

FLIPS ET PUZZLES

Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : Informatique

Présentée à l'Université Paris Nord le 21 novembre 2016 par

Thomas Fernique

Après avis des rapporteurs :

Philippe CHASSAING	Université de Lorraine
Lorenzo SADUN	Université du Texas
Nicolas SCHABANEL	CNRS & Université Paris Diderot
Joshua SOCOLAR	Université Duke

Devant le jury composé de :

Frédérique BASSINO	Université Paris Nord
Jérôme BUZZI	CNRS & Université Paris Sud
Philippe CHASSAING	Université de Lorraine
Pavel KALOUGUINE	Université Paris Sud
Lionel POURNIN	Université Paris Nord
Nicolas SCHABANEL	CNRS & Université Paris Diderot

Préambule

Ce mémoire présente mes activités scientifiques depuis ma thèse d'informatique, dirigée par Valérie BERTHÉ et soutenue en décembre 2007. L'objectif est de montrer mon aptitude à conduire de façon autonome une recherche originale de qualité et à encadrer des travaux doctoraux.

Je remercie chaleureusement Philippe, Lorenzo, Nicolas et Joshua d'avoir accepté de donner leur avis éclairé sur mes travaux. Je remercie également tous les membres du jury pour leur participation. Je suis enfin très redevable de la garantie 10 ans post-thèse (le "SAV Berty").

Intitulée *pavages, fractions continues et géométrie discrète* et située à l'interface des mathématiques et de l'informatique, ma thèse montrait comment des objets étudiés en théorie des systèmes dynamiques - les *substitutions généralisées* - combinés avec des problématiques venues de la théorie des nombres - les *fractions continues multidimensionnelles* - s'appliquent à un problème de géométrie discrète - la *génération et reconnaissance de plans discrets*. Ces travaux et les publications correspondantes [1, 7, 14, 15, 16] ne seront pas présentés dans ce mémoire.

J'ai depuis lors effectué un glissement vers l'interface physique via l'étude des *quasicristaux*. Si des notions comme pavages, substitutions ou géométrie discrète sont restées centrales, ce glissement m'a entraîné vers de nouvelles thématiques : calculabilité et propriétés algébriques des *règles locales*, génération aléatoire de pavages et temps de mélange de chaîne de Markov. Ces travaux ont fait l'objet de publications en revues [3, 5, 6, 9, 13, 20] ou actes de conférence [4, 8, 11, 12, 17, 19, 21]. Ce sont eux qui sont présentés dans ce mémoire.

Ma recherche post-doctorale a notamment été conduite dans le cadre de deux projets que j'ai pilotés :

- le projet PEPS CNRS [StochasFlip](#) de 2009 à 2010 ;
- le projet ANR [QuasiCool](#) de 2013 à 2017.

J'ai également co-organisé plusieurs évènements scientifiques en relation avec mes recherches post-doctorales :

- le mois thématique [Math-Info: Towards New Interactions](#) en février 2010 au CIRM à Marseille (cinq semaines) ;
- l'école CIMPA [Tilings and Tessellations](#) en août 2015 à Ispahan, Iran (deux semaines) ;
- le mois thématique [Transversal Aspects of Tilings](#) en juin 2016 à Oléron (quatre semaines) ;
- deux workshops franco-russes en [juin 2010](#) et [juin 2013](#).

Ces neuf années depuis ma soutenance de thèse ont été l'occasion de découvrir plusieurs environnements de recherche : d'abord lors d'un séjour post-doctoral de six mois à l'institut Sobolev de Novosibirsk (Russie) puis, à la suite de mon recrutement au CNRS en octobre 2008, deux ans au sein du Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille, suivis d'une année à l'unité mixte internationale du CNRS à Moscou (Russie) et enfin au sein du Laboratoire d'Informatique de Paris Nord depuis octobre 2011.

Enfin, j'ai la chance, le plaisir et la charge de co-encadrer deux doctorants (russes tous les deux) : Alexandra Ugolnikova depuis novembre 2013 (soutenance prévue en décembre 2016) et Ilya Galanov depuis septembre 2016.

