par analogie :

Définition 6.6 *Un plan en escalier est dit substitutif si c'est l'image par une application duale de morphisme d'un plan en escalier \mathcal{P} engendré par une application duale de substitution, c'est-à-dire s'écrivant :*

$$\mathcal{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{B}),$$

où \mathcal{B} est un morceau fini de plan.

Un plan substitutif est donc l'image d'un plan point fixe. Peut-on être plus précis? Si l'on revient à l'analogie avec le continu introduite par la remarque 3.5, la question de l'engendrement d'un plan revient à déterminer si, étant donné un hyperplan réel P stable par M_σ^{-1} , il existe une substitution unimodulaire σ et une partie bornée $B \subset P$ tels que :

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} M_\sigma^{-n} B.$$

Il n'est alors pas difficile de montrer qu'il y a engendrement si et seulement si le vecteur nul est dans l'intérieur de B (intérieur relatif à P) et si P est un espace propre *dilatant* de M_σ^{-1} , c'est-à-dire que les valeurs propres de M_σ^{-1} associées à cet

2. Voir Déf. 3.17 pour la définition de la substitution de Brun $\beta_{a,i}$.

espace propre ont toute un module strictement supérieur à 1.

Notons qu'un espace propre dilatant de M_σ^{-1} est un espace propre *contractant* de M_σ , c'est-à-dire que les valeurs propres de M_σ associées à cet espace ont toutes un module strictement inférieur à 1. En particulier, si l'espace contractant est un hyperplan (comme c'est le cas ci-dessus) et si σ est unimodulaire, alors la valeur propre de M_σ qui n'est pas associée à un vecteur propre de l'espace propre contractant a nécessairement un module strictement supérieur à 1 (le produit des valeurs propres valant 1), et réelle puisque les valeurs propres complexes d'une matrice réelle sont deux à deux conjuguées. Il est donc naturel d'introduire la classe de substitutions suivante :

Définition 6.7 *Une substitution est dite Pisot si le spectre de sa matrice d'incidence s'écrit $\{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda\}$ avec $0 < |\mu_1|, \dots, |\mu_k| < 1$ et $\lambda > 1$.*

Exemple 6.8 *La substitution unimodulaire $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ a pour spectre $\{\lambda, \mu, \bar{\mu}\}$, où $\lambda \simeq 1.83928$ et $|\mu| \simeq 0.73735$. Elle est donc Pisot.*

On montre alors :

Théorème 6.9 *Un plan en escalier est substitutif si et seulement si c'est l'image par une application duale de morphisme d'un plan invariant par l'application duale d'une substitution Pisot.*

La preuve de ce théorème est essentiellement une discrétisation du résultat analogue dans le cas continu. Mentionnons qu'il est possible d'estimer la taille du morceau \mathcal{B} initial (voir Déf. 6.6) en fonction du spectre de M_σ . Cependant, il faut quand même disposer d'un morceau de plan initial correct, ce qui n'est pas toujours évident d'un point de vue pratique. Un morceau idéal serait le morceau \mathcal{B}_0 défini par :

$$\mathcal{B}_0 = \sum_{i=1}^d (-e_i, e_i^*).$$

En effet, on vérifie facilement que ce morceau est un morceau de *tout* plan en escalier de vecteur normal strictement positif. Malheureusement, exiger que σ soit Pisot ne suffit alors pas toujours à ce que ce morceau engendre le plan en escalier point fixe de $E_1^*(\sigma)$ (Fig. 6.4). Une caractérisation en terme de numération (*condition F*) des substitutions pour lesquelles c'est le cas est donnée dans [18].

Par ailleurs, la théorie de Perron-Frobenius assure que la matrice d'incidence d'une substitution Pisot admet un unique vecteur propre positif. On en déduit que l'application duale d'une substitution Pisot admet un unique plan en escalier invariant : on parle de *son* point fixe. Notons qu'en ajoutant un flip à l'origine à ce

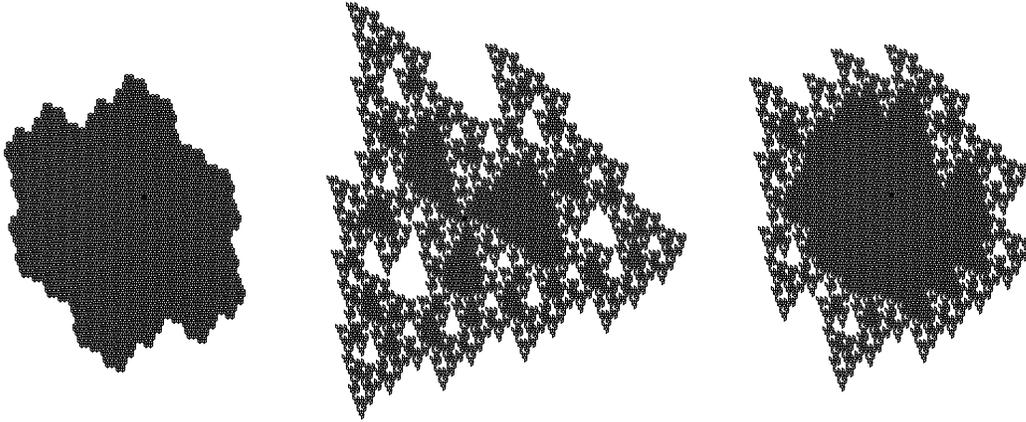


FIGURE 6.4 – La substitution unimodulaire Pisot $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ et le morceau de plan \mathcal{B}_0 engendrent tout le plan (à gauche, après quelques itérations). Par contre, la substitution unimodulaire Pisot $\sigma' : 1 \mapsto 21, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ (qui a la même matrice d'incidence que σ) et le morceau de plan \mathcal{B}_0 n'engendrent pas tout le plan (au centre). Il existe cependant, d'après le théorème 6.9, un morceau de plan fini \mathcal{B} tel que σ' et \mathcal{B} engendrent tout le plan (à droite).

point fixe on obtient un autre point fixe (car ce flip n'est pas déplacé, d'après la proposition 5.1). Cependant ce second point fixe est une surface qui n'est pas *stricto sensu* un plan.

Pour finir ce paragraphe, mentionnons qu'au lieu d'engendrer un plan à partir d'un morceau fini, on peut aussi l'engendrer à partir d'une surface en escalier. Plus précisément, on montre (voir aussi Fig. 6.5) :

Théorème 6.10 *Soit σ une substitution unimodulaire Pisot. Soit \mathcal{P} le point fixe de $E_1^*(\sigma)$. Alors, pour toute surface en escalier \mathcal{S} , on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{S}) \in \{\mathcal{P}, \mathcal{P} + \mathcal{F}_0\}.$$

En d'autres termes, itérer $E_1^(\sigma)$ sur une surface en escalier fournit une suite de surfaces convergeant vers le point fixe de $E_1^*(\sigma)$, avec ou sans flip à l'origine.*

Preuve. Soit $\mathcal{S} \in \mathfrak{S}$. D'après le théorème 4.20, on peut écrire :

$$\mathcal{S} = \mathcal{P} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \mathcal{F}_{\mathbf{x}_k},$$

où, pour tout k , $\varepsilon_k = \pm 1$ et $\mathbf{x}_k \in \mathbb{Z}^d$. On a alors, par continuité de $E_1^*(\sigma)$ et d'après la proposition 5.1 :

$$E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{S}) = \mathcal{P} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \mathcal{F}_{M_\sigma^{-n} \mathbf{x}_k}.$$

Tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ peut s'écrire comme la somme d'un vecteur réel \mathbf{y} de l'espace dilatant de M_σ et d'un vecteur réel \mathbf{z} de l'espace contractant de M_σ . L'image par M_σ^{-n} de \mathbf{y} va tendre vers $\mathbf{0}$ avec n . L'image par M_σ^{-n} de \mathbf{z} va diverger avec n , sauf si ce \mathbf{z} est nul, auquel cas \mathbf{x} est dans l'espace dilatant de M_σ . On a alors $M_\sigma \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, donc $\lambda \in \mathbb{Q}$ puisque \mathbf{x} et M_σ sont entiers. Ceci étant exclu, on peut conclure :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|M_\sigma^{-n} \mathbf{x}\| = +\infty$$

Les flips $\mathcal{F}_{M_\sigma^{-n} \mathbf{x}_k}$ sont donc "rejetés" à l'infini, sauf éventuellement le flip \mathcal{F}_0 (qui, lui, est stable), ce qui montre le résultat. \square

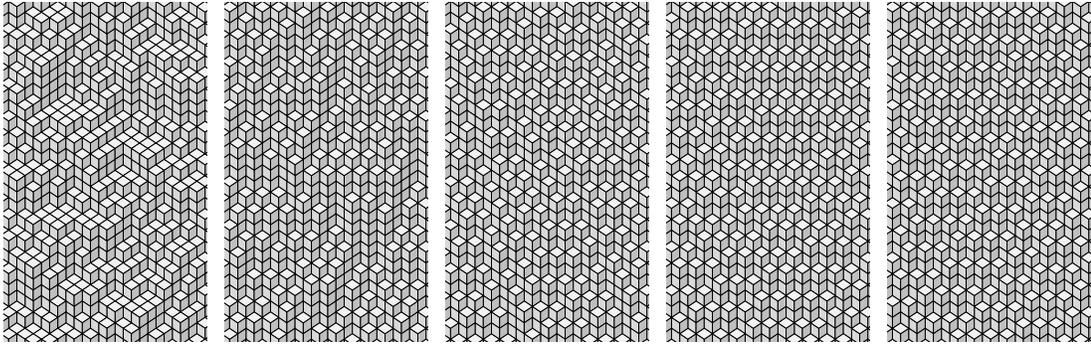


FIGURE 6.5 – Itérer l'application duale d'une substitution Pisot sur une surface en escalier engendre une suite de surfaces convergeant vers le plan en escalier point fixe de cette application duale (avec, éventuellement, un flip en plus à l'origine). Ici, on a représenté quelques itérations pour la substitution $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$: le plan limite est le même que sur la figure 6.4.

6.2.2 Périodes Pisot

Le paragraphe précédent a montré qu'un plan substitutif ne pouvait être engendré que par une substitution Pisot. Cependant, aucun moyen n'a été donné permettant d'obtenir une telle substitution Pisot à partir des paramètres du plan que l'on veut construire. On montre ici que les développements de Brun apportent une réponse partielle. Donnons d'abord une condition nécessaire algébrique de substitutivité :

Proposition 6.11 *Si un plan en escalier est substitutif, alors les coordonnées de son vecteur normal sont irrationnelles et appartiennent à une extension de corps $\mathbb{Q}(\lambda)$, où λ est un nombre algébrique de degré d .*

Preuve. Soit $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$ un plan substitutif. C'est donc l'image par l'application duale d'un morphisme μ d'un plan $\mathcal{P}_{\alpha',\rho'}$ point fixe de l'application duale d'une substitution Pisot σ . D'après le théorème 3.4, α' est alors un vecteur propre de la matrice ${}^tM_\sigma$:

$${}^tM_\sigma\alpha' = \lambda\alpha'.$$

De plus, il est prouvé dans [28] que le fait que σ soit Pisot entraîne que le polynôme caractéristique de M_σ est irréductible. La valeur propre λ de la matrice M_σ est donc un nombre algébrique de degré d . De plus, les coordonnées de α' ne peuvent pas être rationnelles car sinon λ serait lui aussi rationnel. Enfin, on a $\alpha' \in \mathbb{Q}(\lambda)^d$, et comme $\alpha = {}^tM_\mu\alpha'$, on conclut que α est un vecteur irrationnel de $\mathbb{Q}(\lambda)^d$. \square

En particulier, un plan substitutif a un vecteur normal irrationnel, dont le développement de Brun est donc infini. Rappelons que dans le cas des fractions continues classiques, un nombre a un développement ultimement périodique (c'est-à-dire périodique à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est quadratique (théorème de Lagrange). Malheureusement, si le sens direct de ce résultat s'étend sans difficulté en dimension supérieure (en remplaçant "quadratique" par "algébrique de degré d "), ce n'est pas le cas du sens réciproque. Examinons cependant le cas des développements de Brun ultimement périodiques.

