



# Métriser les pavages

Thomas FERNIQUE

Rapport de stage de MIM 1

réalisé au LIF<sup>1</sup> sous la direction

de Bruno DURAND<sup>2</sup> et Julien CERVELLE<sup>3</sup>

## Résumé

Pavages et automates cellulaires ont souvent été étudiés par des méthodes combinatoires. La topologie offre cependant une alternative intéressante à cette approche. Plusieurs distances, engendrant des topologies différentes, peuvent être envisagées. Durant ce stage, j'ai étudié les propriétés en termes de pavages et d'automates cellulaires d'une topologie récemment introduite.

---

1. Laboratoire d'Informatique Fondamentale, Centre de Mathématiques et Informatique, 39, rue Joliot-Curie - F-13453 Marseille Cedex 13

2. bdurand@cmi.univ-mrs.fr

3. cervelle@cmi.univ-mrs.fr

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Quelques notions sur les pavages</b>	<b>2</b>
1.1 Tuiles de Wang . . . . .	2
1.2 Contraintes locales . . . . .	2
1.3 Périodicité et quasipériodicité . . . . .	3
<b>2 Une métrique sur l'espace des configurations</b>	<b>5</b>
2.1 Distance de Cantor . . . . .	5
2.2 Distance-motif . . . . .	5
<b>3 Quotienter l'espace des configurations</b>	<b>7</b>
3.1 L'espace quotient . . . . .	7
3.2 Incomplétude . . . . .	7
3.3 Etude dans le complété . . . . .	8
<b>4 Points isolés</b>	<b>8</b>
4.1 Exemples et contre-exemples . . . . .	9
4.2 Configurations périodiques . . . . .	10
4.3 Dénombrabilité . . . . .	10
4.4 Le cas de la dimension 1 . . . . .	11
4.4.1 Configurations ultimement bi-périodiques . . . . .	11
4.4.2 Densité . . . . .	12
4.4.3 Caractérisation . . . . .	14
4.4.4 Séparabilité . . . . .	14
4.5 Le cas de la dimension 2 . . . . .	14
4.5.1 Configurations quasipériodiques . . . . .	14
4.5.2 Coupure par une droite . . . . .	15
4.5.3 Étoiles rationnelles . . . . .	16
4.5.4 Densité et caractérisation . . . . .	17
<b>5 Application à l'étude des automates cellulaires</b>	<b>17</b>
5.1 Automates cellulaires . . . . .	17
5.2 Compatibilité . . . . .	18
5.3 Continuité . . . . .	19
5.4 Théorème de Hedlund . . . . .	19
5.5 Classification . . . . .	20
<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>Références</b>	<b>21</b>

## Introduction

Les pavages ont tout d'abord été étudiés par les logiciens. Expriment naturellement certains problèmes de logique, leurs propriétés géométriques offrent souvent un cadre d'étude plus aisé. Ils ont d'ailleurs permis de prouver l'indécidabilité du *Entscheidungsproblem* de Hilbert pour certaines classes de formules booléennes (appelée classe de *Kahr*, et à partir de laquelle se déduit l'indécidabilité des huit autres classes indécidables (et ce sont les seules)), sans qu'aucune preuve s'en passant n'ait été depuis trouvée.

La décidabilité (ou plutôt l'indécidabilité) est une notion fondamentale du monde des pavages. En effet, outre le lien avec les problèmes de logique cités ci-dessus, de nombreux théorèmes sur les pavages, plus combinatoires, ont trait à des problèmes de décision. Ainsi *Berger* montre dans [Ber66] qu'il est indécidable de savoir si un ensemble de tuiles (les éléments constitutifs des pavages) pave ou non le plan. Une version plus forte de ce théorème stipule qu'on ne peut séparer récursivement les ensembles de tuiles pavant périodiquement le plan de ceux ne le pavant pas.

À défaut d'obtenir des résultats de décidabilité pour des classes générales de pavages, on peut s'intéresser à des sous-classes, comme les pavages périodiques, apériodiques ou *quasipériodiques* (une sorte d'intermédiaire que l'on définira par la suite). Certains résultats positifs ont pu être trouvés dans cette voie: B. Durand montre par exemple dans [Dur99] que tout ensemble de tuiles pavant le plan le pave quasipériodiquement.

Cependant l'expressivité des pavages est très grande: ils peuvent simuler une machine de Turing ou définir des fonctions au delà récursif ([Cer02]). Aussi n'est-il pas surprenant que nombre de propriétés concernant les pavages soient indécidables.

Les automates cellulaires sont en quelque sorte une version dynamique des pavages, et l'étude de ces deux modèles présente des points communs. Les automates évoluent au cours du temps selon des règles locales (qui sont les mêmes en tout point du plan). Ce sont des systèmes dynamiques discrets qui constituent un modèle de calcul puissant, et beaucoup de propriétés les concernant sont également indécidables (la nilpotence par exemple: l'automate atteint-il au bout d'un certain temps une configuration qui ne bouge plus?). En fait, l'évolution de ces systèmes, malgré la simplicité de leur description, peut être très complexe et imprévisible. C'est ce qui a motivé la recherche d'une classification des automates cellulaires selon leur comportement. Plusieurs classifications ont été introduites, certaines empiriques comme celle de S. Wolfram ([Wol86]), d'autres basées sur des propriétés topologiques formelles comme celle de P. Kurka ([Kur97]). Toutes celles étudiées se sont cependant révélées être indécidables.

La classification de P. Kurka a été étudiée avec différentes topologies, mais on restait limité par certaines propriétés des topologies employées, peu adaptées aux spécificités des automates. Par exemple on verra que la distance de Cantor, qui, pour comparer deux configurations (l'état du plan à un instant donné) d'automates compare des zones centrées sur une case particularisée, est sensible aux translations du plan, ce qui n'est pas le cas des automates. D'autres distances évitant cet écueil ont par contre le défaut de ne pas comparer des régions *finies* du plan, alors que les automates agissent de manière locale.

La distance dont il est question dans ce rapport a l'avantage de ne se définir qu'à partir de régions finies et délocalisées du plan: ceci offre une assez grande similitude avec les propriétés des automates, des pavages et de la classification, et laisse donc espérer une étude facilitée.

Ce rapport est articulé en cinq parties: introduction aux pavages rappelant les notions et définitions utiles; définition de la nouvelle topologie, après un bref rappel de la topologie de Cantor; définition du nouvel espace topologique et étude sa structure: complétude puis points isolés (ceci constituant le cœur de mon travail de stage); présentation de quelques résultats obtenus avec cette topologie sur les automates cellulaires.

# 1 Quelques notions sur les pavages

## 1.1 Tuiles de Wang

Historiquement, le premier modèle de pavage introduit a été le pavage par *tuiles colorées* ou *tuiles de Wang*. Ces tuiles sont des carrés dont les côtés sont colorés (Figure 1).

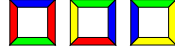


FIG. 1 – Tuiles de Wang

Le problème du pavage du plan consiste à se fixer un ensemble fini  $\tau$  de telles tuiles et à trouver une application de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\tau$  telle que deux tuiles adjacentes aient leurs côtés qui se touchent de même couleur (Figure 2). On peut utiliser à volonté chaque type de tuile, mais on ne peut ni les pivoter ni leur faire subir une symétrie (sinon il est possible de paver le plan avec une seule tuile).

Ces notions se formalisent facilement :

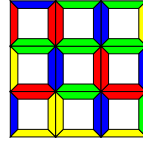


FIG. 2 – Une partie  $3 \times 3$  d'un pavage par tuiles de Wang

### Définition 1.1 (Tuile de Wang)

Une tuile de Wang est un quadruplet  $(h,b,g,d)$  d'éléments d'un ensemble fini  $\mathcal{C}$  de couleurs.

Les lettres  $h$ ,  $b$ ,  $g$  et  $d$  renvoyant respectivement aux côtés haut, bas, gauche et droit du dessin d'une tuile.

### Définition 1.2 (Pavage)

Un pavage du plan par un ensemble fini  $\tau \subset \mathcal{C}^4$  de tuiles de Wang est une application  $p = (p_h, p_b, p_g, p_d)$  de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\tau$  vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, \quad \begin{cases} p_h(x,y) = p_b(x,y+1) \\ p_d(x,y) = p_g(x+1,y) \end{cases}$$

## 1.2 Contraintes locales

Les tuiles de Wang fournissent un moyen simple de visualiser les pavages. Nous allons pourtant introduire ici un autre modèle de pavage, plus commode dans la mesure où les pavages ne dépendront plus de l'ensemble des tuiles qu'ils utilisent.

Introduit dans [Kar94], le pavage par *contraintes locales* est une application  $p$  de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\{0,1\}$  telle que la valeur en un point de  $\mathbb{Z}^2$  vérifie une contrainte fonction des valeurs des points voisins. On appellera *configuration* l'application  $p$ .

Plus formellement :

### Définition 1.3 (Configuration binaire)

Une configuration binaire est une application de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\{0,1\}$ .

### Définition 1.4 (Contrainte locale) On appelle :

- voisinage un ensemble fini  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  d'éléments de  $\mathbb{Z}^2$ ;
- contrainte  $V$ -locale une fonction  $f$  de  $\{0,1\}^n$  dans  $\{0,1\}$ .

On définit alors une contrainte locale par un couple  $(V, f)$  où  $V$  est un voisinage et  $f$  une contrainte  $V$ -locale.

**Définition 1.5 (Vérification d'une contrainte locale)**

Une configuration binaire  $c$  vérifie la contrainte locale  $((v_1, \dots, v_n), f)$  si :

$$\forall a \in \mathbb{Z}^2, \quad f(c(a + v_1), \dots, c(a + v_n)) = 0$$

Ainsi, si  $c$  est une configuration binaire et  $(V, f)$  une contrainte locale, un point  $a$  de  $\mathbb{Z}^2$  aura pour voisinage l'ensemble de points  $a + V$ . La contrainte locale sera vérifiée en ce point  $a$  si la fonction  $f$  est nulle sur son voisinage  $a + V$ .