Table des matières

Introduction	1
1 Pavages substitutifs	9
1.1 Substitutions	9
1.2 Règles locales	13
1.3 S-adicité	17
2 Pavages canoniques	19
2.1 Planarité et règles locales	19
2.2 La barrière du calcul	22
2.3 La barrière algébrique	26
3 Dynamique de flips	37
3.1 Graphe des flips	37
3.2 Flips aléatoires	41
3.3 Flips contextuels	46
Bibliographie personnelle	51
Bibliographie générale	53

Introduction

Un puzzle est un ensemble de pièces qui doivent être assemblées en respectant l'emboîtement des pièces et la continuité du dessin (Fig. 1). Quant au flip, il désigne habituellement une figure acrobatique consistant à tourner sur soi-même lors d'un saut. Quel rapport avec l'informatique, ou même la science en général ?



FIGURE 1 – Le puzzle *Pentaplex* (à gauche) est basé sur deux *tuiles apériodiques* découvertes et brevetées par le mathématicien et physicien britannique Sir Roger Penrose [Pen78, Pen79]. Le puzzle *Eternity 2* (à droite), dû au britannique Lord Christopher Monckton et doté jusqu'en 2010 d'un prix de deux millions de dollars à qui le résoudre, offre une accroche efficace pour tout exposé grand public sur l'*indécidabilité* ou la *NP-complétude en moyenne* du *problème des dominos* [Ber66, Lev86].

Les puzzles soulèvent en fait un problème de *transfert d'information* : comment des contraintes locales (l'emboîtement des pièces) se propagent de proche en proche pour forcer une structure particulière à une échelle globale (en l'occurrence le dessin promis sur la boîte). Dans ce qui suit, les termes de **pavage** et de **tuile** seront préférés à ceux de puzzle et de pièce¹. Nos tuiles seront toujours des compacts de \mathbb{R}^n et nos pavages des recouvrements de tout ou partie de \mathbb{R}^n par des copies isométriques d'intérieurs disjoints de ces tuiles.

Ce problème de transfert d'information est omniprésent en informatique, par exemple, pour déduire du voisinage d'une page web son importance globale sur internet [BP98], ou encore pour essayer de prédire le comportement d'un automate cellulaire à partir de ses règles locales d'évolution [Wol02]. Plus spécifiquement, nous nous plaçons ici dans la perspective des travaux du logicien Wang [Wan60, Wan61], lequel cherchait un algorithme pour décider si un ensemble fini de tuiles (semblables à celles Fig. 1, à droite) permettait de paver le plan tout entier. Ce *problème des dominos* est indécidable [Ber66], la preuve reposant sur deux ingrédients essentiels de ce mémoire :

- la simulation d'une machine de Turing par des tuiles ;
- l'existence de tuiles pavant le plan mais jamais périodiquement (Fig. 2).

Dans ce cadre, l'objectif est de comprendre comment cette **apériodicité**, c'est-à-dire la propriété *globale* de paver sans jamais paver périodiquement, peut être forcée par des contraintes *locales*.

Ce problème de transfert d'information apparaît aussi naturellement en physique des matériaux, le rôle des tuiles étant joué par des atomes et celui des contraintes locales par leurs interactions énergétiques. En particulier, la découverte en 1982 des **quasicristaux** a été déterminante [SBGC84]. Leur structure ordonnée mais apériodique (Fig. 3) interdisant en effet la description habituelle par réseau cristallin, les pavages ont rapidement été proposés comme modèle [LS84], plus précisément les pavages **quasipériodiques**, apériodiques mais tels que tout motif fini réapparaît à distance bornée de n'importe quel point (une sorte de régularité plus faible que la périodicité). L'objectif théorique est alors de déterminer les structures possibles. Le lecteur intéressé par les aspects physiques pourra consulter, par exemple, [SD91, Jan96].

1. Pour éviter une mésaventure semblable à celle de ce célèbre astronome turc qui, en 1909, a candidement présenté habillé à l'orientale sa découverte de l'astéroïde B 612. . .