Par ailleurs, rappelons qu'un plan substitutif est toujours l'image d'un point fixe d'une application duale de substitution. Or, on montre :

Proposition 6.12 *Si un plan en escalier a un développement de Brun ultimement périodique, alors c'est l'image d'un point fixe d'une application duale de substitution.*

Preuve. Soit $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$ un plan en escalier admettant un développement de Brun $(a_n, i_n)_n$ ultimement périodique de pré-période d et de période p , c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n \geq q, (a_{n+p}, i_{n+p}) = (a_n, i_n).$$

Alors, on déduit de l'équation (3.8) :

$$\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho} = E_1^*(\beta_q)(\mathcal{P}_{(1,T^{q+1}(\alpha)),\rho}),$$

$$\mathcal{P}_{(1,T^{q+1}(\alpha)),\rho} = E_1^*(\beta_p)(\mathcal{P}_{(1,T^{q+1}(\alpha)),\rho}),$$

où $\beta_q = \beta_{a_{q-1}, i_{q-1}} \circ \dots \circ \beta_{a_0, i_0}$ et $\beta_p = \beta_{a_{q+p-1}, i_{q+p-1}} \circ \dots \circ \beta_{a_q, i_q}$ sont deux substitutions. Le plan $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$ est donc l'image du point fixe $\mathcal{P}_{(1,T^{q+1}(\alpha)),\rho}$. \square

La question est donc de savoir si la condition précédente est suffisante, c'est-à-dire si le produit β_p des matrices d'incidences des substitutions de Brun associées à la période du développement est Pisot. C'est clairement faux en général puisqu'une

substitution de Brun n'est pas Pisot (pour $d \geq 2$). Cependant, on vérifie expérimentalement qu'une substitution de la forme $\beta_{a_{q+p-1}, i_{q+p-1}} \circ \dots \circ \beta_{a_q, i_q}$ est généralement Pisot si la condition suivante est vérifiée :

$$\{i_q, \dots, i_{q+p-1}\} = \{1, \dots, d\}.$$

Mais cette condition n'est pas toujours suffisante. Par exemple, pour $d = 3$, un calcul montre que la matrice d'incidence de la substitution suivante (qui est une matrice 4×4) a une valeur propre largement dominante ($\lambda \simeq 1258$) et deux valeurs propres de modules strictement inférieurs à 1, mais aussi la valeur propre 1 :

$$\beta_{5,3} \circ \beta_{7,3} \circ \beta_{1,2} \circ \beta_{8,1} \circ \beta_{4,1} \circ \beta_{1,2}.$$

Cette substitution n'est donc pas Pisot, bien qu'elle vérifie la condition ci-dessus. Un tel contre-exemple est exclu pour $d = 1$, tandis que le cas $d = 2$ reste ouvert.

En conclusion, un plan dont le développement de Brun est ultimement périodique n'est pas toujours substitutif mais "souvent" (il resterait à donner un sens mathématique à ce "souvent" - notamment on peut se demander si c'est le cas sur tous les réels sauf sur un ensemble de mesure nulle). Inversement, un plan substitutif n'a pas nécessairement un développement ultimement périodique, ceci parce que le théorème de Lagrange sur les développements en fraction continue ultimement périodiques ne semble pas s'étendre aux développements de Brun.

6.2.3 Plan rationnel

On appelle *rationnel* un plan dont le vecteur normal s'écrit $(1, \boldsymbol{\alpha})$ avec $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^d$, c'est-à-dire dont le développement de Brun est fini (Th. 3.13). En particulier, il résulte de la proposition 6.11 du paragraphe précédent qu'un plan rationnel ne peut pas être substitutif. On montre ici que ces plans peuvent cependant être facilement engendrés, grâce à la notion de *domaine fondamental*.

Rappelons que si \mathcal{F} est une fonction de \mathfrak{F} et \mathbf{u} un vecteur de \mathbb{Z}^d , alors $\mathbf{u} + \mathcal{F}$ désigne la fonction $(\mathbf{x}, i) \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x} - \mathbf{u}, i)$. En particulier, si \mathcal{F} est binaire, alors l'interprétation géométrique de $\mathbf{u} + \mathcal{F}$ se déduit de celle de \mathcal{F} par une translation de vecteur \mathbf{u} . On définit alors :

Définition 6.13 *Soit \mathcal{P} un plan en escalier. Si \mathcal{D} est un morceau fini de \mathcal{P} et L un réseau de \mathbb{Z}^d tels que :*

$$\mathcal{P} = \sum_{\mathbf{u} \in L} \mathbf{u} + \mathcal{D},$$

alors on dit que \mathcal{D} est un domaine fondamental de \mathcal{P} , associé au réseau L .

Pour des raisons de périodicité, un plan admet un domaine fondamental si et seulement si c'est un plan rationnel. Géométriquement, un tel plan est engendré en translatant des copies d'un domaine fondamental suivant le réseau associé. Soulignons qu'un plan rationnel admet une infinité de domaines fondamentaux. Le résultat suivant, s'inspirant d'un résultat proche donné dans [6], montre comment construire l'un d'entre eux :

Théorème 6.14 *Soit $\alpha \in [0, 1]^d \cap \mathbb{Q}^d$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Soit $(a_n, i_n)_{0 \leq n \leq N}$ le développement de Brun (fini) de α . Posons $\rho' = \rho / \|B_{a_0, i_0} \times \dots \times B_{a_N, i_N} \mathbf{e}_1\|_\infty$. Soit $\mathcal{D}_{(1, \alpha), \rho}$ le morceau fini du plan en escalier $\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}$ défini par :*

$$\mathcal{D}_{(1, \alpha), \rho} = E_1^*(\beta_{a_0, i_0}) \circ \dots \circ E_1^*(\beta_{a_N, i_N})(\lfloor \rho' \rfloor \mathbf{e}_1, 1^*).$$

Alors, $\mathcal{D}_{(1, \alpha), \rho}$ est un domaine fondamental de $\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}$, associé au réseau défini par :

$$L_{(1, \alpha), \rho} = B_{a_0, i_0}^{-1} \dots B_{a_N, i_N}^{-1} \sum_{k=2}^{d+1} \mathbb{Z} \mathbf{e}_k.$$

Preuve. Le morceau de plan $(\lfloor \rho' \rfloor \mathbf{e}_1, 1^*)$ est un domaine fondamental du plan en escalier $\mathcal{P}_{(1, 0), \rho'}$, associé au réseau $\mathbb{Z} \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbb{Z} \mathbf{e}_{d+1}$. Or, si \mathcal{D} est un domaine fondamental d'un plan $\mathcal{P}_{\beta, \mu}$, associé à un réseau L , alors pour toute substitution unimodulaire σ , $E_1^*(\sigma)(\mathcal{D})$ est un domaine fondamental du plan $E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\beta, \mu}) = \mathcal{P}_{M_\sigma \beta, \mu}$, associé au réseau $M_\sigma^{-1} L$. Le résultat s'en déduit avec $\sigma = \beta_{a_N, i_N} \circ \dots \circ \beta_{a_0, i_0}$, en remarquant de plus que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $\mathcal{P}_{\lambda \beta, \mu} = \mathcal{P}_{\beta, \mu/\lambda}$. \square

Exemple 6.15 *Soit $\alpha = (3/8, 5/12) \in [0, 1]^2$. Le développement de α est :*

$$\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{12} \right) = [(2, 2), (1, 1), (2, 2), (4, 1), (1, 2)].$$

Le dernier convergent de ce développement est $(24, 9, 10)$, proportionnel à $(1, \alpha)$. La figure 6.6 montre la génération du domaine fondamental $\mathcal{D}_{(1, 3/8, 5/12), 0}$ à partir des applications duales des substitutions de Brun associées au développement de α . Ce domaine est la somme de 24, 9 et 10 faces, respectivement de vecteur normal \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 and \mathbf{e}_3 . Par ailleurs, on calcule :

$$L_{(1, 3/8, 5/12), 0} = \mathbb{Z}(\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3) + \mathbb{Z}(2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3).$$

La figure 6.7 illustre l'engendrement de $\mathcal{P}_{(1, 3/8, 5/12), 0} = \mathcal{P}_{(24, 9, 10), 0}$ grâce à L et \mathcal{D} .

Intuitivement, un domaine fondamental est d'autant plus pratique qu'il est petit (donc facile à stocker) et compact (pour engendrer aisément des morceaux de plan de forme quelconque). À ce titre, il est naturel de vouloir comparer le domaine fondamental défini par le théorème 6.14 aux autres domaines fondamentaux envisageables. On montre alors :

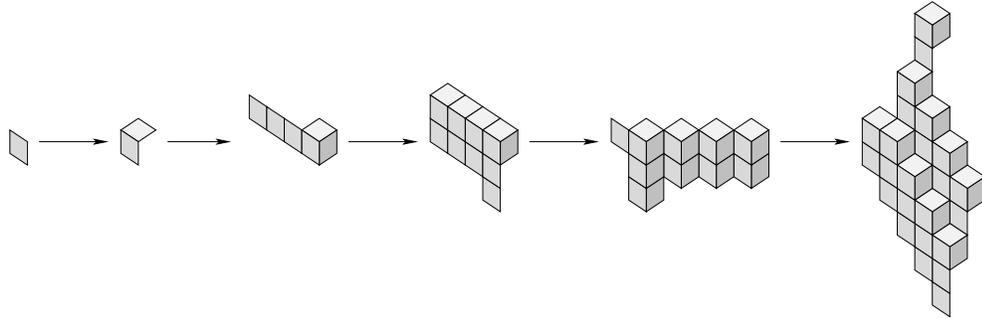


FIGURE 6.6 – Génération d’un domaine fondamental du plan en escalier $\mathcal{P}_{(24,9,10),0}$ par application de $E_1^*(\beta_{1,2})$, $E_1^*(\beta_{4,1})$, $E_1^*(\beta_{2,2})$, $E_1^*(\beta_{1,1})$ et $E_1^*(\beta_{2,2})$ (de gauche à droite).

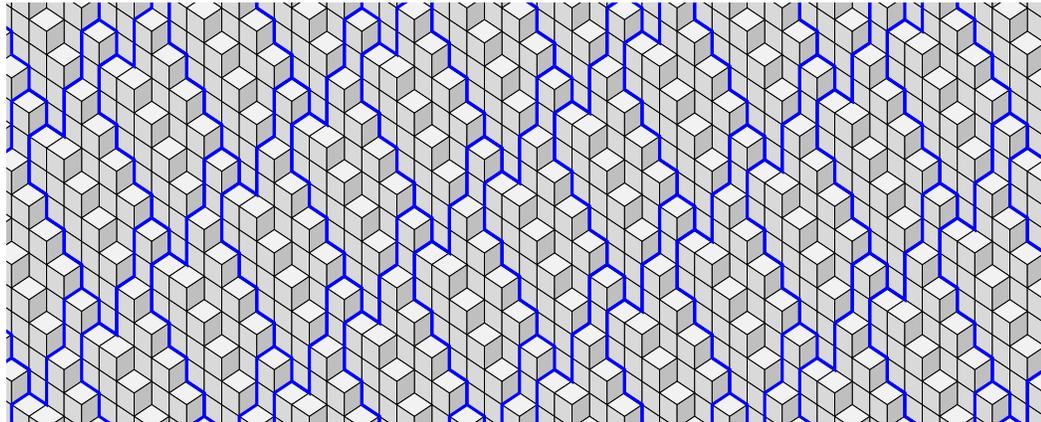


FIGURE 6.7 – Des copies du domaine fondamental de la figure 6.6 translattées suivant le réseau $\mathbb{Z}(\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3) + \mathbb{Z}(2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3)$ engendrent tout le plan $\mathcal{P}_{(24,9,10),0}$. Ce domaine est de taille minimale (Prop. 6.16, ci-dessous).