Le problème du pavage du plan consiste alors à se fixer une contrainte locale  $(V, f)$  et à trouver une configuration binaire  $c$  vérifiant cette contrainte locale.

Ce modèle est en fait équivalent à celui des tuiles de Wang, c'est-à-dire que si on se donne un problème de pavage  $\mathcal{P}$  dans un des deux modèles, on peut en trouver une expression  $\mathcal{P}'$  dans l'autre modèle telle que d'une solution de  $\mathcal{P}'$  on déduise récursivement une solution de  $\mathcal{P}$ .

On peut par exemple donner une idée de la transformation de *tuile de Wang* vers *contraintes locales* : Si  $\tau$  est un ensemble de tuiles de Wang sur  $n$  couleurs, on code chaque tuile par un carré de  $\lceil \ln n \rceil + 2$  cases de côté ; sur chaque arête du carré (coins exclus : il reste  $\lceil \ln n \rceil$  cases) on code en binaire la couleur du côté de la tuile ; la contrainte locale a un voisinage carré de côté  $\lceil \ln n \rceil + 4$  (englobant un carré codant une tuile plus les arêtes adjacentes des carrés voisins) et vérifie si deux arêtes adjacentes codent bien la même couleur.

### 1.3 Périodicité et quasipériodicité

**Définition 1.6 (Motif)**

Un motif  $M$  est une application d'un domaine fini  $D \subset \mathbb{Z}^2$  dans  $\{0, 1\}$ .

On dit qu'un motif  $M$  de domaine  $D$  apparaît dans une configuration  $c$  s'il existe une position  $a \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\forall x \in D, c(a + x) = M(x)$ . On note  $M \prec c$  pour  $M$  apparaît dans  $c$ .

Moins formellement, en voyant une configuration  $c$  comme une grille de cases contenant 0 ou 1, un motif de  $c$  est une sous-partie finie de cette grille. La figure 3 illustre cette notion.

Dans la suite, on appellera *motif de taille  $n$*  un motif carré de  $n \times n$  cases.

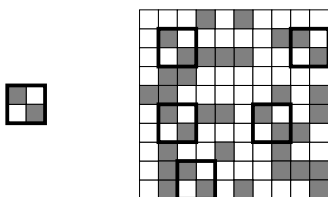


FIG. 3 – Apparitions d'un motif (de taille 2) dans une configuration

**Définition 1.7 (Configuration périodique)**

Une configuration  $c$  admet le vecteur  $p \in \mathbb{N}^2$  comme vecteur de périodicité si pour tout  $a \in \mathbb{Z}^2$ ,  $c(a + p) = c(a)$ .

Une configuration est périodique si elle admet 2 vecteurs de périodicité indépendants.

On peut voir une configuration périodique comme une grille régulière sur les noeuds de laquelle on aurait placé un même motif : on dira que ce motif *engendre* la configuration. On peut en fait toujours se ramener à un motif carré :

**Proposition 1.1** *Toute configuration périodique est engendrée par un motif carré.*

**Preuve.** Soit  $c$  une configuration périodique. Soient  $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$  et  $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$  deux vecteurs de périodicité.

Déterminons d'abord deux vecteurs de périodicité ayant les directions des axes. Le vecteur  $\vec{p}_y = x_2\vec{v}_1 - x_1\vec{v}_2$  a pour coordonnées  $(0, x_2y_1 - x_1y_2)$  qu'on note  $(0, p_y)$ ; le vecteur  $\vec{p}_x = y_2\vec{v}_1 - y_1\vec{v}_2$  a des coordonnées qu'on note  $(p_x, 0)$ . En utilisant successivement le fait que  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont deux vecteurs de périodicité on montre que  $\vec{p}_y$  est aussi vecteur de périodicité :

$$c(a + \vec{p}_y) = c(a + x_2\vec{v}_1 - x_1\vec{v}_2) = c(a - x_1\vec{v}_2) = c(a)$$

De même,  $\vec{p}_x$  est vecteur de périodicité.

On se ramène alors à des vecteurs de même norme en multipliant les deux vecteurs précédents par le plus petit multiple commun de  $p_x$  et  $p_y$  : on a obtenu deux vecteurs de périodicité  $(0, p)$  et  $(p, 0)$  *i.e.*  $c$  est engendrée par un motif carré de taille  $p$ .  $\square$

La figure 4 présente une configuration périodique obtenue à partir d'un motif s'appuyant sur les vecteurs  $(4, 1)$  et  $(1, -2)$ . Cette configuration s'obtient aussi par un motif carré de taille 9.

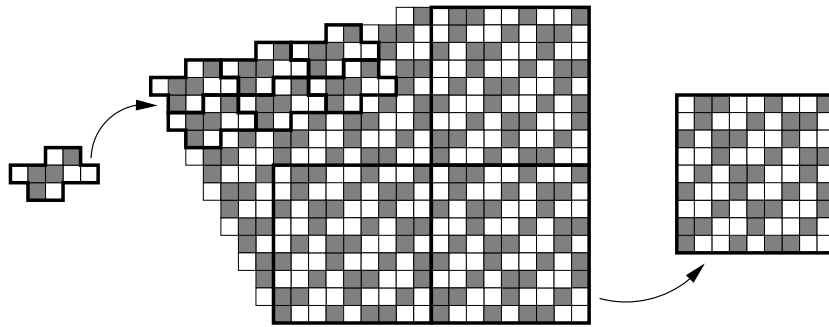


FIG. 4 – Une configuration engendrée par un motif quelconque l'est par un carré.

### Définition 1.8 (Configuration quasipériodique)

Une configuration  $c$  est quasipériodique si pour tout entier  $n$ , il existe un entier  $q_n$  tel que si un motif de taille  $n$  apparaît dans  $c$ , alors il apparaît aussi dans tout motif de taille  $q_n$  de  $c$ .

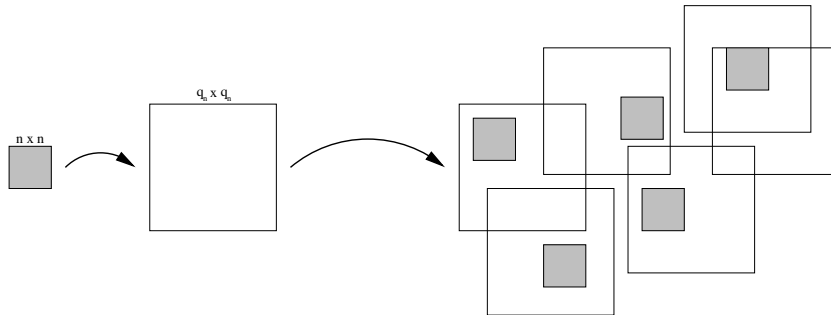


FIG. 5 – Configuration quasipériodique.

Le motif  $n \times n$  apparaît dans n'importe quelle fenêtre  $q_n \times q_n$ .

Une configuration quasipériodique voit donc chacun de ses motifs se répéter régulièrement. La quasipériodicité est une notion moins forte que la périodicité : toute configuration périodique de période  $p$  est aussi quasipériodique puisque tout motif de taille  $n$  apparaît dans une fenêtre de taille  $n + p$ . Il existe néanmoins des configurations quasipériodiques non périodiques : on parle de configurations strictement quasipériodiques.

## 2 Une métrique sur l'espace des configurations

L'étude topologique de l'espace des configurations, noté  $X$  dans la suite, dépend du choix même de la topologie. La plus couramment utilisée, et que nous allons rappeler dans un premier temps, est la topologie de Cantor.

### 2.1 Distance de Cantor

#### Définition 2.1 (Distance de Cantor)

On définit la distance de Cantor  $\mathbf{d}_{\mathbf{C}}(c, c')$  entre les configurations  $c$  et  $c'$  par :

$$\mathbf{d}_{\mathbf{C}}(c, c') = 2^{-\min\{\|a\| \mid c(a) \neq c'(a)\}}$$

avec, en dimension  $n$ ,  $\|a\| = \max |x_i|$  pour  $a = (x_1, \dots, x_n)$ .

La distance entre deux configurations est donc fonction de la taille de leur plus grand motif centré en 0 commun : elles sont à distance moindre que  $2^{-n}$  si elles coïncident sur un motif centré en 0 de taille  $2n - 1$ .

On peut remarquer que cette distance vérifie une inégalité plus forte que l'inégalité triangulaire : si  $c$ ,  $c'$  et  $c''$  sont trois configurations telles que  $c$  et  $c'$  (resp.  $c'$  et  $c''$ ) aient le même motif central de taille  $p$  (resp.  $q$ ), alors  $c$  et  $c''$  ont le même motif central de taille  $\min(p, q)$ . Ceci se traduit par l'inégalité, dite *ultra-métrique* :  $\mathbf{d}_{\mathbf{C}}(c, c'') \leq \max(\mathbf{d}_{\mathbf{C}}(c, c'), \mathbf{d}_{\mathbf{C}}(c', c''))$ . Ceci conduit à des propriétés assez inhabituelles : on vérifie par exemple que tout point d'une boule est centre de cette boule . . .

La figure 6 présente deux configurations de dimension 1 à distance  $2^{-7}$  l'une de l'autre : leurs motifs centraux (encadré en gras) entre les cases  $-6$  et  $6$  coïncident, mais ceux entre  $-7$  et  $7$  sont différents à cause de la case  $-7$ .

La figure 7 expose un exemple similaire en dimension 2 : les configurations sont à distance  $2^{-3}$  l'une de l'autre.