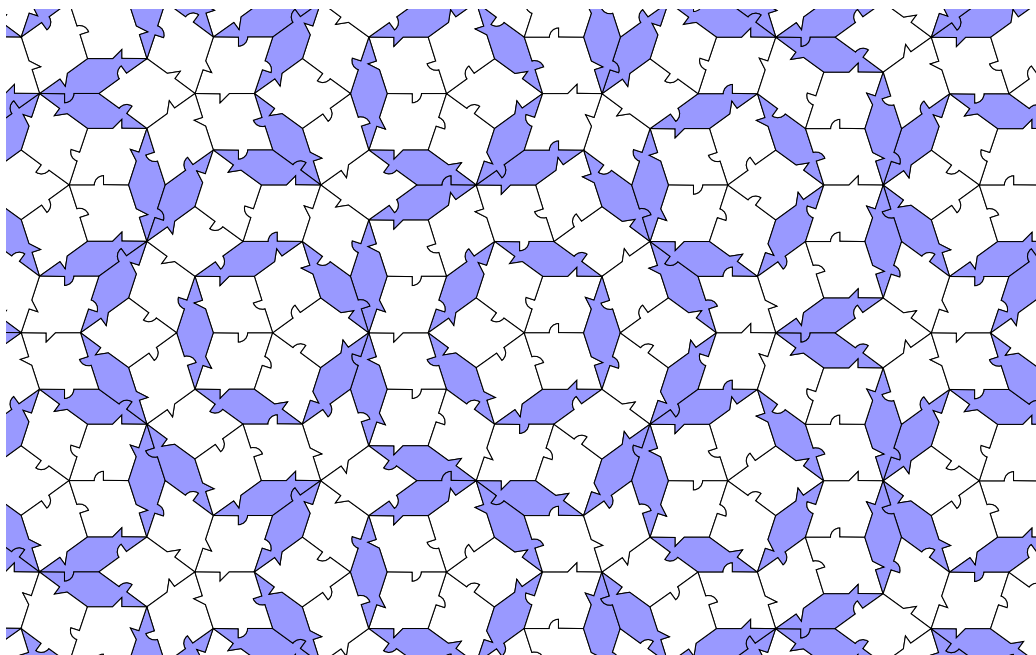


FIGURE 2 – Les pavages de Penrose sont les pavages du plan par deux tuiles en forme de losange aux indentations spécifiques. Ils sont quasipériodiques.

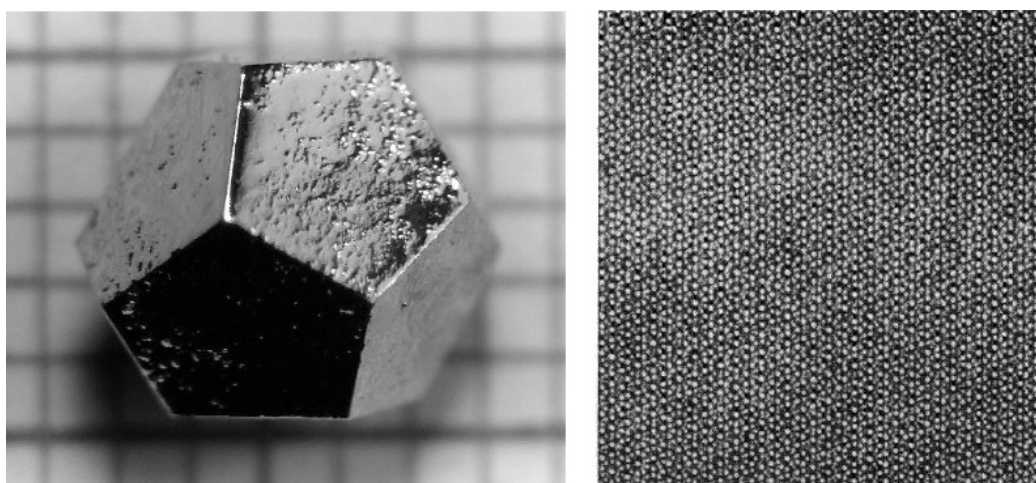


FIGURE 3 – Un quasicristal et son image par un microscope électronique.