Proposition 6.16 *Le domaine fondamental $\mathcal{D}_{(1,\alpha),\rho}$ défini par le théorème 6.14 est de taille minimale parmi l'ensemble des domaines fondamentaux du plan $\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho}$.*

Preuve. On déduit de la proposition 2.12 :

$$\mathbf{f}(\mathcal{D}_{(1,\alpha),\rho}) = B_{a_0,i_0} \dots B_{a_N,i_N} \mathbf{f}(\rho' \mathbf{e}_1, 1^*) = B_{a_0,i_0} \dots B_{a_N,i_N} (1, \mathbf{0}).$$

Par ailleurs, on montre aisément par récurrence sur N que les coordonnées de $\mathbf{f}(\mathcal{D}_{(1,\alpha),\rho})$ sont premières entre elles. Or, pour des raisons de périodicité, les proportions de faces de chaque type sont les mêmes dans un plan que dans n'importe lequel de ses domaines fondamentaux. Donc, si \mathcal{D} est un domaine fondamental de $\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho}$, alors les vecteurs entiers $\mathbf{f}(\mathcal{D})$ et $\mathbf{f}(\mathcal{D}_{(1,\alpha),\rho})$ sont proportionnels. Les coordonnées du second vecteur étant premières entre elles, on en déduit que $\mathbf{f}(\mathcal{D}) = k \mathbf{f}(\mathcal{D}_{(1,\alpha),\rho})$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ ($k = 0$ étant exclu). La taille d'un domaine fondamental de $\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho}$ est donc toujours un multiple de la taille de $\mathcal{D}_{(1,\alpha),\rho}$, ce qui prouve le résultat annoncé. \square

6.3 Reconnaissance de plan

Après la génération de plan, on s'intéresse ici au problème inverse qui est celui de la reconnaissance de plan et qui consiste à décider si une fonction binaire donnée est un morceau de plan en escalier ou non. De plus, si c'est le cas, on veut également déterminer l'ensemble des paramètres des plans en escalier dont cette fonction binaire est un morceau. Il existe déjà de nombreux algorithmes pour résoudre ce problème (voir Chap. 1) : l'objectif est ici de montrer en quoi les applications duales et l'algorithme de Brun peuvent apporter quelque chose de nouveau.

6.3.1 Principe

Le principe général est, étant donnée une fonction binaire, d'essayer de calculer le développement de Brun d'un plan en escalier dont elle serait morceau. Plus précisément, s'inspirant de ce qui a été fait pour les surfaces au chapitre 5, on voudrait prolonger la définition de l'application de Brun géométrique \tilde{T} aux fonctions binaires de telle sorte qu'on ait, pour tout plan en escalier $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}_{\Xi} \setminus \mathfrak{P}_{\vee}$ (c'est-à-dire pour tout plan dont le vecteur normal s'écrit $(1, \alpha)$, avec $\alpha \in [0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$) et pour toute fonction binaire \mathcal{B} :

$$0 \leq \mathcal{B} \leq \mathcal{P} \Leftrightarrow 0 \leq \tilde{T}(\mathcal{B}) \leq \tilde{T}(\mathcal{P}). \quad (6.1)$$

Ainsi, si en itérant \tilde{T} sur une fonction binaire on tombe sur un morceau d'un plan de vecteur normal \mathbf{e}_1 , on saura que la fonction binaire initiale est un morceau de plan (dont on connaîtra en plus le développement de Brun).

Rappelons qu'étendre la définition de \tilde{T} aux surfaces en escalier a posé deux problèmes. D'une part, il a fallu lire sur une surface l'information suffisante pour déterminer quelle application duale $E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})$ utiliser. C'est le rôle joué par les fonctions a et i (Déf. 3.20) sous l'hypothèse de cohérence (Déf. 5.6). D'autre part, il a fallu s'assurer que l'application duale de la substitution de Brun retenue envoie bien une surface sur une surface (Prop. 5.7).

Il faut donc résoudre aussi ces deux problèmes dans le cas des morceaux de plan, ce à quoi sont respectivement consacrés les deux paragraphes suivants. Avant ceci, examinons quelques propriétés propres aux morceaux de plan. Introduisons d'abord la notion suivante :

Définition 6.17 Soit $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ une fonction binaire. L'ensemble des paramètres acceptables de \mathcal{B} , noté $p(\mathcal{B})$, est le polytope de $[0, 1]^d \times \mathbb{R}$ défini par :

$$P(\mathcal{B}) = \{(\alpha, \rho) \in [0, 1]^d \times \mathbb{R} \mid \mathcal{B} \leq \mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}\}.$$

En particulier, une fonction binaire \mathcal{B} est un morceau d'un plan de \mathfrak{P}_\exists si et seulement si $P(\mathcal{B})$ est non vide. Soulignons que, dans ce cas, $P(\mathcal{B})$ n'est généralement pas réduit à un singleton. Autrement dit, un morceau de plan ne caractérise pas un unique plan. Inversement, un ensemble de paramètres ne caractérise généralement pas un unique morceau de plan. Plus précisément, introduisons la relation d'équivalence suivante sur les morceaux de plan :

Définition 6.18 Deux morceaux de plan en escalier \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont dits équivalents si, pour tout plan en escalier \mathcal{P} , on a :

$$\mathcal{B} \leq \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{B}' \leq \mathcal{P}.$$

La classe d'équivalence d'un morceau \mathcal{B} est notée $\langle \mathcal{B} \rangle$.

Deux morceaux de plan équivalents ont alors le même ensemble de paramètres acceptables. Intuitivement, la classe d'équivalence d'un morceau est l'ensemble des morceaux qui contiennent exactement la même information sur les vecteurs normaux des plans dont ils sont des morceaux. Par exemple, la figure 6.8 représente un morceau de plan équivalent à celui de la figure 6.1.

On vérifie aisément que si deux morceaux de plan sont équivalents, alors le maximum de ces deux morceaux de plan est encore un morceau de plan, équivalent aux deux précédents (rappelons que l'interprétation géométrique du maximum de deux fonctions binaires est l'union de leurs interprétations géométriques). On vérifie également que la classe d'équivalence d'un morceau de plan fini ne comporte que des morceaux finis. On en déduit que l'opération maximum confère une structure de

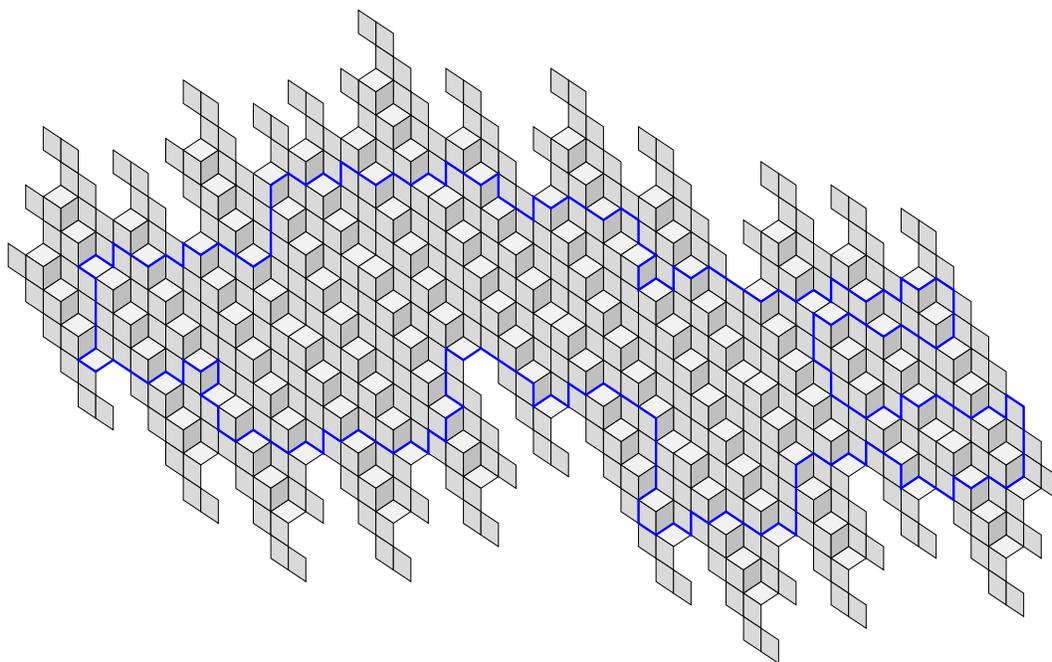


FIGURE 6.8 – Un morceau de plan fini (de taille 786) équivalent à celui de la figure 6.1 (dont le contour est surligné). L'équivalence de ces deux morceaux peut se montrer simplement en raisonnant sur les tailles des paliers.

semi-treillis à la classe d'équivalence $\langle \mathcal{B} \rangle$ d'un morceau de plan \mathcal{B} fini. Expérimentalement, on constate que ce supremum est très grand devant \mathcal{B} . Par exemple, dans le cas du morceau de la figure 6.1, un calcul sur ordinateur montre que le supremum est formé de plus de 7000 faces (ce n'est donc pas le morceau de la figure 6.8).

Par ailleurs, le minimum de deux morceaux de plan équivalents est un morceau de plan qui ne leur est généralement pas équivalent (intuitivement, il contient moins d'information que ces deux plans). L'opération de minimum ne confère donc pas de structure de treillis à une classe d'équivalence.

L'intérêt de cette relation d'équivalence est qu'elle montre qu'il existe une certaine liberté pour modifier un morceau de plan donné afin d'en obtenir un équivalent plus pratique. Comme le but est d'appliquer une application duale $E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})$ bien choisie, les morceaux $\beta_{a,i}$ -pavables sont particulièrement intéressants (Déf. 6.3, voir aussi Prop. 6.5).

6.3.2 Reconnaissabilité

La notion de palier (Déf. 3.18) a été définie pour n'importe quelle fonction binaire. En particulier, les quantités $a_{i,j}^\pm$ restent définies de la même façon. Cependant,

si \mathcal{B} est un morceau d'un plan \mathcal{P} , alors les $a_{i,j}^\pm$ peuvent être différents pour \mathcal{B} et \mathcal{P} du fait qu'un palier de \mathcal{B} peut très bien n'être qu'un morceau d'un palier de \mathcal{P} . Il faut être plus précis :

Définition 6.19 Soit \mathcal{B} une fonction binaire. Considérons un (i, j) -palier de \mathcal{B} de la forme :

$$\sum_{k \in I} (\mathbf{x} + k\mathbf{e}_j, i^*),$$

où \mathbf{x} est un vecteur de \mathbb{Z}^d et I un intervalle de \mathbb{Z} . Alors, ce palier est dit fermé à droite si I admet un maximum d tel que :

$$\mathcal{B}(\mathbf{x} + d\mathbf{e}_j, j^*) = 1,$$

et il est dit fermé à gauche si I admet un minimum g tel que :

$$\mathcal{B}(\mathbf{x} + g\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i, j^*) = 1.$$

Les notions de palier fermé, ouvert, semi-ouvert ou semi-fermé à gauche ou à droite sont calquées sur le cas des intervalles réels. La figure 6.9 illustre les divers types de paliers d'une fonction binaire.