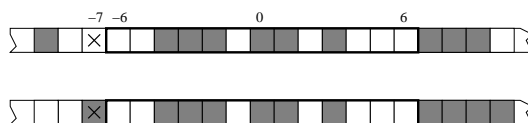


FIG. 6 – Deux configurations à distance de Cantor  $2^{-7}$

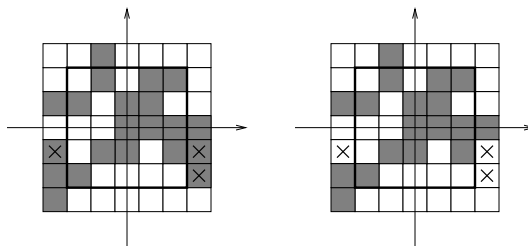


FIG. 7 – Deux configurations à distance de Cantor  $2^{-3}$

### 2.2 Distance-motif

Le principal défaut de la distance de Cantor est qu'elle donne un rôle particulier au centre de la configuration : deux configurations ne différant qu'en 0 sont à distance 1 bien qu'elles soient intuitivement semblables ; inversement deux configurations coïncidant sur un grand

motif central seront à faible distance, même si elles peuvent être très différentes sur les régions (infinies!) loin du centre. La distance que l'on va maintenant présenter est une sorte de "distance de Cantor généralisée" qui supprime le rôle particulier du centre.

Soient  $c$  et  $c'$  deux configurations. On notera :

- $c \prec_n c'$  si tout motif de taille  $n$  apparaissant dans  $c$  apparaît aussi dans  $c'$ ;
- $c \sim_n c'$  si  $c \prec_n c'$  et  $c' \prec_n c$ , c'est-à-dire si  $c$  et  $c'$  ont exactement les mêmes motifs de taille  $n$ ;
- $c \prec c'$  si tout motif fini apparaissant dans  $c$  apparaît aussi dans  $c'$ , c'est-à-dire:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $c \prec_n c'$ . On dit aussi que  $c$  est *extraite* de  $c'$ ;
- $c \sim c'$  si  $c \prec c'$  et  $c' \prec c$ , c'est-à-dire si  $c$  et  $c'$  ont exactement les mêmes motifs finis.

**Définition 2.2 (Pseudo-distance-motif)**

On définit la distance-motif  $\mathbf{d}_M$  entre deux configurations  $c$  et  $c'$  par :

$$\mathbf{d}_M(c, c') = \begin{cases} 0 & \text{si } c \sim c' \\ 2^{-n} & \text{où } n = \max(k \in \mathbb{N} \mid c \sim_k c') \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,  $\mathbf{d}_M(c, c') = 2^{-n}$  si  $c$  et  $c'$  ont exactement les mêmes motifs de taille  $n$ , et  $\mathbf{d}_M(c, c') = 0$  si  $c$  et  $c'$  ont exactement les mêmes motifs finis.

**Proposition 2.1**  $\mathbf{d}_M$  est une pseudo-distance, c'est-à-dire vérifie la symétrie et l'inégalité triangulaire.

*Preuve.*

- Symétrie: elle découle de celle de  $\sim_k$ .
- Inégalité triangulaire: soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois configurations telles que  $\mathbf{d}_M(x, y) = 2^{-p}$  et  $\mathbf{d}_M(y, z) = 2^{-q}$ , avec par exemple  $p < q$ .  
 $x$  et  $y$  ont les mêmes motifs de taille  $p$ ,  $y$  et  $z$  ont les mêmes motifs de taille  $q$ , *a fortiori* de taille  $p$ , d'où  $x$  et  $z$  ont les mêmes motifs de taille  $p$  et donc  $\mathbf{d}_M(x, z) \leq 2^{-p}$ .

□

On constate que cette pseudo-distance est, à l'instar de la distance de Cantor, ultramétrique.

La propriété de séparation n'est, par contre, pas vérifiée: deux configurations à distance nulle ne sont pas forcément égales.

Un exemple simple est le cas de deux configurations se déduisant l'une de l'autre par translation: elles ont clairement les mêmes motifs mais ne sont pas égales.

Mais ce n'est pas le seul cas, certaines configurations sont à distance nulle sans que l'une soit image de l'autre par une simple translation.

Considérons par exemple la configuration  $c$  de  $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  représentée figure 8 et ainsi construite: à gauche de la position 0 elle vaut 0, et à droite on écrit bout à bout tous les motifs finis de  $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  par ordre lexicographique. On parle de configuration *universelle*.

Soit maintenant  $c'$  définie comme  $c$  mais valant 1 à gauche de la position 0.  $c'$  est aussi universelle et donc  $\mathbf{d}_M(c, c') = 0$  (*i.e.*  $c \sim c'$ ), bien que  $c$  et  $c'$  soient distinctes (elles sont à distance de Cantor  $\frac{1}{2}$  par exemple).



FIG. 8 – Une configuration universelle (énumération lexicographique des motifs)

Cette distance ne particularise plus une case: elle n'est plus "centrée". Et si d'autres distances (non explicitées ici) partagent cette propriété, celle-ci a de plus l'avantage de se



définir à partir de motifs *finis*. Or les propriétés des pavages ou des automates cellulaires (définis dans la section 5) dépendent de ces motifs finis. Ainsi deux pavages translatés l'un par rapport à l'autre sont intuitivement "égaux" (obtenables par les mêmes tuiles, de la même façon . . .) ; parmi les pavages obtenables par un jeu de tuiles, les pavages quasipériodiques sont ceux ayant "le moins" de motifs (plus exactement ce sont les éléments minimaux pour la relation  $\prec$ ) ; et on verra qu'un automate traite de la même manière deux configurations qui ont les mêmes motifs finis.

### 3 Quotienter l'espace des configurations

#### 3.1 L'espace quotient

Dans le but d'avoir une vraie distance, et donc un espace métrique utilisable, nous allons quotienter l'espace  $X$  des configurations par la relation d'équivalence associée à la distance-motif :  $c \sim c' \Leftrightarrow \mathbf{d}_M(c, c') = 0$ . On obtient ainsi l'ensemble des classes d'équivalence par  $\sim$  que l'on note  $\dot{X}$ . Les éléments considérés sont donc du type  $\dot{c} = \{c' \mid c' \sim c\}$  : on ne distingue plus deux configurations ayant les mêmes motifs. On peut alors aussi voir un élément comme un ensemble (infini) de motifs finis. Cependant on verra que certains ensembles de motifs ne peuvent pas être associés à des configurations (dont ils seraient exactement les motifs).

#### 3.2 Incomplétude

Commençons par un résultat positif :

**Proposition 3.1** *Toute suite de  $\dot{X}$  admet une sous-suite de Cauchy.*

*Preuve.* Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de configurations.

Construisons d'abord par récurrence une suite décroissante d'ensembles infinis  $I_n$  telle que :

$$\forall i, j \in I_n \quad \mathbf{d}_M(c_i, c_j) \leq 2^{-n}$$

$I_0 = \mathbb{N}$  convient au rang 0 car deux configurations sont à distance au plus 1.

Supposons  $I_{n-1}$  construit. Il y a un nombre fini de motifs de taille  $n$  donc un nombre fini d'ensemble de motifs de taille  $n$ . Parmi l'infinité de configurations  $(c_i)_{i \in I_{n-1}}$ , il y en a donc un sous-ensemble infini ayant le même ensemble de motifs de taille  $n$  : on pose  $I_n$  ce sous-ensemble infini de  $I_{n-1}$ . Si  $i, j \in I_n$ ,  $c_i$  et  $c_j$  ont les mêmes motifs de taille  $n$  et sont donc à distance inférieure à  $2^{-n}$  l'une de l'autre.

Soit maintenant  $(c_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite extraite de  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la fonction strictement croissante  $\sigma : n \mapsto \min I_n + 1$ . Elle est de Cauchy puisque pour  $i > j \geq n$ ,  $c_{\sigma(i)}$  et  $c_{\sigma(j)}$  sont dans  $I_n$  donc  $\mathbf{d}_M(c_{\sigma(i)}, c_{\sigma(j)}) \leq 2^{-n}$ .  $\square$

Cependant cette propriété ne nous permet rien de dire quant à la complétude ou à la compacité de  $\dot{X}$ . Nous allons prouver maintenant que  $\dot{X}$  n'est pas complet.

Soit  $c_k$  la configuration de  $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  représentée figure 9(a) et définie par :

$$c_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Lemme 3.1**  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy de  $\dot{X}$  non convergente.

*Preuve.* Soit  $i > j \geq k$  : les motifs de taille  $k$  apparaissant dans  $c_i$  et  $c_j$  sont les mêmes et sont exactement ceux de la figure 9(b). D'où  $\mathbf{d}_M(c_i, c_j) \leq 2^{-k}$  ce qui prouve que  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy.

Supposons maintenant qu'elle converge vers une limite  $l \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ .

$\forall k, d(c_k, l) \leq 2^{-k}$ . En particulier, les motifs **01** et **10** apparaissent dans  $l$  (prendre  $k \geq 2$ ). Supposons qu'ils apparaissent respectivement aux positions  $i$  et  $j$  :  $l$  contient alors le motif **01...10** de taille  $j - i + 2$ . Par conséquent, ce motif apparaît aussi dans  $c_k$  pour  $k \geq j - i + 2$

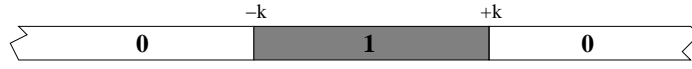
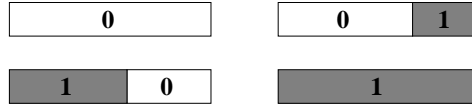
(a) la configuration  $c_k$ (b) Les motifs de  $c_k$ 

FIG. 9 – Une suite de Cauchy non convergente

ce qui est en contradiction avec le type de motifs apparaissant dans  $c_k$  (Figure 9(b)).  $\square$

On a donc construit une suite de Cauchy non convergente en dimension 1. Cet exemple s'adapte pour des dimensions supérieures en posant  $\tilde{c}(x_1, \dots, x_n) = c(x_1)$ . On en déduit immédiatement le résultat suivant :

**Théorème 3.1** *L'espace  $\dot{X}$  n'est pas complet.*

Et un résultat sur la compacité de  $\dot{X}$  :

**Corollaire 3.1** *L'espace  $\dot{X}$  n'est pas compact.*

*Preuve.* Si  $\dot{X}$  était compact, toute suite, en particulier toute suite de Cauchy, aurait une valeur d'adhérence. Or une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence converge.  $\dot{X}$  serait donc complet.  $\square$

### 3.3 Etude dans le complété

Pour remédier à l'incomplétude de  $\dot{X}$ , on peut définir son complété. Cette démarche *a priori* artificielle se défend dans la mesure où travailler sur un espace complet peut s'avérer plus simple et permettre de trouver des résultats applicables à  $\dot{X}$ .