Les pavages sont aussi étudiés en *dynamique symbolique*, à la frontière des mathématiques et de l'informatique. La dynamique symbolique est une sorte de version discrète des systèmes dynamiques (voir, par exemple, [LM95]). L'espace est partitionné en un nombre fini de régions R_1, \dots, R_k et la trajectoire d'un point x sous l'action d'une transformation T est codée par un mot infini sur $\{1, \dots, k\}$ dont la $n^{\text{ème}}$ lettre indique dans quelle région tombe $T^n(x)$. On étudie alors ce mot (et ses décalés lettre à lettre) dans le but d'en tirer des informations sur la trajectoire originale. L'exemple archétypal est celui des *mots sturmiens* (évoqués au chapitre 2), où T est une rotation irrationnelle du cercle partitionné en deux (voir, par exemple, [PF02, chap. 6]).

Les pavages de \mathbb{R}^n rentrent dans le cadre de la dynamique symbolique multidimensionnelle. Rappelons ici, en suivant la terminologie de [Rob04]², les quelques notions fondamentales utilisées dans ce mémoire (nous avons essayé de nous limiter au strict nécessaire). Un **espace de pavages** est un ensemble de pavages fermé par translation (les ouverts de la topologie étant les pavages identiques sur une même boule centrée à l'origine). Il peut aussi être défini comme l'ensemble des pavages ne contenant aucun des motifs finis d'un ensemble donné, appelés **motifs interdits**. Un **espace de type fini** est alors un espace de pavage qui peut être défini par un ensemble *fini* de motifs interdits. C'est donc un ensemble de pavages défini par des contraintes locales. Un **espace sofique** est un espace de pavage image d'un espace de type fini par un "recodage local", c'est-à-dire une fonction continue qui commute avec les translations (autrement dit, un automate cellulaire). On peut le voir comme défini par des contraintes locales qui s'autorisent des "décorations" que le recodage effacera ensuite. Enfin, l'espace des pavages obtenu par clôture de l'ensemble des translatés d'un pavage est appelé son **enveloppe**. Par abus, on dira qu'un pavage est de type fini ou sofique si son enveloppe l'est.

Illustrons très simplement ces notions en dimension un.

1. Considérons deux tuiles a et b . Le motif interdit ba , seul, définit l'espace de type fini formé des pavages où un b n'est jamais suivi d'un a . L'enveloppe de tout pavage de cet espace est égale à l'espace entier, sauf celle du pavage qui n'a que des a (resp. b). Ce dernier est la limite de tout autre pavage translaté infiniment vers la droite (resp. gauche).

2. Les habitués de la dynamique symbolique traduiront dans leur langage préféré.

2. Considérons toujours deux tuiles a et b mais interdisons les motifs $ba^n b$ pour $n \geq 1$. Cela définit l'espace des pavages où les b forment au plus un bloc, éventuellement précédé ou suivi de tuiles a . Il n'est pas de type fini car sinon il contiendrait un pavage avec deux blocs de b espacés d'un bloc de a plus grand que le plus grand motif interdit.
3. Considérons trois tuiles a , b et c . Les motifs interdits ba , ca et cb définissent un espace de type fini formé des pavages avec un bloc de b (éventuellement vide) précédé de tuiles a et suivi de tuiles c . Le recodage local $a \rightarrow a$, $b \rightarrow b$, $c \rightarrow a$ envoie cet espace de type fini sur l'espace précédent, qui est donc un espace sofique.

Le dernier espace de pavages peut aussi être défini comme les chemins d'un automate fini (avec un état par tuile et une transition de x à y quand xy n'est pas interdit). Ce lien avec les automates est plus général [BP97] mais semble limité à la dimension un (sauf exception, Fig. 4).