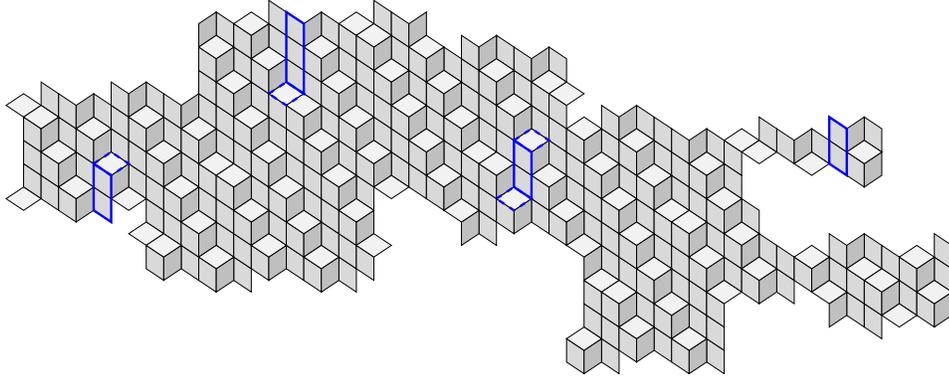


FIGURE 6.9 – Cette fonction binaire contient tous les types de $(1, 3)$ -paliers : semi-fermé à droite, semi-fermé à gauche, fermé et, enfin, ouvert (respectivement encadrés de gauche à droite ; les traits en pointillés encadrant les faces qui ferment un palier).

Montrons maintenant que les paliers peuvent être utilisés pour lire sur une fonction binaire l'information nécessaire à déterminer – au cas où il s'agit d'un morceau de plan – l'application duale $E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})$ à utiliser. On se restreint aux fonctions binaires *reconnaissables* :

Définition 6.20 Une fonction binaire \mathcal{B} est dite reconnaissable si elle vérifie les deux conditions suivantes. Premièrement, il doit exister $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que :

$$a_{1,i+1}^+(\mathcal{B}) \geq 2 \quad \text{et} \quad \min_{1 \leq j \leq d} a_{i+1,j+1}^+(\mathcal{B}) \geq 2.$$

On note $i(\mathcal{B})$ le plus petit i vérifiant cette première condition. Deuxièmement, \mathcal{B} doit avoir au moins un $(1, i(\mathcal{B}) + 1)$ -palier fermé, le plus petit d'entre eux étant de taille $a_{1, i(\mathcal{B})+1}^+(\mathcal{B}) - 1$. On note $a(\mathcal{B})$ cette taille.

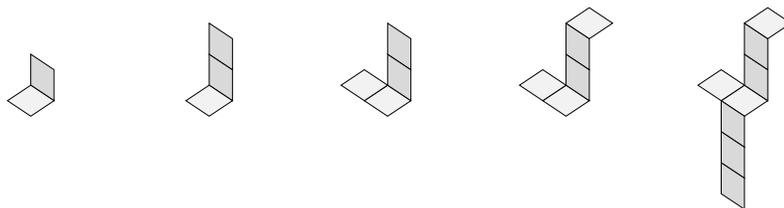


FIGURE 6.10 – Une suite $(\mathcal{B}_i)_{1 \leq i \leq 5}$ croissante de fonctions binaires (de gauche à droite). La première n'est pas reconnaissable car on a $a_{1,2}^+(\mathcal{B}_1) = a_{1,3}^+(\mathcal{B}_1) = 1$; La deuxième vérifie $a_{1,3}^+(\mathcal{B}_2) \geq 2$ mais n'est pas reconnaissable car on a $a_{3,2}^+(\mathcal{B}_2) = 1$. La troisième vérifie $a_{1,3}^+(\mathcal{B}_3) \geq 2$ et $a_{3,2}^+(\mathcal{B}_3) \geq 2$, c'est-à-dire la première condition de reconnaissabilité, avec $i(\mathcal{B}_3) = 2$. Elle n'est cependant pas reconnaissable car elle ne possède pas de $(1, 3)$ -palier fermé. La quatrième possède un $(1, 3)$ -palier fermé, mais elle n'est pas reconnaissable car ce palier est de taille $a_{1,3}^+(\mathcal{B}_4) = 2$. La cinquième possède un $(1, 3)$ -palier fermé de taille $a_{1,3}^+(\mathcal{B}_5) - 1 = 2$. Elle est donc reconnaissable, avec $i(\mathcal{B}_5) = 2$ et $a(\mathcal{B}_5) = 2$. C'est la seule pour laquelle on est sûr que s'il s'agit d'un morceau d'un plan $\mathcal{P}_{(1,\alpha,\beta)}$, alors ce plan vérifie $1 \geq \beta > \alpha$ et $\lfloor 1/\beta \rfloor = 2$.

La figure 6.10 illustre la notion de reconnaissabilité. Intuitivement, la première condition assure que si \mathcal{B} est un morceau de plan, alors la première coordonnée de ce vecteur est plus grande que la $(i(\mathcal{B}) + 1)$ -ème, qui est elle même strictement plus grande que toutes les autres. En d'autre terme, ce vecteur normal peut s'écrire $(1, \alpha)$, avec $\alpha \in [0, 1]^d$ et $\alpha_{i(\mathcal{B})} = \|\alpha\|_\infty$. Quant à la seconde condition, elle assure que si \mathcal{B} est un morceau de plan, alors ce plan a deux tailles différentes de $(1, i(\mathcal{B} + 1))$ -paliers, et $a(\mathcal{B})$ est la plus petite de ces deux tailles. L'intérêt de cette notion de reconnaissabilité est donc, en quelque sorte, de généraliser la proposition 3.21, puisque la proposition 3.19 assure alors :

Proposition 6.21 *Soit $\alpha \in [0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Soit \mathcal{B} une fonction binaire reconnaissable. Alors, si \mathcal{B} est un morceau du plan en escalier $\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho}$, on a :*

$$i(\mathcal{B}) = \min\{i \mid \alpha_i = \|\alpha\|_\infty\} \quad \text{et} \quad a(\mathcal{B}) = \lfloor \|\alpha\|_\infty^{-1} \rfloor.$$

Notons que, selon les définitions précédentes, un plan n'est pas toujours reconnaissable. C'est, par exemple, le cas d'un plan dont le vecteur normal a deux coordonnées égales ou d'un plan dont la $(i + 1)$ -ème coordonnée du vecteur normal est de la forme $1/q$, $q \in \mathbb{N}$ (tous les $(1, i + 1)$ paliers étant alors de taille q). Cependant, dans le cas d'un morceau de plan – où seulement une partie des paliers du plan sont connus – la restriction apportée par la reconnaissabilité est nécessaire

pour être sûr de la taille de tous les paliers du plan. En pratique, une fonction binaire de taille suffisamment importante et de forme pas trop pathologique est très souvent reconnaissable. Par exemple, notre morceau préféré (Fig. 6.1 ou 6.9) est reconnaissable.

6.3.3 $\beta_{a,i}$ -pavabilité

Le but de ce paragraphe est de montrer comment associer effectivement à toute fonction binaire reconnaissable \mathcal{B} une fonction binaire $\tilde{\mathcal{B}}$ telle que :

$$0 \leq \mathcal{B} \leq \mathcal{P} \Leftrightarrow 0 \leq \tilde{\mathcal{B}} \leq \mathcal{P} \Leftrightarrow 0 \leq E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}}) \leq \tilde{T}(\mathcal{P}).$$

Alors, en posant :

$$\tilde{T}(\mathcal{B}) = E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}}),$$

l'application \tilde{T} sera prolongée de sorte à vérifier l'équation (6.1), discutée au début du paragraphe 6.3.1.

Introduisons d'abord quelques termes. Considérons un palier de la forme :

$$\sum_{k \in I} (\mathbf{x} + k\mathbf{e}_j, i^*),$$

où \mathbf{x} est un vecteur de \mathbb{Z}^d et $I = [g, d]$ un intervalle borné de \mathbb{Z} . On dit alors qu'on *prolonge* ce palier à gauche si on lui ajoute des faces $(\mathbf{x} + k\mathbf{e}_j, i^*)$ pour $k < g$; on dit qu'on *ferme* ce palier à droite si on lui ajoute la face $(\mathbf{x} + g\mathbf{e}_j, j^*)$. On définit alors trois opérations élémentaires sur les fonctions binaires de \mathfrak{B} :

Définition 6.22 Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, \dots, d\}$. On définit trois applications de \mathfrak{B} dans \mathfrak{B} comme suit.

1. L'extension $\phi_{a,i}$: tout $(1, i+1)$ -palier ouvert seulement à gauche et de taille inférieure à a est prolongé à gauche en un palier de taille a ;
2. l'extension $\psi_{a,i}$: tout $(1, i+1)$ -palier ouvert à droite et de taille strictement supérieure à a est fermé à droite ;
3. la réduction χ_i : tout $(1, i+1)$ -palier ouvert seulement à droite est supprimé.

La figure 6.11 illustre ces opérations élémentaires dans le cas $(a, i) = (2, 2)$ et la figure 6.12 montre comment un morceau de plan est transformé par ces opérations. On montre alors :

Proposition 6.23 Soit \mathcal{B} une fonction binaire. Supposons \mathcal{B} reconnaissable et notons $\tilde{\mathcal{B}}$ la fonction binaire obtenue après applications successives des règles $\phi_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}$,

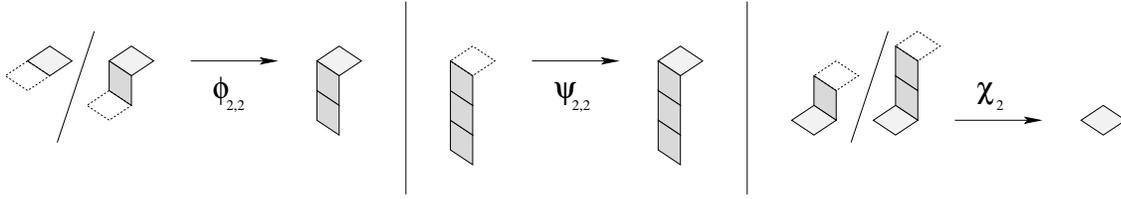


FIGURE 6.11 – Les deux opérations d’extension $\phi_{a,i}$ et $\psi_{a,i}$ et l’opération de réduction χ_i , dans le cas $(a, i) = (2, 2)$ (les traits pointillés représentant l’absence de face).

$\psi_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}$ et $\chi_{i(\mathcal{B})}$. Alors, $\tilde{\mathcal{B}}$ est équivalent à \mathcal{B} . Si, de plus, $\tilde{\mathcal{B}}$ ne contient pas de $(1, i(\mathcal{B}) + 1)$ -palier ouvert, alors on a, pour tout plan $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}_{\exists} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}$:

$$0 \leq \tilde{\mathcal{B}} \leq \mathcal{P} \Leftrightarrow 0 \leq E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}}) \leq \tilde{T}(\mathcal{P}).$$

Preuve. Soit \mathcal{B} une fonction binaire reconnaissable. Supposons que \mathcal{B} soit un morceau d’un plan \mathcal{P} . Alors, tout $(1, i + 1)$ -palier de \mathcal{B} ouvert seulement à gauche et de taille inférieure à $a(\mathcal{B})$ est nécessairement un morceau d’un $(1, i + 1)$ -palier de \mathcal{P} fermé et de taille supérieure ou égale à $a(\mathcal{B})$. On en déduit que $\phi_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}(\mathcal{B})$ est encore un morceau de \mathcal{P} . Inversement, si $\phi_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}(\mathcal{B})$ est un morceau de \mathcal{P} , alors \mathcal{B} aussi puisque $\mathcal{B} \leq \phi_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}(\mathcal{B})$. Donc $\phi_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}(\mathcal{B})$ est équivalent à \mathcal{B} . Un raisonnement similaire montre que les opérations $\psi_{a,i}$ et χ_i préservent également l’équivalence de fonctions binaires. Ceci prouve que $\tilde{\mathcal{B}}$ est équivalent à \mathcal{B} . Supposons maintenant que $\tilde{\mathcal{B}}$ ne contienne pas de $(1, i(\mathcal{B}) + 1)$ -palier ouvert. Il est facile de voir que la définition des opérations $\phi_{a,i}$, $\psi_{a,i}$ et χ_i assure que $\tilde{\mathcal{B}}$ est $\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}$ -pavable.