Pour définir le complété de  $\dot{X}$ , nous allons d'abord considérer les éléments de  $\dot{X}$  non plus comme des ensembles de configurations à distance nulle les unes des autres, mais comme des ensembles (dénombrables) de motifs finis : les motifs de taille  $n \in \mathbb{N}$  communs à toutes les configurations de la classe d'équivalence.

Puis nous allons adjoindre à  $\dot{X}$  les limites de ses suites de Cauchy. Ces limites sont des ensembles de motifs qui, parfois, ne peuvent coexister dans une même configuration : c'est le cas des motifs de la limite  $l$  de la suite de Cauchy non convergente (dans  $\dot{X}$ ) vue dans le lemme 3.1. On obtient ainsi l'espace  $\dot{X}^c$ .

## 4 Points isolés

Une configuration  $c$  est isolée s'il existe un entier  $n$  tel que :  $c' \sim_n c \Rightarrow c' \sim c$ . Moins formellement, une configuration est isolée si toute configuration ayant exactement les mêmes motifs de taille  $n$  a exactement les mêmes motifs finis.

## 4.1 Exemples et contre-exemples

Un espace peut très bien ne pas avoir de points isolés, ou au contraire n'avoir que des points isolés (penser respectivement à  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{Z}$  avec la distance usuelle). Montrons que ce n'est pas le cas de  $\tilde{X}$  en construisant explicitement une configuration isolée et une non isolée, ce qui permettra en outre de se familiariser quelque peu avec cet espace.

Soit  $c_I$  la configuration de  $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  représentée sur la figure 10(a) et définie par :

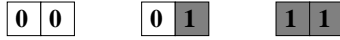
$$c_I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 4.1** *La configuration  $c_I$  est isolée dans une boule de rayon  $\frac{1}{4}$ .*

**Preuve.** La figure 10(b) représente les motifs de taille 2 de  $c_I$  : **00**, **01** et **11**. Soit  $c'$  une configuration telle que  $\mathbf{d}_M(c_I, c') \leq 2^{-2} = \frac{1}{4}$ . Les configurations  $c_I$  et  $c'$  ont donc exactement les mêmes motifs de taille 2. En particulier, le motif **01** apparaît dans  $c'$  à une certaine position  $i$ . S'il y avait un  $j < i$  tel que  $c'(j) = 1$ , alors le motif **10** apparaîtrait dans  $c'$  et donc dans  $c_I$ , ce qui n'est pas. D'où :  $\forall x < i, c'(x) = 0$ . Pour la même raison :  $\forall x > i, c'(x) = 1$ . La configuration  $c'$  est donc simplement la translatée de vecteur  $i$  de  $c_I$  : ces configurations ont les mêmes motifs finis, *i.e.*  $c_I \sim c'$ , ce qui termine la preuve.  $\square$



(a) configuration  $c_I$  isolée



(b) les motifs de taille 2 de  $c_I$

FIG. 10 – Une configuration isolée

Soit  $c_E$  et  $c_k$  les configurations de  $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  représentées sur les figures 11(a) et 11(b) et définies par :

$$c_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad c_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons vérifier que :  $\forall n, 0 < \mathbf{d}_M(c_E, c_k) \leq 2^{-k}$ , ce qui prouvera la proposition suivante :

**Proposition 4.2** *La configuration  $c_E$  n'est pas isolée.*

**Preuve.** Un motif de taille  $k$  de  $c_k$  ne peut contenir en même temps les deux occurrences de 1 :  $c_k$  et  $c_E$  ont donc pour motifs de taille  $k$  les motifs de la figure 11(c), et on en déduit  $\mathbf{d}_M(c_E, c_k) \leq 2^{-k}$ .

Par contre, le motif de taille  $k+1$  de  $c_k$  représenté figure 11(d) n'apparaît pas dans  $c_E$ , d'où  $\mathbf{d}_M(c_E, c_k) \geq 2^{-(k+1)} > 0$ .  $\square$

Ces deux exemples s'adaptent pour des dimensions supérieures en posant  $\tilde{c}(x_1, \dots, x_n) = c(x_1)$ .

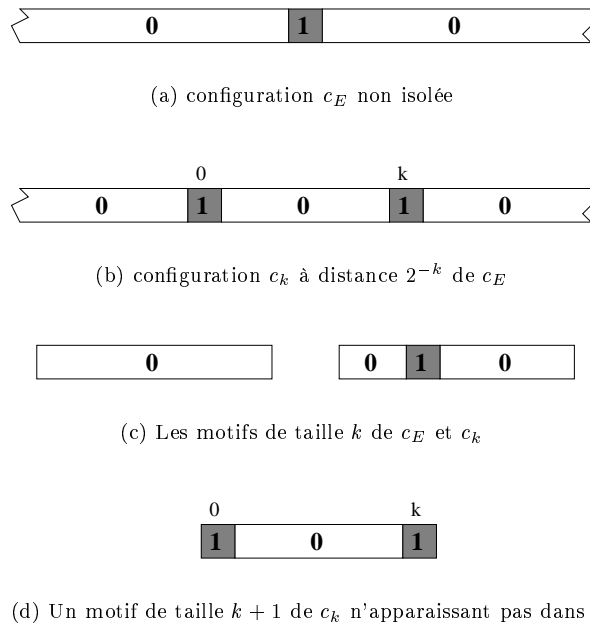


FIG. 11 – Une configuration non isolée

## 4.2 Configurations périodiques

Dans l'optique de déterminer quels sont les points isolés de  $\dot{X}$ , nous allons maintenant montrer que toutes les configurations périodiques sont isolées.

**Proposition 4.3** *Les configurations périodiques de  $\dot{X}$  sont isolées.*

*Preuve.* (Dans le cas de la dimension 2 par exemple.) Soit  $c$  périodique et  $P$  un motif carré de taille  $p$  l'engendrant. Soit  $c'$  telle que  $c \sim_{2p} c'$ .

Considérons le motif  $M$  de taille  $p$  en position  $(0,0)$  dans  $c$  : il apparaît dans  $c$ . Or par périodicité de  $c$ , à chaque fois qu'il apparaît en position  $(i,j)$ , le motif de même taille en position  $(i+p,j)$  est identique : le seul motif de  $c$  de taille  $2p \times p$  (i.e. le rectangle de largeur  $2p$  et de hauteur  $p$ ) telle que sa moitié gauche soit  $M$  a sa moitié droite qui est aussi  $M$ . Comme  $c$  et  $c'$  ont exactement les mêmes motifs de taille  $2p \times p$  (car  $c \sim_{2p} c'$ ), à la position  $(p,0)$  de  $c'$  ne peut apparaître que le motif  $M$ .

Pour les mêmes raisons,  $M$  apparaît aussi dans  $c'$  aux positions  $(0,p)$ ,  $(-p,0)$  et  $(0,-p)$ . Puis en raisonnant de proche en proche, on prouve que  $c'$  est constituée de copies de  $M$  sur une grille carrée de pas  $p$ , tout comme  $c$  :  $c'$  et  $c$  sont identiques à translation près, donc  $c \sim c'$ .  $\square$

Ceci nous donne donc un nombre dénombrable de points isolés. En effet il y a un nombre dénombrable de vecteurs de périodicité, et le nombre de configurations périodiques avec la même période est fini.

Pourtant, l'exemple vu en section 4.1 nous montre que les configurations périodiques ne sont pas les seules isolées. La section suivante va cependant prouver que l'ensemble des points isolés est dénombrable.

## 4.3 Dénombrabilité

**Proposition 4.4** *Les points isolés de  $\dot{X}$  sont dénombrables.*

*Preuve.* Un point isolé est entièrement caractérisé par l'ensemble fini de ses motifs d'une taille  $n$  fixée. Or il y a un nombre fini de motifs de taille  $n$ , donc d'ensembles de motifs de

taille  $n$ . La réunion de ces ensembles de motifs quand  $n$  décrit  $\mathbb{N}$  est dénombrable. Par suite, l'ensemble des points isolés l'est aussi.  $\square$

Ceci ne résout toujours pas le problème de caractérisation des points isolés. Examinons d'abord le cas de la dimension 1, plus simple, avant de passer à des dimensions supérieures.

#### 4.4 Le cas de la dimension 1

En dimension 1, on peut voir une configuration comme une suite bi-infinie et utiliser des notations usuelles :

- $MN$  est la concaténation des motifs  $M$  et  $N$ ;
- $M^k$  est le motif constitué de  $k$  copies du motif  $M$  mise bout à bout;
- ${}^\omega P^\omega$  est le mot bi-infini constitué de copies du motif  $P$  mises bout à bout;
- ${}^\omega AB^\omega$  est le mot bi-infini obtenu en collant bout à bout au motif  $AB$ , à droite une infinité de copies du motif  $B$ , à gauche une infinité de copies du motif  $A$ ;
- $|M|$  désigne la taille (ou longueur) du motif  $M$ .