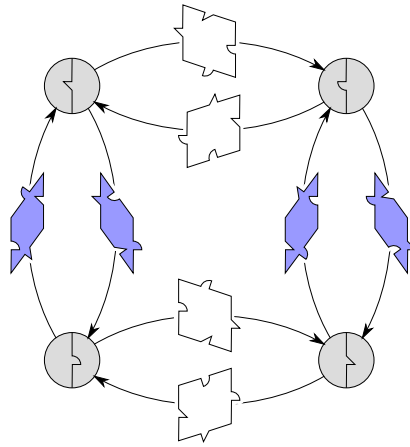


FIGURE 4 – Parcourir un pavage de Penrose de tuile en tuile en entrant et sortant à chaque fois par deux côtés parallèles revient à faire chemin infini dans cet automate fini. Les losanges blancs (resp. bleus) alternent alors dans deux orientations selon le sens des transitions horizontales (resp. verticales). Les indentations sont des décorations qui forcent cette alternance, laquelle caractérise des pavages tous aperiodiques : les pavages de Penrose généralisés [PK87, Soc90]. Parmi eux, les pavages de Penrose correspondent à une façon spécifique de croiser deux parcours dans une tuile.

Les pavages apparaissent encore dans d'autres domaines comme la théorie spectrale ou la cohomologie (le lecteur intéressé pourra se reporter, par exemple, aux ouvrages [BG13, FHK02, Sad08, Sen95]), sans compter leur aspect esthétique cher à Penrose [Pen74] utilisé jusqu'en architecture (Fig. 5). Ces aspects ne seront pas abordés dans ce mémoire.

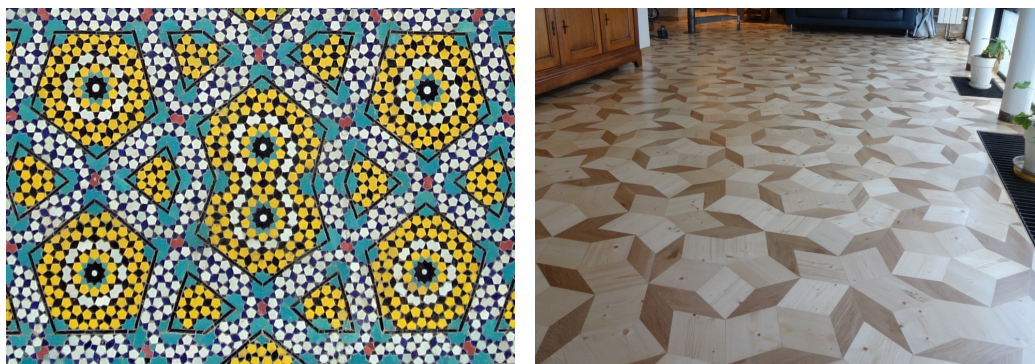


FIGURE 5 – À gauche, détail d'une mosaïque d'environ 17000 pièces ornant la façade d'une école coranique à Ispahan. À droite, vue partielle d'un parquet parisien d'environ 3000 pièces représentant un pavage de Penrose [18].

Il y a donc bien de la science derrière les puzzles. Qu'en est-il des flips ? De manière générale, un flip est une opération élémentaire qui permet de passer d'un objet à un autre au sein d'une même classe. Ça peut, par exemple, être l'opération sur les graphes triangulés qui consiste à changer la diagonale d'un quadrilatère par l'autre diagonale (voir, par exemple, [Pou14]). Ou bien l'opération sur les pavages par dominos introduite par Thurston [Thu89] qui consiste à effectuer un quart de tour à un bloc 2×2 formé par deux dominos. Ici nos flips consisteront essentiellement à retourner un hexagone pavé par trois losanges (Fig. 3.1 page 37). Le flip permet d'intégrer les pavages précédents dans un ensemble plus large de pavages, dits *aléatoires*, où la théorie des probabilités s'invite naturellement. Ceci a notamment un intérêt du point de vue modélisation des quasicristaux, car le flip correspond à un phénomène local de réorganisation atomique [LCCG96] à la base d'un processus global de réorganisation [EMH⁺14] (voir aussi [Hen91] pour un survol du modèle des pavages aléatoires en physique des matériaux). On retrouve donc encore une fois ce lien entre local et global.

Terminons par une rapide présentation de la structure de ce mémoire. Soulignons que les références bibliographiques *numériques* correspondent à mes publications, tandis que les références *alphanumériques* correspondent aux publications d'autres auteurs.