Supposons alors que $\tilde{\mathcal{B}}$ soit un morceau d’un plan $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}_{\exists} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}$, qui est donc $\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}$ -pavable puisque $a(\mathcal{B}) = a(\mathcal{P})$ et $i(\mathcal{B}) = i(\mathcal{P})$. Montrons alors que le pavage de $\tilde{\mathcal{B}}$ est une restriction de celui de \mathcal{P} . C’est évident pour les faces de type $j \notin \{1, i(\mathcal{B}) + 1\}$. Deux faces de types 1 et $i(\mathcal{B}) + 1$ sont groupées, dans le pavage de \mathcal{P} comme dans celui de $\tilde{\mathcal{B}}$, si et seulement si la face de type 1 appartient à un $(1, i(\mathcal{B}) + 1)$ -palier de taille $a(\mathcal{B})$ fermé à droite par la face de type $i(\mathcal{B}) + 1$. Les seules faces restantes sont alors des faces de type 1 (une pour chaque $(1, i(\mathcal{B}) + 1)$ -palier de taille $a(\mathcal{B}) + 1$, qui sont forcément isolées dans le pavage de \mathcal{P} comme dans celui de $\tilde{\mathcal{B}}$). On en déduit que le pavage de $\tilde{\mathcal{B}}$ est bien une restriction de celui de \mathcal{P} , et le résultat découle alors de la proposition 6.5.

Inversement, si $0 \leq E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}}) \leq \tilde{T}(\mathcal{P})$, alors la proposition 6.2 assure que l’image de la fonction binaire $E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}})$ par l’application duale $E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})})$, c’est-à-dire $\tilde{\mathcal{B}}$, est un morceau du plan $E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})})(\tilde{T}(\mathcal{P}))$, c’est-à-dire de \mathcal{P} . \square

Le problème vient donc des paliers ouverts, ce qu’on examine au paragraphe suivant.

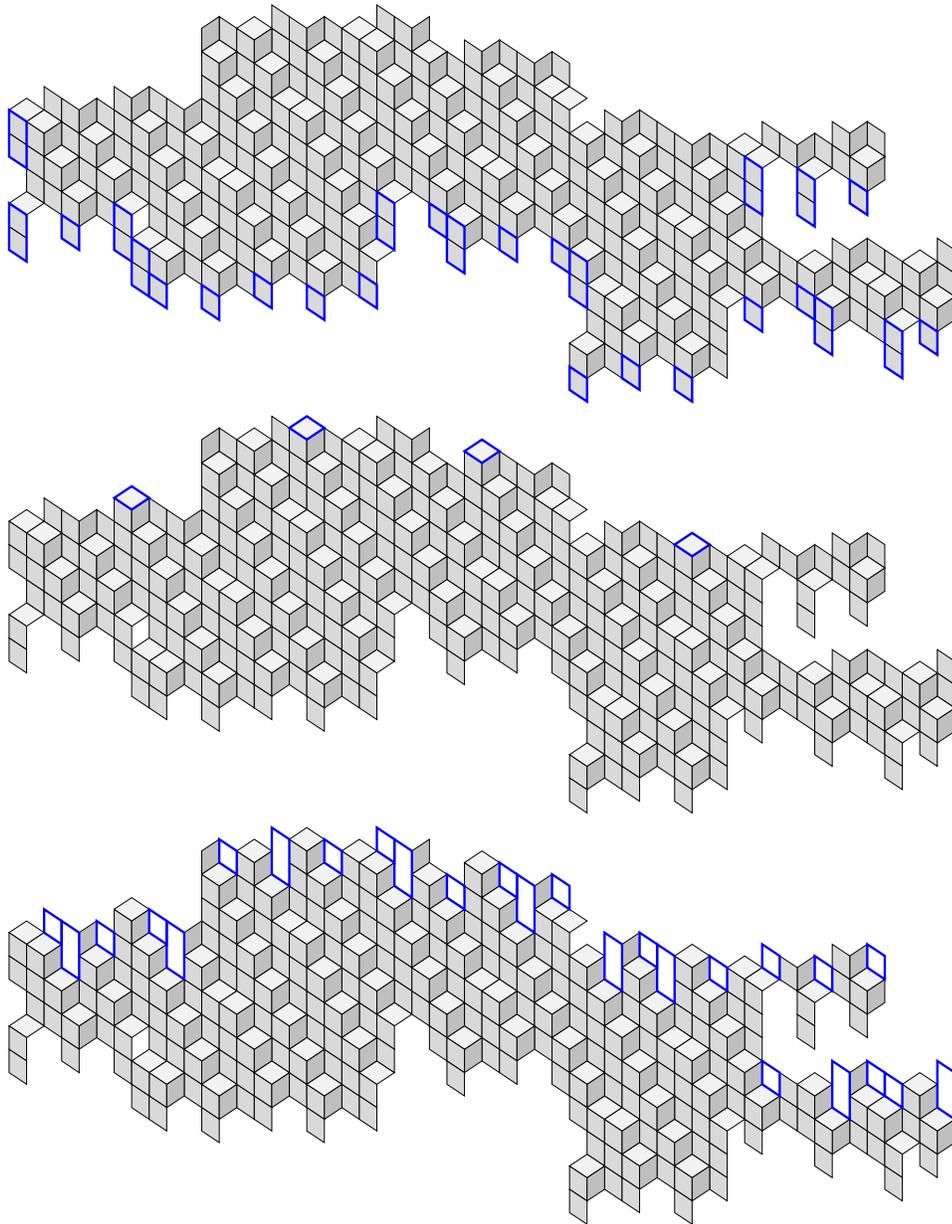


FIGURE 6.12 – Les opérations $\phi_{2,2}$, $\psi_{2,2}$ et χ_2 sont successivement effectuées sur le morceau de la figure 6.1 (de haut en bas, les faces ajoutées ou supprimées étant encadrées). Le morceau obtenu est équivalent au morceau initial, et il admet un $\beta_{2,2}$ -pavage si on lui enlève les (1, 3)-paliers ouverts qu'il contient (il y en a ici trois, situés vers la droite du morceau).

6.3.4 Un algorithme hybride

Ce paragraphe expose un algorithme hybride de reconnaissance de plan. Le principe général est le suivant. Étant donné une fonction binaire, on calcule son développement de Brun tant qu'on peut lire l'information suffisante, c'est-à-dire tant que les fonctions binaires obtenues restent reconnaissables. Comme les paliers ouverts posent problème, on les enlève et on les garde de côté pour vérifier *a posteriori* s'ils jouent un rôle. Quand on obtient une fonction binaire qui n'est plus reconnaissable – on espère alors qu'elle est, en pratique, de faible taille – on utilise un des autres algorithmes de reconnaissance de plan connus (voir Chap. 1) pour en déterminer les paramètres acceptables. Il reste alors à remonter aux paramètres acceptables de la fonction binaire initiale, ce qui se fait facilement grâce au développement de Brun calculé. De plus, à chaque étape de cette remontée, on corrige (si besoin est) l'ensemble des paramètres acceptables en tenant compte des paliers qui ont été coupés “en descendant”, c'est-à-dire à l'étape correspondante du calcul du développement de Brun (lignes 2 à 8 du pseudo-code donné ci-dessous).

On peut écrire plus précisément cet algorithme sous forme de pseudo-code. Soit XReco un algorithme de reconnaissance de plan qui renvoie le polytope des paramètres acceptables de la fonction binaire passée en argument. On note $B'_{a,i}$ la matrice $(d+2) \times (d+2)$ déduite de la matrice $B_{a,i}$ ainsi :

$$B'_{a,i} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & B_{a,i} & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le pseudo-code suivant définit alors l'algorithme BrunReco :

BrunReco(\mathcal{B})
1. $n \leftarrow 0$;
2. tant que \mathcal{B} est reconnaissable faire
3. $(a_n, i_n) \leftarrow (a(\mathcal{B}), i(\mathcal{B}))$;
4. calculer $\tilde{\mathcal{B}}$;
5. $L_n \leftarrow$ paliers ouverts de $\tilde{\mathcal{B}}$;
6. $\mathcal{B} \leftarrow E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}} - L_n)$;
7. $n \leftarrow n + 1$;
8. fin tant que ;
9. $P \leftarrow \text{XReco}(\mathcal{B})$;
10. pour $k = n - 1$ à $k=0$ faire
11. $P \leftarrow B'_{a_k, i_k} P$;
12. $P \leftarrow P \cap \text{XReco}(L_k)$;
13. fin pour ;
14. renvoyer P ;

Précisons que, ligne 5, L_n est la fonction binaire définie comme étant la restriction de $\tilde{\mathcal{B}}$ à ses paliers ouverts (ce qui n'est pas forcément très clair dans le pseudo-code). En particulier, ligne 6, l'expression $\tilde{\mathcal{B}} - L_n$ désigne une soustraction usuelle de fonctions.

Examinons la terminaison et la correction de cet algorithme. En notant \mathcal{B}_n la fonction binaire obtenue à l'étape n , on a la relation :

$$\mathcal{B}_{n+1} = E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}} - L_n).$$

La proposition suivante montre alors que l'algorithme termine toujours :

Proposition 6.24 *Si \mathcal{B}_n est reconnaissable, alors la taille de \mathcal{B}_{n+1} est strictement inférieure à celle de \mathcal{B}_n .*

Preuve. Introduisons les notations suivantes :

$$\mathbf{f}(\mathcal{B}_n) = (x_1, \dots, x_{d+1}), \quad \mathbf{f}(\tilde{\mathcal{B}} - L_n) = (y_1, \dots, y_{d+1}), \quad \mathbf{f}(\mathcal{B}_{n+1}) = (z_1, \dots, z_{d+1}),$$

où \mathbf{f} a été définie dans la proposition 2.12. La même proposition assure alors :

$$\begin{cases} z_1 = y_{i_n+1}, \\ z_{i_n+1} = y_1 - a_n y_{i_n+1}, \\ z_j = y_j. \end{cases}$$

Par ailleurs, on déduit de la définition de $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + a_n x_{i_n+1} - x'_1, \\ y_{i_n+1} = x_{i_n+1} + \frac{1}{a_n+1} x''_1, \\ y_j = x_j, \end{cases}$$

où x'_1 (resp. x''_1) est la somme des tailles des $(1, i_n + 1)$ -paliers prolongés par ϕ_{a_n, i_n} (resp. ψ_{a_n, i_n}). On calcule alors :

$$|\mathcal{B}_{n+1}| = \sum_{j=1}^{d+1} z_j = \sum_{j=1}^{d+1} x_j + \frac{1 - a_n}{a_n + 1} x''_1 - x'_1 = |\mathcal{B}_n| + \frac{1 - a_n}{a_n + 1} x''_1 - x'_1.$$

Comme $a_n \geq 1$, on a $|\mathcal{B}_{n+1}| \leq |\mathcal{B}_n|$, avec égalité si et seulement si $x'_1 = 0$. Or $x'_1 = 0$ signifie qu'il n'y a pas de $(1, i_n + 1)$ -palier fermé à droite, et donc en particulier que \mathcal{B}_n n'est pas reconnaissable. Ceci étant exclu, on a bien $|\mathcal{B}_{n+1}| < |\mathcal{B}_n|$. \square

Le théorème suivant montre alors la correction de l'algorithme :

Théorème 6.25 *L'algorithme RecoBrun calcule l'ensemble des paramètres acceptables de toute fonction binaire passée en argument.*