##### 4.4.1 Configurations ultimement bi-périodiques

Nous allons ici introduire un type important de configuration isolée puisqu'on montrera par la suite que toute configuration isolée est soit de ce type, soit périodique.

##### Définition 4.1 (Configuration ultimement bi-périodique)

Une configuration  $c$  sera dite ultimement bi-périodique s'il existe un quadruplet  $(k_g, p_g, k_d, p_d)$  de  $\mathbb{N}^4$  tel que :

$$\begin{cases} \forall x \leq k_g, & c(x - p_g) = c(x) \\ \forall x \geq k_d, & c(x + p_d) = c(x) \end{cases}$$

On parlera de période et de pré-période gauches (resp. droites) pour  $p_g$  et  $k_g$  (resp.  $p_d$  et  $k_d$ ). Une telle configuration peut s'écrire  ${}^\omega GMD^\omega$  avec  $M$  apparaissant entre les indices  $k_g$  et  $k_d$ ,  $|G| = p_g$  et  $|D| = p_d$ .

Dans la suite, nous aurons besoin du lemme suivant :

##### Lemme 4.1

Si  $G$  et  $D$  sont deux motifs tels que  ${}^\omega G^\omega \prec {}^\omega D^\omega$ , alors  ${}^\omega G^\omega \sim {}^\omega D^\omega$ .

**Preuve.** Considérons un motif  $N$  de  ${}^\omega D^\omega$  et montrons qu'il apparaît dans  ${}^\omega G^\omega$  : ceci prouvera  ${}^\omega D^\omega \prec {}^\omega G^\omega$  donc  ${}^\omega G^\omega \sim {}^\omega D^\omega$ .  $N$  apparaît dans tout motif de  ${}^\omega D^\omega$  de taille  $|N| + |D|$ . Si maintenant  $M$  est un motif de  ${}^\omega G^\omega$  de cette taille, comme  ${}^\omega G^\omega \prec {}^\omega D^\omega$ , il apparaît dans  ${}^\omega D^\omega$ , et sa taille assure  $N \prec M$  donc  $N \prec {}^\omega G^\omega$ .  $\square$

Ce lemme est en fait un cas particulier du théorème présenté dans [Dur99], selon lequel les configurations quasipériodiques sont exactement les éléments minimaux pour la relation  $\prec$  (Ici c'est la quasipériodicité de  ${}^\omega D^\omega$  qui sert).

Dans la proposition suivante nous allons plutôt utiliser la contraposée de ce lemme : si  ${}^\omega G^\omega \approx {}^\omega D^\omega$ , alors on peut trouver un motif de l'un n'apparaissant pas dans l'autre et réciproquement.

##### Proposition 4.5

Si  $G$ ,  $M$  et  $D$  sont trois motifs finis tels que  ${}^\omega G^\omega \approx {}^\omega D^\omega$ , alors  ${}^\omega GMD^\omega$  est une configuration isolée de  $\check{X}$ .

**Preuve.** Soit  $c = {}^\omega GMD^\omega$ . Comme  ${}^\omega G^\omega \approx {}^\omega D^\omega$ , il existe d'après le lemme 4.1 un motif de  ${}^\omega D^\omega$  n'apparaissant pas dans  ${}^\omega G^\omega$ . Quitte à agrandir ce motif, on peut supposer qu'il s'écrit  $D^k$ .

Soit  $b$  tel que  $|D^b| \geq |D^k| + |M| + |D|$ . Si on considère un motif de  $c$  s'écrivant  $D^b I$  avec  $|I| = |D|$ , alors  $I = D$ . En effet, le préfixe  $D^k$  de  $D^b I$  ne peut apparaître dans  ${}^\omega G$  : son

extrémité droite est donc dans  $MD^\omega$ . Par choix de  $b$ , le suffixe  $DI$  de  $D^bI$  ne peut apparaître que dans  $D^\omega$  : on en déduit  $I = D$ .

On montre symétriquement qu'il existe un entier  $a$  tel que si un motif  $IG^a$  avec  $|I| = |G|$  apparaît dans  $c$ , alors  $I = G$ .

Soit maintenant  $l = |G^aMD^b|$  et  $c'$  une configuration telle que  $c' \sim_l c$ . Le motif  $G^aMD^b$  apparaît dans  $c'$ . Soit l'hypothèse de récurrence  $(R_n)$  au rang  $n$ : ce motif de  $c'$  ne peut se prolonger qu'en  $G^{a+n}MD^{b+n}$ .

$(R_0)$  est clairement vraie vu le choix de  $\mathbf{d}_M(c, c')$ .

Supposons  $(R_n)$  vraie. Soit  $I$  le motif de taille  $|D|$  à droite de  $G^{a+n}MD^{b+n}$ .  $|D^bI| \leq |G^aMD^b|$  donc  $D^bI$  apparaît dans  $c$ . On sait qu'alors  $I = D$ . De même, le motif de taille  $|G|$  à gauche de  $G^{a+n}MD^{b+n}$  est un  $G$ :  $(R_{n+1})$  est acquise.

Par récurrence,  $c' = {}^\omega GMD^\omega$ , i.e.  $c' \sim c$ .  $\square$

On a en fait montré une propriété plus forte: si une configuration est suffisamment proche de  ${}^\omega GMD^\omega$  (où  ${}^\omega G^\omega \approx {}^\omega D^\omega$ ), alors elle s'écrit elle-même  ${}^\omega GMD^\omega$ . La classe d'équivalence de  ${}^\omega GMD^\omega$  est donc restreinte à ses translatées.

Avec  $G = 0$ ,  $M = 01$  et  $D = 1$  on retrouve l'exemple donné en 4.1.

#### 4.4.2 Densité

Considérons l'ensemble  $\mathcal{J}$  des configurations de dimension 1 s'écrivant soit  ${}^\omega P^\omega$ , soit  ${}^\omega GMD^\omega$  avec  ${}^\omega G^\omega \approx {}^\omega D^\omega$ . On peut bien parler de cet ensemble car les éléments des classes d'équivalence de  ${}^\omega P^\omega$  et de  ${}^\omega GMD^\omega$  (avec  ${}^\omega G^\omega \approx {}^\omega D^\omega$ ) sont identiques à translation près (il n'existe pas de configuration à distance nulle ne pouvant se mettre sous cette forme). On a alors le lemme suivant :

**Lemme 4.2** *L'ensemble  $\mathcal{J}$  est dense dans  $\dot{X}$ .*

*Preuve.* Soient  $c \in \dot{X}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Nous allons construire  $c_k \in \mathcal{J}$  telle que  $c_k \sim_k c$ .

Les motifs de taille  $k$  apparaissant dans  $c$  sont en nombre fini: il existe donc un motif fini  $M$  dans  $c$  qui les contient tous. On choisit  $M$  de taille minimale. Soit  $i$  et  $j$  les positions des bords gauche et droit de  $M$ .

Deux cas de figure se présentent :

1. Il existe un motif de taille  $k$  apparaissant à droite *et* à gauche de  $M$ , respectivement aux indices  $a \leq i$  et  $b \geq j - k$  (Figure 12(a)). Soit alors  $P$  le motif entre les indices  $a$  et  $b$ . Posons  $c_k = {}^\omega P^\omega$ .

Considérons alors un motif de taille  $k$  apparaissant dans  $c_k$ . Soit il apparaît dans  $P$  auquel cas il apparaît clairement dans  $c$  (car  $P \prec c$ ), soit il est à cheval sur deux motifs  $P$  consécutifs: par périodicité il est alors identique à un motif entre les positions  $b - k$  et  $b$ , lequel apparaît dans  $c$  (Figure 12(b)). Tout motif de taille  $k$  de  $c_k$  apparaît donc dans  $c$ .

Réciproquement, tout motif de taille  $k$  de  $c$  apparaît dans  $c_k$  par choix de  $M$ . D'où  $c_k \sim_k c$ .

Enfin,  $c_k$  est bien dans  $\mathcal{J}$ .

2. Aucun motif de taille  $k$  n'apparaît à gauche *et* à droite de  $M$ . Considérons alors le motif de taille  $k$  immédiatement à droite de  $M$ . Par choix de  $M$ , ce motif apparaît quelque part dans  $M$ , mettons en position  $d$  avec  $i \leq d \leq j - k$ . Soit  $D$  le sous-motif de  $M$  entre les indices  $d$  et  $j$  (Figure 12(c)).

On définit alors la partie droite de  $c_k$  (c'est-à-dire  $c_k(x)$  pour  $x \geq j$ ) en collant à droite de  $M$  des copies de  $D$  (Figure 12(d)).

On construit  $c_k$  de manière symétrique à gauche:  $c_k = {}^\omega GMD^\omega$  (Figure 12(e)).

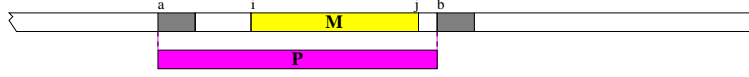
Considérons alors un motif de taille  $k$  de  $c_k$ , par exemple à droite de  $M$ :

- S'il apparaît dans un motif  $D$ : comme  $D \prec M \prec c$ , il apparaît dans  $c$ .
- Sinon, il est à cheval sur deux motifs  $D$  consécutifs: par périodicité il est alors identique à un motif à cheval sur  $M$  et  $D$ , lequel apparaît dans  $c$  (Figure 12(d)).

Tout motif de taille  $k$  de  $c_k$  apparaît donc dans  $c$ . La réciproque découle du choix de  $M$ . D'où  $c_k \sim_k c$ .

Montrons enfin que  $c_k \in \mathcal{J}$ , c'est-à-dire que  ${}^\omega G^\omega \approx {}^\omega D^\omega$ . Considérons le motif  $B_D$  de taille  $k$  en position  $j - k$ , suffixe de  $M$  et de  $D$  (Figure 12(f)). Il ne peut apparaître autre part dans  $M$ , sinon il y aurait une contradiction avec la minimalité de  $M$ . En particulier, comme  $G$  apparaît dans  $M$  (en position  $i$ ),  $B_D$  n'apparaît pas dans  $G$ . Par ailleurs, il ne peut apparaître entre les indices  $i - k$  et  $i$ , sinon cela voudrait dire qu'il apparaît à gauche et à droite de  $M$  et on serait dans le cas périodique; il n'apparaît donc pas à cheval sur deux  $G$ . On en déduit qu'il n'apparaît pas dans  ${}^\omega G^\omega$  et donc que  ${}^\omega G^\omega \approx {}^\omega D^\omega$ .

□



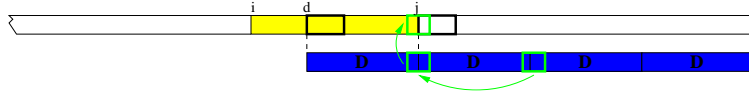
(a) si un même motif encadre  $M$ ...



(b) ... on approche par une configuration périodique.



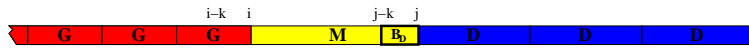
(c) Sinon, on cherche dans  $M$  une occurrence du motif à droite de  $M$ ,



(d) on approche à droite en périodisant,



(e) on fait de même à gauche,



(f) et on a approché par une configuration ultimement bi-périodique.

FIG. 12 –  $\mathcal{J}$  est dense dans  $\dot{X}$

Les propositions 4.3 et 4.5 montrent de plus que les configurations de  $\mathcal{J}$  sont isolées, et on déduit immédiatement du lemme 4.2 le théorème suivant :

**Théorème 4.1** *Les points isolés de  $\dot{X}$  sont partout denses.*

### 4.4.3 Caractérisation

Le lemme 4.2 nous permet aussi de caractériser entièrement les points isolés de  $\dot{X}$  :

**Théorème 4.2** *L'ensemble  $\mathcal{J}$  est exactement l'ensemble des points isolés de  $\dot{X}$ .*

*Preuve.* On a vu que les points de  $\mathcal{J}$  sont tous isolés. Réciproquement, soit  $c$  une configuration isolée:  $\exists n \in \mathbb{N} \mid c \sim_n c' \Rightarrow c \sim c'$ . La densité de  $\mathcal{J}$  permet de choisir  $c' \in \mathcal{J}$  tel que  $c \sim_n c'$ : on en déduit  $c \in \mathcal{J}$ .  $\square$

Il y a donc deux types de configurations isolées :

- ${}^\omega P^\omega$ , où  $P$  est un motif quelconque;
- ${}^\omega GMD^\omega$ , où  $G$  et  $D$  sont deux motifs tels que  ${}^\omega G^\omega \approx {}^\omega D^\omega$ .

### 4.4.4 Séparabilité

On peut au passage en déduire un nouveau résultat sur  $\dot{X}$ : c'est un espace *séparable*. En effet, l'ensemble des points isolés est dénombrable et dense dans  $\dot{X}$ .

La connaissance de cet ensemble dense peut éventuellement simplifier l'étude de fonction continues (comme les automates cellulaires que nous verrons par la suite) sur  $\dot{X}$ : il suffit d'observer leur comportement sur les points isolés, relativement simples, et d'utiliser la densité et la continuité pour passer à la limite et obtenir des propriétés pour tout point.

## 4.5 Le cas de la dimension 2

Le cas de la dimension 2 est plus complexe, et n'a pas été résolu dans le cadre de ce stage malgré mes efforts. Cette section propose néanmoins quelques résultats partiels.

### 4.5.1 Configurations quasipériodiques

Alors qu'en dimension 1, le caractère isolé d'une configuration était lié à sa périodicité (ou bi-périodicité), d'autres types de points isolés existent en dimension 2. En effet, certaines configurations *strictement quasipériodique* sont isolées.

Dans [DLS01], il est montré que le *red-blue pattern*, un avatar du pavage par tuiles de Robinson (voir par exemple [Cer02] pour une description de ces tuiles), est *finitely enforceable*, c'est-à-dire qu'à condition de rajouter quelques informations sur les bords des tuiles, on obtient un pavage tel que si un pavage quelconque a exactement les mêmes motifs d'une certaine taille  $N$  ( $N = 2$  en l'occurrence), alors il a exactement les mêmes motifs de n'importe quelle taille finie. Ceci correspond en fait exactement à la définition d'un point isolé pour la métrique issue de la distance-motif.

La figure 13 présente les étapes de construction d'une portion de ce pavage: les carrés sont de plus en plus grands et alternent le rouge et le bleu. Ce pavage est autosimilaire. On s'aperçoit assez facilement qu'il est apériodique mais quasipériodique, *i.e.* strictement quasipériodique.

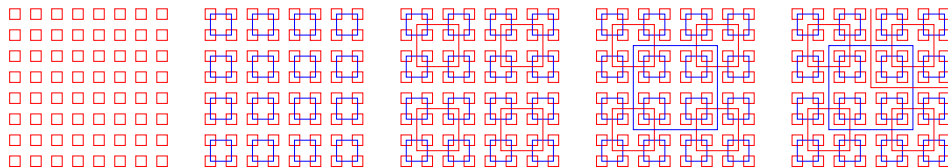


FIG. 13 – Niveaux successifs du red-blue pattern

Pourtant, les configurations quasipériodiques ne sont pas toutes isolées. Toujours dans [DLS01], un ensemble de tuile de Wang particulier est construit: tout pavage construit avec



ces tuiles est tel que chacun de ses motifs de taille  $n$  a une complexité de Kolmogorov de taille  $n$  (c'est-à-dire que le plus petit programme pouvant décrire ce motif est de taille  $n$ ). Or tout ensemble de tuiles qui pave le plan le pave aussi de manière quasipériodique ([Dur99]) : il existe donc un pavage quasipériodique “compliqué”. Ce pavage n'est pas isolé. En effet, s'il était isolé il suffirait de connaître ses motifs de taille  $n$  pour un certain  $n$  pour connaître tous ses motifs finis ; or un programme de taille fixe peut très bien décrire tous ces motifs de taille  $n$ , et donc tous les motifs finis du pavage : pour un motif suffisamment grand, cela contredirait sa complexité descriptive.

Ces deux exemples mettent d'ores et déjà en évidence un problème qui ne se posait pas en dimension 1. Il n'est pas *a priori* facile de trouver une caractérisation simple des configurations quasipériodiques isolées (ou non).

#### 4.5.2 Coupure par une droite

Alors qu'en dimension 1 on ne peut avoir que deux régions connexes non bornées (la “gauche” et la “droite”), les dimensions supérieures laissent beaucoup plus de latitude. Commençons par examiner le cas d'un partage du plan par une droite avant de passer au cas de plusieurs droites.

La figure 14 montre le principe de partage du plan par deux configurations  $c$  et  $c'$  : on fixe une droite  $\mathcal{D}$  (en rouge) qui les sépare. On parlera de *coupure* de  $c$  et  $c'$  par  $\mathcal{D}$ .

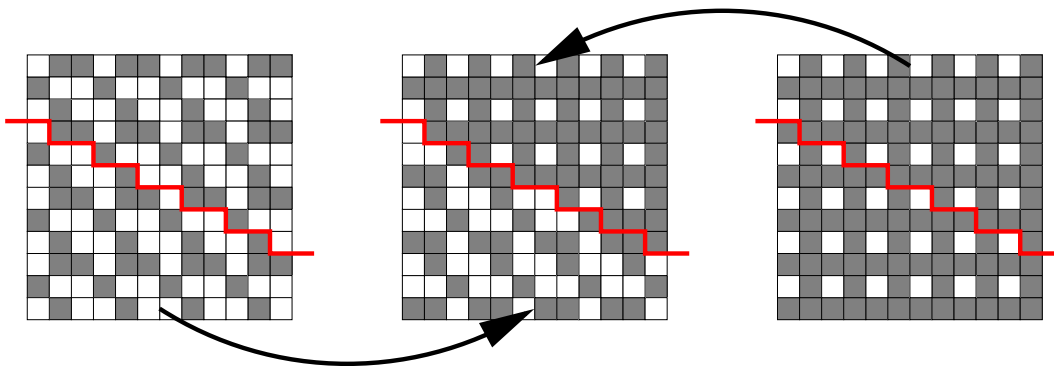


FIG. 14 – Coupure de deux configurations par une droite.

Nous allons chercher à quelles conditions sur  $c$ ,  $c'$  et  $\mathcal{D}$  cette coupure est une configuration isolée.

#### Proposition 4.6

Si  $c$  et  $c'$  sont périodiques avec  $c \approx c'$  et si  $\mathcal{D}$  a une pente rationnelle, alors la coupure de  $c$  et  $c'$  par  $\mathcal{D}$  est une configuration isolée.

**Preuve.** Appelons  $x$  la coupure de  $c$  et  $c'$  par  $\mathcal{D}$ . Soit  $\frac{p}{q}$  la pente de  $\mathcal{D}$  (qu'on supposera définie). Soient  $P$  et  $P'$  deux motifs carrés engendrant respectivement  $c$  et  $c'$ . On peut supposer, quitte à les agrandir, qu'ils ont la même taille  $r$ .