Preuve. On raisonne par récurrence sur le nombre d'étapes du calcul du développement de Brun, c'est-à-dire la valeur de n à la ligne 9 du pseudo-code. Si $n = 0$, c'est la correction (supposée) de l'algorithme **XReco** qui garantit le résultat. Supposons alors le résultat acquis au rang n . On vérifie alors :

$$\begin{aligned}
((1, \boldsymbol{\alpha}), \rho) \in P(\mathcal{B}_0) &\Leftrightarrow 0 \leq \mathcal{B}_0 \leq \mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho} \\
&\Leftrightarrow 0 \leq \tilde{\mathcal{B}}_0 \leq \mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho} \\
&\Leftrightarrow 0 \leq \tilde{\mathcal{B}}_0 - L_0 \leq \mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho} \quad \text{et} \quad 0 \leq L_0 \leq \mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho} \\
&\Leftrightarrow 0 \leq \mathcal{B}_1 \leq \mathcal{P}_{B_{a_0, i_0}^{-1}(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho} \quad \text{et} \quad ((1, \boldsymbol{\alpha}), \rho) \in \mathbf{XReco}(L_0) \\
&\Leftrightarrow (B_{a_0, i_0}^{-1}(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho) \in P(\mathcal{B}_1) \quad \text{et} \quad ((1, \boldsymbol{\alpha}), \rho) \in \mathbf{XReco}(L_0)
\end{aligned}$$

Le passage de la première à la deuxième ligne est justifié par l'équivalence de \mathcal{B}_0 et $\tilde{\mathcal{B}}_0$ (Prop. 6.23). Le passage de la troisième à la quatrième ligne se fait en appliquant $E_1^*(\beta_{a_0, i_0}^{-1})$ et est justifié par la proposition 6.23. On en déduit donc finalement :

$$P(\mathcal{B}_0) = B'_{a_0, i_0} P(\mathcal{B}_1) \cap \mathbf{XReco}(L_0).$$

L'hypothèse de récurrence assure alors la correction de l'algorithme. \square

Pour finir ce paragraphe, discutons de la complexité de cet algorithme.

Commençons par le cœur de l'algorithme, qui est le calcul du développement de Brun d'un éventuel vecteur normal de la fonction binaire considérée (l. 2 à 8). La lecture du couple (a_n, i_n) se fait en temps linéaire en la taille de \mathcal{B} (parcours des faces), ainsi que le calcul de $\tilde{\mathcal{B}}$ (applications des opérations élémentaires) et celui de L_n (encore un parcours des faces). L'application de $E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})$ se fait également en temps linéaire (temps constant l'image de chaque face). Ainsi, la boucle des lignes 3 à 7 peut être effectuée en temps linéaire. La question principale est donc le nombre d'itérations de cette boucle.

La proposition 6.24 assure qu'il y a au plus $|\mathcal{B}|$ itérations, puisqu'on perd au moins une face à chaque itération, et qu'une fonction binaire reconnaissable comporte au moins une face. Cependant, dans le cas où la fonction \mathcal{B} considérée est un morceau d'un plan en escalier $\mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho}$, avec $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^d$, alors le nombre d'itérations est borné par la longueur du développement de Brun de $\boldsymbol{\alpha}$ (car un morceau d'un plan de vecteur normal \mathbf{e}_1 n'est jamais reconnaissable). On déduit alors de la proposition 3.14 que, dans ce cas, il y a alors au plus $\log_{(d+2)/(d+1)}(m(\boldsymbol{\alpha}))$ itérations (rappelons que $m(\boldsymbol{\alpha})$, pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^d$, est la somme des d coordonnées de $\boldsymbol{\alpha}$ et de leur dénominateur commun). La proposition suivante va permettre de relier cette majoration à la taille de \mathcal{B} :

Proposition 6.26 *Soit \mathcal{B} un morceau fini d'un plan en escalier de normale $(1, \boldsymbol{\alpha})$. Si tous les sommets de \mathcal{B} sont inclus dans un hypercube de \mathbb{Z}^{d+1} de côté $D \in \mathbb{N}$ (une boîte englobante), alors on peut supposer $m(\boldsymbol{\alpha}) \leq (d+1)D^d$.*

Preuve. Rappelons qu'on a $0 \leq \mathcal{B} \leq \mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}$ si et seulement si tout sommet \mathbf{x} de \mathcal{B} vérifie : $\rho \leq \langle \mathbf{x} | (1, \alpha) \rangle < \rho + \|(1, \alpha)\|_1$ (Prop. 3.2). On appelle *point d'appui* un sommet \mathbf{x} tel que $\rho = \langle \mathbf{x} | (1, \alpha) \rangle$.

Si, pour $i \in \{2, \dots, d+1\}$, \mathcal{B} admet deux points d'appui \mathbf{x} et \mathbf{y} tels que $x_i \neq y_i$, alors on calcule : $\alpha_i = (x_1 - y_1)/(x_i - y_i)$. Donc α_i s'écrit comme le quotient de deux entiers inférieurs à D .

Sinon, on vérifie qu'on peut se ramener au cas précédent en jouant sur α et ρ . Géométriquement, il suffit de "caler au plus haut" les hyperplans $\langle \mathbf{x} | (1, \alpha) \rangle = \rho$ et $\langle \mathbf{x} | (1, \alpha) \rangle = \rho + \|\alpha\|_1$, c'est-à-dire de les déplacer dans la direction $\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_{d+1}$ et de les pivoter de telle sorte que tous les sommets de \mathcal{B} reste entre eux, mais avec un maximum de points d'appui (voir Fig. 6.3.4 dans le cas $d = 1$).

Finalement, on se ramène à un vecteur α dont les d coordonnées sont des quotients d'entiers inférieurs à D . En réduisant ces coordonnées au même dénominateur, qui est inférieur à D^d , on obtient : $m(\alpha) \leq (d+1)D^d$. \square

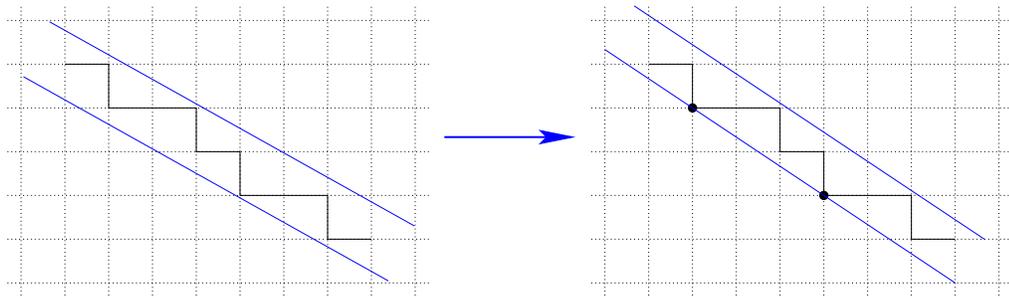


FIGURE 6.13 – Morceau d'une droite de paramètres quelconques tenant dans une boîte de côté $D = 7$ (à gauche – les deux droites parallèles épaisses délimitant la zone possible pour les sommets de ce morceau de plan). La finitude du morceau permet de jouer sur les paramètres (en translatant et pivotant les deux droites parallèles) pour avoir deux points d'appui (à droite – points d'appui en gras). Le vecteur normal s'écrit alors $(1, \alpha)$, où α est un quotient d'entiers inférieurs à D (ici, $\alpha = 3/2$).

Ainsi, dans le cas où \mathcal{B} est un morceau de plan, le nombre d'itérations de la boucle des lignes 2 à 8 est majoré par $d \log_{(d+2)/(d+1)}((d+1)D)$. En particulier, si \mathcal{B} n'est pas trop dispersé, c'est-à-dire admet une boîte englobante de taille polynômiale en le nombre de faces de \mathcal{B} (sa taille), la majoration précédente est logarithmique en la taille de \mathcal{B} .

Cette majoration a été obtenue dans le cas où \mathcal{B} est un morceau de plan. Mais comme elle ne dépend que de la taille d'une boîte englobante de \mathcal{B} , on peut la calculer avant de commencer les itérations des lignes 2 à 8. Ceci permet de modifier légèrement l'algorithme : si jamais il s'avère qu'on a fait plus d'itérations que cette

majoration, alors on peut s'arrêter et répondre que \mathcal{B} n'est pas un morceau de plan (par définition de cette majoration). Ainsi, quitte à modifier légèrement l'algorithme et en supposant \mathcal{B} pas trop dispersé, le nombre d'itérations de la boucle des lignes 2 à 8 est logarithmique en la taille de \mathcal{B} . Chaque boucle se faisant en temps linéaire en la taille de \mathcal{B} , on conclut que la complexité totale des lignes 2 à 8 est quasi-linéaire en la taille de \mathcal{B} .

Intéressons nous maintenant aux lignes 9 à 13, qui correspondent à la partie "corrective" de l'algorithme (quand le développement de Brun n'a pas été terminé). Notons que la taille totale de tous les ensembles sur lesquels on appelle `XReco` est inférieure à la taille de \mathcal{B} . Ainsi, la complexité totale des appels à `XReco` est inférieure à la complexité de `XReco` lui-même (c'est-à-dire que cette hybridation ne peut qu'améliorer la complexité de l'algorithme `XReco` sur lequel elle repose). Quant aux calculs d'intersection de polytopes convexes (ligne 12), il est en général difficile d'estimer précisément ce facteur. On peut, par exemple, citer un résultat de Chazelle, qui montre que l'intersection de k polytopes convexes de \mathbb{R}^3 peut être calculée en temps $\mathcal{O}(m \ln k)$, où m est la taille totale de ces polytopes ([32]).

Cependant, on s'attend à ce que la taille de la première fonction binaire \mathcal{B}_n qui ne soit plus reconnaissable, ainsi que les tailles des paliers ouverts mis de côtés (les L_k), soient largement inférieures à la taille de \mathcal{B} . En d'autres termes, on s'attend à ce que le temps de calcul des lignes 9 à 13 soit petit devant celui des lignes 2 à 8. Pour valider ceci, il resterait à faire une étude plus systématique de l'efficacité en pratique de cet algorithme.

Enfin, on peut aussi mettre à profit la convergence faible de l'algorithme de Brun (Prop. 3.15) pour transformer l'algorithme précédent en un algorithme de reconnaissance *approchée*, qui ne calcule pas $P(\mathcal{B})$, le polytope convexe des paramètres acceptables de \mathcal{B} , mais un ensemble qui en est proche. En effet, $P(\mathcal{B})$ est l'image de l'ensemble P calculé par `XReco` (l. 9) par le produit des matrices B'_{a_k, i_k} associées au développement de Brun calculé aux lignes 2 à 8. Or la convergence faible de l'algorithme de Brun assure justement que, quelque soit P , son image par ce produit des matrices converge vers $P(\mathcal{B})$ quand la longueur du développement de Brun tend vers l'infini. Ici, bien sûr, le cas d'un développement infini est exclu (\mathcal{B} étant fini). Mais plus ce développement est long, plus l'influence de P sur $P(\mathcal{B})$ est faible (intuitivement, l'information contenue dans P est petit à petit transférée au produit de matrices). Ainsi, on pourrait décider de négliger l'information contenue dans P au delà d'une certaine longueur du développement de Brun. Au lieu de calculer P par `XReco` (l. 9), on pourrait alors poser :

$$P \leftarrow \{(\boldsymbol{\alpha}, \langle \mathbf{x}_0 | (1, \boldsymbol{\alpha}) \rangle) \mid \boldsymbol{\alpha} \in [0, 1]^d\},$$

où \mathbf{x}_0 est un sommet (arbitrairement choisi) de \mathcal{B} . Les lignes 10 à 13 calculeraient alors un polytope d'autant plus proche de $P(\mathcal{B})$ que le développement de Brun

calculé aux lignes 2 à 8 serait long. Notons que si l'on cherche non pas tout le polytope $P(\mathcal{B})$ mais simplement *un* de ses éléments (ce qui suffit généralement), on pourrait encore plus simplement poser :

$$P \leftarrow \{(\mathbf{0}, \langle \mathbf{x}_0 | (1, \mathbf{0}) \rangle)\}.$$

Les lignes 10 à 13 calculeraient alors une sorte de “vecteur quasi-normal” à \mathcal{B} .

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on a étudié l'action des applications duales – un type de substitution particulier – sur les pavages canoniques de codimension un (plans ou surfaces en escalier, voire fonctions binaires). On a également relié ces résultats aux fractions continues multidimensionnelles, notamment dans le cadre des problèmes de géométrie discrète que sont la génération et la reconnaissance de plan. On a ainsi généralisé le lien entre mots, fractions continues et géométrie discrète discuté au chapitre 1, ce qui était l'objectif principal annoncé.

Pour finir, mentionnons quelques résultats que nous avons obtenus durant cette thèse sans les exposer dans ce document. Ces résultats peuvent être vus comme des premiers pas de prolongements des problématiques abordées dans cette thèse.

Un premier résultat concerne la relation entre les applications duales utilisées dans cette thèse et les deux classes de substitutions sur les pavages – géométriques ou combinatoires – exposées au paragraphe 1.2.2. Nous avons montré, dans l'article [57] (version longue d'un résultat présenté en conférence, voir [54]), que les applications duales de substitutions sont des substitutions combinatoires particulières. Ceci permet, en particulier, de disposer d'une large classe d'exemples de substitutions combinatoires – puisqu'il n'est généralement pas évident de définir *ex nihilo* de telles substitutions. Une question qui reste alors en suspens est celle de la caractérisation des substitutions combinatoires pouvant être vues comme des applications duales de substitutions. Notamment, il serait intéressant de savoir si ces substitutions combinatoires particulières sont exactement celles envoyant plans et surfaces en escalier sur, respectivement, plans et surfaces en escalier (ce qui est bien le cas des applications duales de substitutions). Ceci permettrait de voir les applications duales de substitutions parmi les substitutions combinatoires comme les *morphismes sturmiens* parmi les substitutions sur les mots, puisque les morphismes sturmiens sont les substitutions envoyant les mots sturmiens sur les mots sturmiens (voir [15]).

Un autre résultat concerne la flip-accessibilité des pavages canoniques. Nous avons étudié au chapitre 4 la flip-accessibilité des pavages canoniques de codimension un, énonçant notamment le théorème 4.16. Dans [22], nous avons montré un résultat analogue à ce théorème dans le cadre des pavages canoniques de dimension

deux et de codimension quelconque. La démonstration de ce résultat est un peu plus complexe et fait intervenir des concepts que nous n'avons pas abordés dans cette thèse, en particulier les *lignes de De Bruijn* de pavages (introduites dans [39]). Ce résultat étend au cas de pavages infinis un résultat de Kenyon, qui montre que deux pavages canoniques de dimension deux et codimension quelconque d'un même domaine fini sont toujours flip-accessibles (voir [73]). L'objectif général serait de caractériser la flip-accessibilité en dimensions et codimensions quelconques.

L'objectif précédent semble difficile (voir, par exemple, les difficultés soulevées dans [43] dans le cas de la dimension trois). Cependant, nous avons introduit au chapitre 4 la notion de *pseudo-flip-accessibilité* qui semble, elle, plus facile à étudier, tout en permettant d'obtenir des résultats utiles pour l'étude de l'action des applications duales sur les pavages canoniques (c'est-à-dire, dans le cadre de cette thèse, les surfaces en escalier). En particulier, dans l'optique de généraliser les liens entre applications duales, pavages et fractions continues en codimensions supérieures (cette thèse ne traitant que de la codimension un), une telle approche semble intéressante. D'autant plus qu'on peut déjà citer quelques travaux sur les possibles définitions en codimensions supérieures des applications duales (voir [5, 7, 50, 62]). Un objectif plus concret serait alors, par exemple, d'engendrer le pavage de Penrose (qui peut être vu comme une généralisation en codimension trois d'un plan en escalier) par des applications duales, ou de déterminer si un pavage canonique donné est un pavage par coupe et projection canonique (problème de reconnaissance de plan).

Pour finir, citons brièvement quelques axes de recherches envisagés, à plus long terme. Un premier axe consisterait à définir et étudier une notion de *complexité* pour les surfaces en escalier, notamment pour caractériser par leur complexité les plans en escalier parmi les surfaces en escalier, comme on sait caractériser par leur complexité³ les mots sturmiens parmi les mots. Un autre axe de recherche serait de généraliser la caractérisation des mots substitutifs en termes de *mots de retour*, donnée dans [48], au cas des plans en escalier, par exemple via une notion de *surface en escalier de retour*. Dans ce cadre, on pourrait notamment s'inspirer des travaux sur les *pavages de Voronoï dérivés* menés dans [89]. Enfin, si la reconnaissance de plan est un problème fondamental de la géométrie discrète, comme nous l'avons souligné au chapitre 1, il n'en demeure pas moins que le véritable problème est celui de la *polygonalisation* (ou *polyédrisation*), c'est-à-dire la décomposition d'objets discrets en plusieurs morceaux de plans. Il conviendrait alors d'étudier comment l'approche par applications duales, appliquée dans cette thèse à la reconnaissance de plan, pourrait être adaptée à ce problème plus général.

3. en termes de nombre de facteurs distincts – voir Chap. 1

Bibliographie

- [1] E. Altman, B. Gaujal, and A. Hordijk, *Balanced sequences and optimal routing*, Journal of the ACM **47** (2000), 752–775.
- [2] R. Ammann, B. Grünbaum, and G. C. Shephard, *Aperiodic tiles*, Discrete Comput. Geom. **8** (1992), 1–25.
- [3] P. Arnoux, V. Berthé, Th. Fernique, and D. Jamet, *Functional stepped surfaces, flips and generalized substitutions*, Theor. Comput. Sci. **380** (2007), 251–265.
- [4] P. Arnoux, V. Berthé, and A. Siegel, *Two-dimensional iterated morphisms and discrete planes*, Theor. Comput. Sci. **319** (2004), 145–176.
- [5] P. Arnoux, M. Furukado, E. O. Harriss, and S. Ito, *Algebraic numbers and automorphisms of free groups*, 2007, preprint, p. 37.
- [6] P. Arnoux and S. Ito, *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **8** (2001), 181–207.
- [7] P. Arnoux, S. Ito, and Y. Sano, *Higher dimensional extensions of substitutions and their dual maps*, J. Anal. Math. **83** (2001), 183–206.
- [8] M. Baake, U. Grimm, and R. V. Moody, *What is aperiodic order*, ArXiv math.HO/0203252, p. 27.
- [9] M. Baake, J. Hermisson, M. Hoffe, and C. Richard, *Random tilings – concepts and examples*, 1998, pp. 6385–6408.
- [10] M. Baake and R. V. Moody (eds.), *Directions in mathematical quasicrystals*, AMS, 1999.
- [11] F. Bailly, N. Destainville, and R. Mosseri, *Configurational entropy of codimension-one tilings and directed membranes*, J. Stat. Phys. **87** (1997), 697–754.
- [12] P. Balázhi, Z. Masáková, and E. Pelantová, *Complete characterization of substitution invariant sturmian sequences*, Integers - Electronic Journal of Combinatorial Number Theory **5** (2005).
- [13] R. Berger, *The undecidability of the domino problem*, Mem. Amer. Math. Soc. **66** (1966), 1–72.

- [14] J. Berstel, *Tracé de droites, fractions continues et morphismes itérés*, pp. 298–309, Hermès, 1990.
- [15] J. Berstel and P. Séébold, *A characterization of Sturmian morphisms*, Proc. MFCS'93, vol. 711, Lect. Notes Comput. Sci. Springer-Verlag, 1993, pp. 281–290.
- [16] V. Berthé and Th. Fernique, *Brun expansions of stepped surfaces*, 2007, Preprint.
- [17] ———, *Brun expansions, substitutions and discrete geometry*, WORDS (P. Arnoux, N. Bédaride, and J. Cassaigne, eds.), 2007, pp. 36–42.
- [18] V. Berthé and A. Siegel, *Tilings associated with beta-numeration and substitutions*, Integers - Electronic Journal of Combinatorial Number Theory **5** (2005).
- [19] V. Berthé and L. Vuillon, *Suites doubles de basse complexité*, J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 179–208.
- [20] ———, *Tilings and rotations on the torus : a two-dimensional generalization of Sturmian sequences*, Discrete Mathematics **223** (2000), 27–53.
- [21] O. Bodini and Th. Fernique, *Planar dimer tilings*, International Computer Science Symposium in Russia CSR'06 (D. Grigoriev, J. Harrison, and E. A. Hirsch, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 3967, Springer Verlag, 2006, pp. 104–113.
- [22] O. Bodini, Th. Fernique, and E. Rémila, *A characterization of flip-accessibility for rhombus tilings of the whole plane*, Language and Automata Theory and Applications LATA'07, 2007, pp. 139–150.
- [23] A. J. Brentjes, *Multi-dimensional continued fraction algorithms*, Mathematical Centre Tracts 145, Mathematisch Centrum, 1981.
- [24] V. Brimkov and D. Cœurjolly, *Computational aspects of digital plane and hyperplane recognition*, 2006, pp. 291–204.
- [25] V. Brimkov, D. Cœurjolly, and R. Klette, *Digital planarity - a review*, Disc. Appl. Math. **155** (2007), 468–495.
- [26] V. E. Brimkov and S. S. Dantchev, *Complexity analysis for digital hyperplane recognition in arbitrary fixed dimension*, Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI'05, vol. 3429, 2005, pp. 287–298.
- [27] L. Buzer, *An incremental linear time algorithm for digital line and plane recognition using a linear incremental feasibility problem*, Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI'02, vol. 2301, Springer Verlag, 2002, pp. 372–381.
- [28] V. Canterini and A. Siegel, *Geometric representation of substitutions of Pisot type*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 5121–5144.

- [29] J. Cassaigne, *Double sequences with complexity $mn + 1$* , J. Autom. Lang. Comb. **4** (1999), 153–170.
- [30] ———, *Subword complexity and periodicity in two or more dimensions*, Developments in Language Theory (Grzegorz Rozenberg and Wolfgang Thomas, eds.), World Scientific, 1999, pp. 14–21.
- [31] F. Chavanon and E. Rémila, *Rhombus tilings : Decomposition and space structure*, Discrete Comput. Geom. **35** (2006), 329–358.
- [32] B. Chazelle, *An optimal algorithm for intersecting three-dimensional convex polyhedra*, SIAM J. Comput. **21** (1992), 671–696.
- [33] E. B. Christoffel, *observatio arithmetica*, math ann. **6** (1875), 145–152.
- [34] E. M. Coven and G. A. Hedlund, *Sequences with minimal block growth*, Math. Systems Theory **7** (1973), 138–153.
- [35] E. Creutzburg, A. Hübler, and O. Sýkora, *Geometric methods for on-line recognition of digital straight-line segments*, Comput. Artif. Intell. **7** (1988), 253–276.
- [36] E. Creutzburg, A. Hübler, and V. Wedler, *On-line Erkennung digitaler Geradensegmente in linearer Zeit*, GEO-BILD'82, Wiss. Beiträge der FSU Jena, 1982, pp. 48–65.
- [37] D. Crisp, W. Moran, A. Pollington, and P. Shiue, *Substitution invariant cutting sequence*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 123–137.
- [38] K. Culik and J. Kari, *An aperiodic set of Wang cubes*, J-JUCS **1** (1995), 675–686.
- [39] N. G. De Bruijn, *Algebraic theory of penrose's nonperiodic tilings of the plane*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **43** (1981), 39–52.
- [40] I. Debled-Rennesson, F. Feschet, and J. Rouyer-Degli, *Optimal blurred segments decomposition of noisy shapes in linear time*, Computers & Graphics **30** (2006), 30–36.
- [41] I. Debled-Rennesson, J.-L. Remy, and J. Rouyer-Degli, *Linear segmentation of discrete curves into blurred segments*, Discrete Applied Mathematics **151** (2005), 122–137.
- [42] I. Debled-Rennesson and J.-P. Réveilles, *A linear algorithm for segmentation of digital curves*, Internat. J. Pattern Recognition Artif. Intell. **9** (1995), 635–662.
- [43] V. Desoutter and N. Destainville, *Flip dynamics in three-dimensional random tilings*, J. Phys. A : Math. Gen. **38** (2005), 17–45.
- [44] D. P. Di Vincenzo and P. J. Steinhardt (eds.), *Quasicrystals, the state of the art*, World Scientific, 1991.
- [45] L. Dorst and A. Smeulders, *Decomposition of discrete curves into piecewise straight segments in linear time*, Contemp. math. **119** (1991), 169–195.