Considérons une configuration  $y$  suffisamment proche de  $x$  pour avoir les mêmes motifs de taille double de celui représenté figure 15(a) (à distance  $2^{-2(r+q+r+p)}$  par exemple). Le motif de la figure 15(c) apparaît dans  $x$ . Dans  $x$ , tous les motifs rectangulaires de taille  $2r \times r$  dont le carré gauche est  $P'$  (figure 15(b)) ne peuvent apparaître que dans le demi-plan de  $x$  correspondant à la configuration  $c'$  (sinon, par périodicité on aurait  $c \sim c'$ ). Donc le motif carré de droite (le point d'interrogation sur la figure 15(b)) est  $P'$ . La distance entre  $x$  et  $y$  est suffisamment petite pour qu'elles aient les mêmes motifs rectangulaires de taille  $2r \times r$  : on en déduit l'apparition du motif  $P'$  représentée figure 15(c). En itérant et en procédant de même pour  $P$ , on sait que la bande bi-infinie de la figure 15(d) apparaît dans  $y$ . On passe

alors à la bande juste au dessus (figure 15(e)) en utilisant le fait que  $x$  et  $y$  ont les mêmes motifs de taille double de celui de la figure 15(a). En itérant, on montre que  $y$  est une coupure de  $c$  et  $c'$  par une droite de pente  $\frac{p}{q}$ , donc une translatée de  $x$ . En particulier  $x \sim y$ .  $\square$

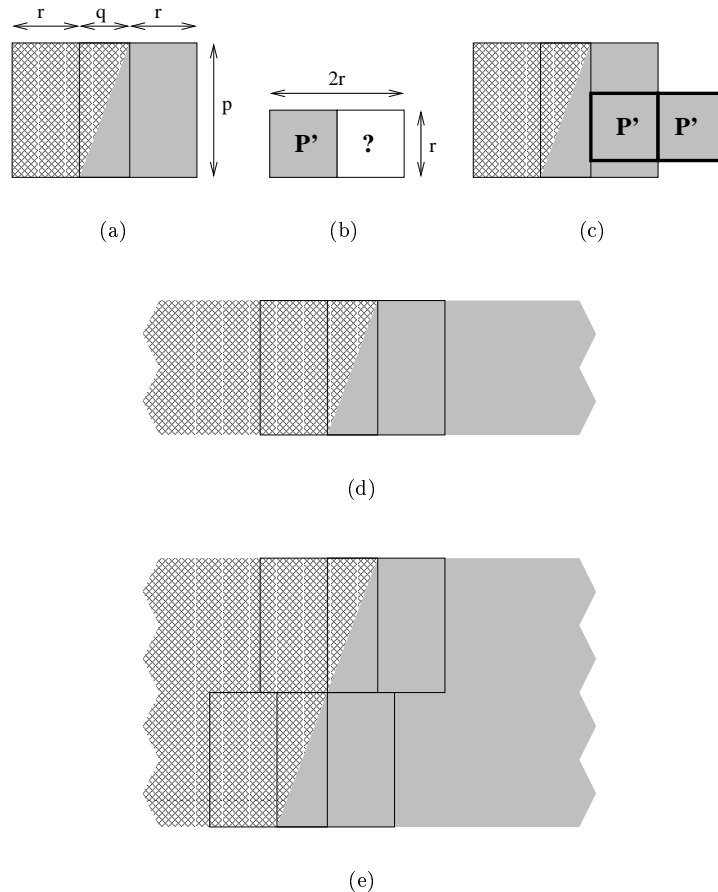


FIG. 15 – Coupure rationnelle de deux configurations périodiques.

La rationalité de la pente de  $\mathcal{D}$  est bien utilisée dans la preuve, mais on peut se demander si elle est nécessaire. La réponse est oui, comme va le montrer l'exemple suivant.

Soit  $x$  la coupure par une droite de pente  $\alpha$  irrationnelle de la configuration nulle et de la configuration valant 1 partout.

Construisons une configuration  $x_n$  telle que  $0 < \mathbf{d}_M(x_n, x) \leq 2^{-n}$ . On va en fait procéder comme dans le lemme 4.2 : on peut en effet raisonner comme en dimension 1 le long de la droite  $\mathcal{D}$ . Les motifs de taille  $n$  sont en nombre fini. Si on en trouve deux identiques de part et d'autre des autres (Figure 16(a)), on construit  $x_n$  coupure rationnelle (Figure 16(b)). Sinon, on périodise différemment selon le côté et on construit  $x_n$  telle que  $x_n \approx x$  (Figures 16(c) et 16(d)).  $x$  n'est donc pas isolée.

### 4.5.3 Étoiles rationnelles

On a vu dans la section précédente que les coupures de configurations périodiques distinctes par droite à pente rationnelle étaient isolées. Il est cependant restrictif de ne couper que des configurations *périodiques* : qu'en est-il pour des configurations isolées?

Par ailleurs, pourquoi ne couper que par une seule droite? On peut concevoir des configurations où, par exemple, trois demi-droites issues d'un même point partagent le plan en trois

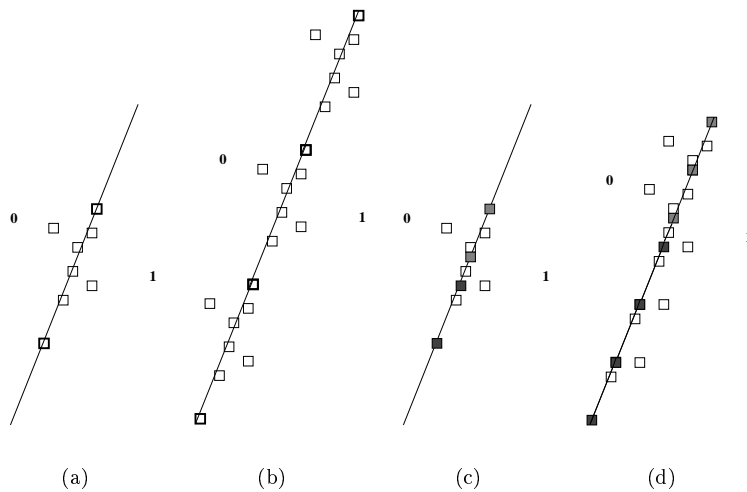


FIG. 16 – *Coupure irrationnelle non isolée.*

régions (non bornées) “remplies” par trois configurations périodiques distinctes. Plus généralement, appelons *étoile rationnelle* la configuration ainsi obtenue: un nombre fini de droites à pentes rationnelles partagent le plan en régions dont les non bornées sont “remplies” par des configurations périodiques deux à deux distinctes (Figure 17); une telle configuration est-elle isolée?

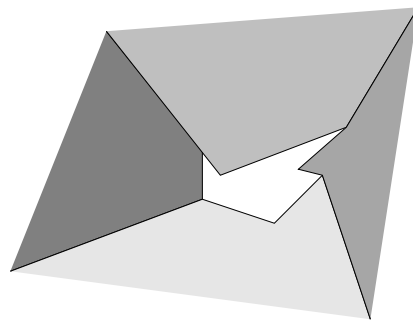


FIG. 17 – *Étoile rationnelle.*  
*Les régions non bornées proviennent de configurations périodiques.*

#### 4.5.4 Densité et caractérisation

En dimension 1, nous avons montré que les points isolés étaient partout denses, ce qui a aussi permis de les caractériser. En dimension 2, la question de la densité des points isolés reste non résolue ici. Nous n’avons pas pu non plus caractériser de manière satisfaisante ces points isolés: nous avons cités certains exemples comme les étoiles rationnelles (sans tout démontrer), et il reste à savoir si ce sont les seuls points isolés ou si cet ensemble est plus vaste.

## 5 Application à l’étude des automates cellulaires

### 5.1 Automates cellulaires

Les automates cellulaires ont été introduits vers la fin des années quarantes par *John Von Neumann* et *Stanislaw Ulam*. Ils constituent un modèle de calcul puissant et sont aussi

utilisés pour des modélisations discrètes de systèmes dynamiques variés : physique des fluides, démographie, trafic routier, organismes vivants . . .

Donnons-en une définition formelle :

**Définition 5.1 (Automate cellulaire)**

Un automate cellulaire est un quadruplet  $(S, d, V, \delta)$  où :

- $S$  est un ensemble fini appelé ensemble des états de l'automate ;
- $d \in \mathbb{N}$  est la dimension de l'automate ;
- $V$  est un ensemble fini  $\{v_1, \dots, v_q\}$  de vecteurs de  $\mathbb{Z}^d$  appelé voisinage de l'automate ;
- $\delta$  est une fonction de  $S^q$  dans  $S$  appelée fonction de transition de l'automate.

On définit aussi la notion intuitive suivante :

**Définition 5.2 (Rayon d'un automate cellulaire)**

Le rayon d'un automate cellulaire est le plus grand des module des vecteurs de son voisinage.

On prendra sans perte de généralité  $S = \{0, 1\}$  et on se restreindra aux dimensions 1 ou 2, suffisamment représentatives et plus visualisables.

Un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  agit donc localement sur une configuration binaire  $c$  : l'état d'une cellule  $a \in \mathbb{Z}^d$  à l'instant  $t + 1$  est calculé par la fonction de transition  $\delta$  à partir des états des cellules voisines  $a + V$  à l'instant  $t$ . On notera  $\mathcal{A}(c)$  la configuration obtenue en appliquant  $\mathcal{A}$  à  $c$ .

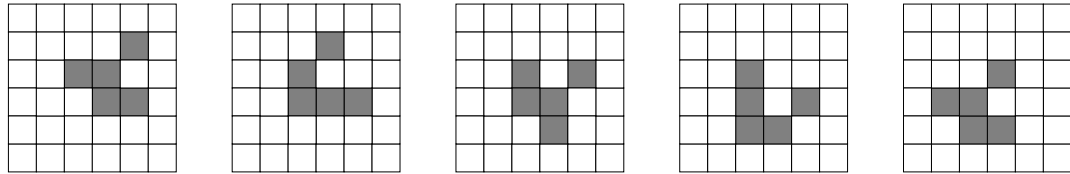


FIG. 18 – Quelques étapes d'un glisseur du jeu de la vie 2333.