- [46] B. Durand, *Tilings and quasiperiodicity*, Theor. Comput. Sci. **221** (1999), 61–75.
- [47] ———, *De la logique aux pavages*, Theor. Comput. Sci. **281** (2002), 311–324.
- [48] F. Durand, *A characterization of substitutive sequences using return words*, Discrete Mathematics **179** (1998), 89–101.
- [49] H. Ei, *Some properties of invertible substitutions of rank d , and higher dimensional substitutions*, Osaka Journal of Mathematics **40** (2003), 543–562.
- [50] H. Ei and S. Ito, *Tilings from some non-irreducible, Pisot substitutions*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **7** (2005), 81–121.
- [51] C. Epifanio, M. Koskas, and F. Mignosi, *On a conjecture on bidimensional words*, Theoret. Comput. Sci. **299** (2003), 123–150.
- [52] Th. Fernique, *Pavages d'une polycellule*, 2004, Mémoire de DEA – Université Montpellier 2 et LIRMM.
- [53] ———, *Bidimensional Sturmian sequences and substitutions*, Developments in Language Theory (C. de Felice and A. Restivo, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 3572, Springer, 2005, pp. 236–247.
- [54] ———, *Substitutions on multi-dimensional sequences.*, WORDS (S. Brlek and C. Reutenauer, eds.), vol. 36, LaCIM, 2005, pp. 223–234.
- [55] ———, *Generalized substitutions and stepped surfaces*, 2006, Workshop on Words and Automata, St Petersburg, Russie.
- [56] ———, *Multidimensional Sturmian sequences and generalized substitutions*, Int. J. Found. Comput. Sci. **17** (2006), 575–600.
- [57] ———, *Local rules and stepped surfaces*, Theoret. Comput. Sci. **380** (2007), 317–329.
- [58] ———, *Generation and recognition of digital planes using multi-dimensional continued fractions*, 2008, à paraître dans proc. Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI'08.
- [59] J.-C. Fournier, *Pavages des figures planes sans trous par des dominos : fondement graphique de l'algorithme de thurston et parallélisation*, C. R. de l'Acad. des Sci. **320** (1995), 107–112.
- [60] J. Françon, J. M. Schramm, and M. Tajine, *Recognizing arithmetic straight lines and planes*, Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI'96, vol. 1176, 1996, pp. 141–150.
- [61] H. Freeman, *Boundary encoding and processing*, pp. 241–266, Academic, 1970.
- [62] M. Furukado, S. Ito, and E. A. Robinson, *Tilings associated with non-pisot matrices*, Annales de l'institut Fourier **56** (2006), 2391–2435.
- [63] E. Galois, *Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques*, Annales de Gergonne **19** (1828), 294–301.

- [64] B. Gaujal, E. Hyon, and A. Jean-Marie, *Optimal routing in two parallel queues with exponential service times*, Journal of Discrete Event Dynamic Systems **16** (2006), 71–107.
- [65] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and patterns*, Freeman, 1987.
- [66] F. Gähler and J. Rhyner, *Equivalence of the generalised grid and projection methods for the construction of quasiperiodic tiling*, J. Phys. A **19** (1986), 267–277.
- [67] Y. Gérard, I. Debled-Rennesson, and P. Zimmermann, *An elementary digital plane recognition algorithm*, Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Operations Research and Computer Science **151** (2005), 169–183.
- [68] E. O. Harriss, *On canonical substitution tilings*, 2004, Ph. D. Thesis, Imperial College, London.
- [69] S. Ito and M. Ohtsuki, *Modified Jacobi-Perron algorithm and generating Markov partitions for special hyperbolic toral automorphisms*, Tokyo J. Math **16** (1993), 441–472.
- [70] ———, *Parallelogram tilings and Jacobi-Perron algorithm*, Tokyo J. Math **17** (1994), 33–58.
- [71] D. Jamet, *On the language of standard discrete planes and surfaces*, International Workshop on Combinatorial Image Analysis IWCIA'04, 2004, pp. 232–247.
- [72] C. Janot, *Quasicrystals – a primer*, Oxford University Press, 1996.
- [73] R. Kenyon, *Tiling a polygone with parallelograms*, Algorithmica **9** (1993), 382–397.
- [74] ———, *The construction of self-similar tilings*, Geom. Func. Anal. **6** (1996), 471–488.
- [75] ———, *The planar dimer model with boundary : a survey*, 1998.
- [76] A. Y. Khinchin, *Continued fractions*, P. Noordhoff, Ltd., Groningen, 1963.
- [77] C. E. Kim, *Three-dimensional digital planes*, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence **6** (1984), 639–645.
- [78] C. E. Kim and I. Stojmenović, *On the recognition of digital planes in three dimensional space*, pattern Recognition Letters **12** (1991), 665–669.
- [79] R. Klette and A. Rosenfeld, *Digital straightness - a review*, Discrete Appl. Math. **139** (2004), 197–230.
- [80] P. Kramer and R. Neri, *On periodic and non-periodic space filling of \mathbb{E}^* obtained by projection*, Acta. Cryst. A **40** (1984), 580–587.
- [81] G. Lachaud, *Sails and Klein polyhedra*, Contemporary Mathematics **210** (1998), 373–385.

- [82] J. C. Lagarias, *Geodesic multidimensional continued fractions*, Proc. London Math. Soc. **69** (1994), 464–488.
- [83] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Cambridge University Press, 2002.
- [84] Y. Meyer, *Algebraic numbers and harmonic analysis*, vol. 2, North-Holland mathematical library, 1972.
- [85] M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.
- [86] M. Nivat, 1997, Invited talk at ICALP'97.
- [87] R. Penrose, *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*, Bull. Inst. Math. and its Appl. **10** (1974), 266–271.
- [88] M. L. V. Pitteway, *The relationship between euclid's algorithm and run length encoding*, Fundamental Algorithms for Computer Graphics, NATO ASI Series, vol. 17, Springer, 1985, pp. 105–111.
- [89] N. Priebe and B. Solomyak, *Characterization of planar pseudo-self-similar tilings*, Discrete Comput. Geom. **26** (2001), 289–306.
- [90] N. Priebe Frank, *Detecting combinatorial hierarchy in tilings using derived Voronoï tessellations*, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), 459–467.
- [91] ———, *A primer on substitution tilings of the euclidean plane*, 2007.
- [92] J. Propp, *Lattice structure for orientations of graphs*, 2002, arXiv :math/0209005.
- [93] N. Pytheas Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Lecture notes in mathematics, vol. 1794, Springer, 2002.
- [94] A. Quas and L. Q. Zamboni, *Periodicity and local complexity*, Theoret. Comput. Sci. **319** (2004), 229–240.
- [95] M. Queffélec, *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1987, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1294.
- [96] E. A. Robinson, *Symbolic dynamics and tilings of \mathbb{R}^d* , Proc. Symposia in Applied Mathematics **20** (2004), 81–119.
- [97] R. M. Robinson, *Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane*, Invent. Math. **12** (1971), 177–209.
- [98] J.-P. Réveillès, *Géométrie discrète, calculs en nombres entiers et algorithmique*, 1991, Thèse d'état Univ. Louis Pasteur, Strasbourg.
- [99] O. Salon, *Suites automatiques à multi-indices et algébricité*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math **305** (1987), 501–504.
- [100] J. W. Sander and R. Tijdeman, *The rectangle complexity of functions on lattices*, Theoret. Comput. Sci. **270** (2002), 857–863.

- [101] D. Schechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. W. Cahn, *Metallic phase with long-range orientational symmetry and no translational symmetry*, Phys. Rev. Let. **53** (1984), 1951–1953.
- [102] M. Schlottmann, *Generalized model sets and dynamical systems*, in Baake and Moody [10], 1999.
- [103] F. Schweiger, *Multidimensional continued fractions*, Oxford University Press, 2000.
- [104] M. Senechal, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, 1995.
- [105] B. Solomyak, *Dynamics of self-similar tilings*, Ergod. Th. and Dyn. Sys. **17** (1997), 695–738.
- [106] ———, *Pseudo-self-similar tilings in \mathbb{R}^d* , Zap. Nauchn. Sem. S.-Petersburg Otdel. mat. Inst. Steklov (POMI) **326** (2005), 198–213.
- [107] I. Stojmenović and R. Tosić, *Digitization schemes and the recognition of digital straight lines, hyperplanes and flats in arbitrary dimensions*, Vision Geometry, Contemporary Math. Series. **119** (1991), 197–212.
- [108] W. P. Thurston, *Groups, tilings and finite state automata*, Lectures notes distributed in conjunction with the Colloquium Series, in *AMS Colloquium lectures*, 1989.
- [109] A. Troesch, *Interprétation géométrique de l’algorithme d’Euclide et reconnaissance de segments*, Theoret. Comput. Sci. **115** (1993), 291–319.
- [110] J. Vittone and J.-M. Chassery, *Recognition of digital naive planes and polyhedrization*, Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI’00, vol. 1953, 2000, pp. 296–307.
- [111] L. Vuillon, *Combinatoire des motifs d’une suite sturmienne bidimensionnelle*, Theor. Comput. Sci. **209** (1998), 261–285.
- [112] H. Wang, *Proving theorems by pattern recognition II*, Bell Systems Tech. J. **40** (1961), 1–41.
- [113] Z.-X. Wen and Z.-Y. Wen, *Local isomorphisms of invertible substitutions*, C. R. Acad. Sci. Paris **318** (1994), 299–304.
- [114] L. D. Wu, *On the chain code of a line*, IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell. (PAMI) **4** (1982), 347–353.
- [115] S.-I. Yasutomi, *On Sturmian sequences which are invariant under some substitutions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

Résumé : Cette thèse propose une extension multidimensionnelle des liens entre mots sturmiens, fractions continues et reconnaissance de droite discrète. Les notions principales sont celles de substitution généralisée (ou application duale), de flip (une transformation élémentaire courante en mécanique statistique) et de fractions continues multidimensionnelles (algorithme de Brun). On montre notamment comment définir et calculer les développements en fraction continue de plans ou de surfaces discrets.

Mots-clefs : algorithme de Brun, applications duales, combinatoire des mots, flips, fractions continues, génération de plan discret, géométrie discrète, mécanique statistique, pavages, plans en escalier, quasi-cristaux, reconnaissance de plan discret, substitution, surfaces en escalier.

Abstract : This thesis provides a multi-dimensional extension of connections between Sturmian words, continued fractions and discrete line recognition. The main notions are generalized substitution (or dual map), flip (an elementary transformation commonly used in statistical mechanics) and multi-dimensional continued fractions (Brun's algorithm). In particular, we show how continued fraction expansions of discrete planes or surfaces can be defined and computed.

Keywords : Brun's algorithm, combinatorics of words, continued fractions, digital plane generation, digital plane recognition, discrete geometry, dual maps, flips, quasi-crystals, tilings, statistical mechanics, stepped planes, stepped surfaces, substitutions.