La figure 18 représente quelques transformation d'une configuration sous l'action de l'automate cellulaire du *jeu de la vie* 2333, de *J. H. Conway*. Les cellules sont soit vivantes (noires) soit vides (blanche). Leur voisinage est constitué des 8 cellules qui les entourent. Les transitions suivent les règles : une cellule vivante survit si elle a 2 ou 3 voisines vivantes, meurt d'étouffement si elle en a plus ou d'isolement si elle en a moins ; une cellule vide devient vivante si elle a exactement 3 voisines vivantes.

## 5.2 Compatibilité

Les automates cellulaires présentés, nous allons les examiner comme des fonctions agissant sur l'espace  $\dot{X}$  des classes de configurations modulo  $\sim$ .

La première chose à vérifier est de vérifier la compatibilité avec la relation  $\sim$  :

**Proposition 5.1** *La relation  $\sim$  est compatible avec les automates cellulaires, c'est-à-dire que si  $\mathcal{A}$  est un automate cellulaire,  $x \sim y \Rightarrow \mathcal{A}(x) \sim \mathcal{A}(y)$ .*

**Preuve.** Soit  $r$  le rayon de  $\mathcal{A}$  et  $M$  un motif de taille  $n$  de  $\mathcal{A}(x)$ .

Ce motif a été calculé avec la fonction de transition de  $\mathcal{A}$  à partir des cellules de  $x$  à distance moindre que  $r$ . Ainsi en appelant  $N$  le motif de taille  $n + 2r$  de  $x$  centré comme  $M$ , le motif  $M$  ne dépend que de  $N$ .

Comme  $x \sim y$ ,  $N$  apparaît aussi dans  $y$ , et en appliquant  $\mathcal{A}$  il fera apparaître un motif  $M$  dans  $\mathcal{A}(y)$ . Donc  $\mathcal{A}(x) \prec \mathcal{A}(y)$ .

Symétriquement,  $\mathcal{A}(y) \prec \mathcal{A}(x)$ , d'où  $\mathcal{A}(y) \sim \mathcal{A}(x)$ . □

### 5.3 Continuité

On sait ([Hed69] par exemple) que les automates cellulaires sont continus sur l'espace des configurations muni de la distance de Cantor. Qu'en est-il avec la distance-motif? La continuité, et même la continuité uniforme découle de la proposition suivante :

**Proposition 5.2**

*Si  $\mathcal{A}$  est un automate cellulaire de rayon  $r$ , alors il est  $4^r$ -lipschitzien sur l'espace  $\dot{X}$ .*

**Preuve.** L'idée est la même que dans la preuve de compatibilité. Soient  $x$  et  $y$  telle que  $\mathbf{d}_M(x,y) = 2^{-k}$ . Considérons un motif  $M$  de taille  $k - 2r$  de  $\mathcal{A}(x)$ . Il est issu d'un motif  $N$  de taille  $k$  de  $x$ , lequel apparaît dans  $y$  puisque  $x \sim_k y$ . En appliquant  $\mathcal{A}$  à  $y$  on retrouve donc un motif  $M$ . Ainsi  $\mathcal{A}(x) \sim_{k-2r} \mathcal{A}(y)$ , ce qui s'écrit aussi :  $\mathbf{d}_M(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) \leq 2^{-(k-2r)} = 4^r \mathbf{d}_M(x,y)$   
□

### 5.4 Théorème de Hedlund

La distance de Cantor permet une caractérisation topologique des automates cellulaires :

**Théorème 5.1 (Hedlund, [Hed69])** *Les automates cellulaires sont exactement les fonctions continues pour la distance de Cantor et invariantes par le shift.*

Une fonction est invariante par le shift si pour toute configuration  $x$  et toute translation (ou shift)  $\sigma$ , on a :  $f(x) = \sigma^{-1}(f(\sigma(x)))$ .

On peut chercher à montrer un théorème similaire pour la distance-motif. Voici cependant deux résultats négatifs :

Soit  $f$  la fonction "flip" qui agit sur  $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  ainsi :  $\forall x \in \mathbb{Z}, f(c)(x) = c(-x)$ , où  $c(z)$  désigne la cellule en position  $z$  dans la configuration  $c$ .

**Proposition 5.3** *La fonction  $f$  est continue pour la distance-motif mais n'est pas un automate cellulaire.*

**Preuve.** Si  $c$  et  $c'$  sont deux configurations ayant les mêmes motifs de taille  $k$ , alors  $f(c)$  et  $f(c')$  auront aussi les mêmes motifs de taille  $k$  (ces motifs seront les motifs initiaux renversés).  $f$  est donc continue, c'est même une isométrie.

Supposons que  $f$  soit un automate. Soit  $r$  son rayon. Soit  $c$  la configuration nulle et  $c'$  valant partout 0 sauf en  $r$  où elle vaut 1. Sur  $[-2r,0]$ ,  $c$  et  $c'$  coïncident, donc  $f(c)(-r) = f(c')(-r)$  vu le rayon de  $f$ . Or  $f(c)(-r) = c(r) = 0$  et  $f(c')(-r) = c'(r) = 1$  : ceci est absurde et donc  $f$  ne peut être un automate cellulaire. □

On peut objecter que cette fonction  $f$  n'est pas invariante par le shift. Soit alors  $g$  la fonction agissant sur une configuration  $c$  de  $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  comme suit : s'il existe un indice  $x_0$  tel que pour tout  $x$  plus petit que  $x_0$   $c$  soit nulle, alors  $g$  décale  $c$  d'une cellule vers la droite (c'est-à-dire que  $g(c)(x) = c(x - 1)$ ). Sinon  $g(c) = c$ .

**Proposition 5.4** *La fonction  $g$  est continue pour la distance-motif et invariante par le shift mais n'est pas un automate cellulaire.*

**Preuve.** La fonction  $g$  est en fait l'identité sur les classes d'équivalence pour  $\sim$  puisque soit elle ne fait rien, soit elle décale la configuration ce qui n'affecte pas les motifs. Elle est donc continue. Il est immédiat de vérifier qu'elle est invariante par le shift.

Ce n'est pourtant pas un automate cellulaire, car l'état d'une cellule dépend de cellules arbitrairement loin. Soit  $c$  valant 1 en 0 et 0 ailleurs ; soit  $c'$  valant 1 pour  $x = 0$  et  $x \leq -r$ , 0 ailleurs.  $g(c)(1) = c(1) = 0$ , mais  $g(c')(1) = c'(1 - 1) = c'(0) = 1$ , bien que  $c$  et  $c'$  coïncident sur  $[-r,r]$ . □

## 5.5 Classification

Dans l'introduction a été mentionnée la classification de P. Kurka des automates cellulaires. Sans détailler outre mesure ce point, donnons néanmoins une idée non formelle de cette classification selon des critères topologiques.

Elle est constituée de quatre classes d'automates cellulaires :

- les automates équicontinus (deux points proches le restent au cours du temps sous l'action de l'automate) ;
- les automates possédant au moins un point d'équicontinuité (un des deux points précédent est fixe) ;
- les automates sensibles aux conditions initiales (deux configurations très proches s'éloignent sous l'action de l'automate) ;
- les automates expansifs (il existe une constante  $\epsilon$  telle que deux configurations distinctes finissent toujours, sous l'action de l'automate, par être à distance au moins  $\epsilon$ ).

L'étude de ces classes a été faite avec différentes topologies (Cantor, Besicovitch, Weyl . . . ), mais encore peu avec celle exposée dans ce rapport.

## Conclusion

L'objectif de ce stage était l'étude, en termes de pavages et d'automates cellulaires (ou plutôt de leur dénominateur commun, les configurations), d'une nouvelle distance, la distance-motif. Ceci a d'abord nécessité de se familiariser avec les notions courantes des pavages et des automates. L'étude a ensuite essentiellement été centrée sur des propriétés topologiques de l'espace des configurations : complétude, compacité, séparabilité et points isolés. J'ai présenté pour finir quelques pistes d'application de cette topologie à l'étude des automates cellulaires.

Il reste cependant plusieurs points à compléter. D'une part, l'étude des points isolés n'est pas finie en dimension 2 : ils resteraient à les caractériser comme on a pu le faire en dimension 1, et à prouver (ou réfuter) leur densité. D'autre part, ce rapport est plutôt consacré à l'étude de la distance-motif elle-même ; mais cette distance reste avant tout un outil qui doit permettre une étude topologique facilitée des problèmes actuels dans le domaine des pavages et des automates. Notamment, il serait intéressant de l'appliquer au problème de classification des automates cellulaires, par exemple en déterminant des sous-classes décidables.

## Références

- [Ber66] R. Berger. *The undecidability of the domino problem*. Memoirs of the American Mathematical Society, 66, 1966.
- [Cer02] J. Cervelle. *Complexité structurelle et algorithmique des pavages et des automates cellulaires*. 2002
- [DLS01] B. Durand, L. Levin, A. Shen. *Complex tilings*. ACM Symposium on Theory of Computing, STOC'01. ACM publisher, 2001.
- [Dur99] B. Durand. *Tilings and quasiperiodicity*. Theoretical Computer Science, 221 :61-75, 1999.
- [Hed69] G. A. Hedlund. *Endomorphism and automorphism of the shift dynamical system*. Math.Syst. Theory, 3 :51-59, 1969.
- [Kar94] J. Kari. *Reversibility and surjectivity problems of cellular automata*. Journal of Computer and System Sciences, 48 :149-182, 1994.
- [Kur97] P. Kurka. *Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata*. Ergodic Theory & Dynamical Systems, 17 :417-433, 1997.
- [Wan61] H. Wang. *Proving theorems by pattern recognition II*. Bell System Technical Journal, 40 :1-41, 1961.
- [Wol86] S. Wolfram. *Computation theory of cellular automata*. World SCIENTIFIC, SINGAPORE, 1986.