Le chapitre 1 définit les pavages substitutifs (Sec. 1.1) et présente en section 1.2 le résultat obtenu avec Nicolas Ollinger [17] qui montre que ces pavages substitutifs sont sofiques. La section 1.3 résume ensuite nos premiers travaux avec Valérie Berthé et Mathieu Sablik sur les liens entre S-adicité, calculabilité et soficité [8].

Le chapitre 2 commence par introduire les pavages canoniques, notamment ceux qui sont planaires (Sec. 2.1). La section 2.2 présente ensuite les travaux réalisés avec Mathieu Sablik, [20, 21], qui conduisent à une caractérisation des pavages planaires sofiques en termes de calculabilité. La section 2.3 détaille notre collaboration avec Nicolas Bédaride et les résultats [3, 4, 5, 6] qui jalonnent notre quête d'une caractérisation dans le cas des pavages planaires de type fini.

Le chapitre 3 s'intéresse à l'action du flip sur les pavages canoniques finis du plan. La section 3.1 correspond aux travaux [9, 12, 13], réalisés avec Olivier Bodini, Michael Rao, Damien Regnault et Éric Rémila, qui décrivent la structure conférée par l'opération de flip à l'ensemble des pavages. La section 3.2 est dédié aux flips aléatoires, qui sont reliés Section 3.3 avec les motifs interdits du chapitre 2 à travers les résultats obtenus avec Olivier Bodini et Damien Regnault [10, 11, 19].

Certaines problématiques qui ont occupé un temps non négligeable de mon activité de recherche ces dernières années (comme l'entropie des ensembles de pavage ou le problème de l'assemblage tuile à tuile d'un pavage) ne sont pas abordées ici faute de résultats tangibles. C'est la vie !

Chapitre 1

Pavages substitutifs

1.1 Substitutions

Une **substitution** sur les mots est une application qui envoie chaque lettre d'un alphabet donné sur un mot et chaque mot sur la concaténation des images des lettres qui le forment. Par exemple, la substitution σ définie par $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = a$ permet d'engendrer des mots de plus en plus longs :

$$a \xrightarrow{\sigma} ab \xrightarrow{\sigma} aba \xrightarrow{\sigma} abaab \xrightarrow{\sigma} \dots$$

On associe naturellement à une substitution ses **mots limites**, qui sont les mots biinfinis (*i.e.*, des suites de lettres indexées par \mathbb{Z}) infiniment désubstituables, c'est-à-dire qui admettent une suite infinie de préimages par la substitution (on parle aussi d'**ensemble limite**).

Comment étendre cette notion aux pavages en dimension deux (ou plus) ? S'il est facile de définir une application qui envoie chaque tuile sur un motif formé de plusieurs tuiles, il n'y a par contre plus de concaténation naturelle de ces motifs.

Une solution simple est de se restreindre aux **mots bidimensionnels**, *i.e.*, les suites de lettres indexées par \mathbb{Z}^2 , et d'envoyer chaque lettre sur un rectangle $a \times b$ de lettres. La lettre en position (x, y) est alors envoyée sur le rectangle en position (ax, by) , c'est-à-dire qu'on déforme linéairement la grille \mathbb{Z}^2 et qu'on remplit chaque case déformée par un motif image (Fig. 1.1).

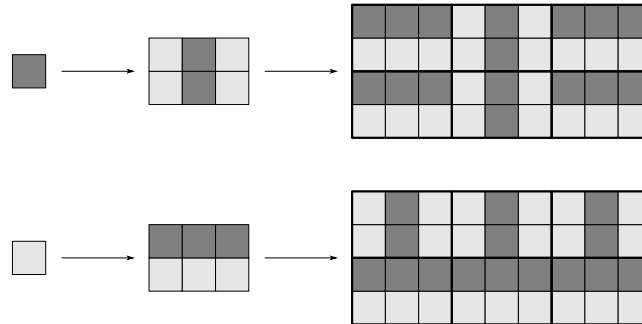


FIGURE 1.1 – Chaque lettre (un carré de couleur) est envoyée sur un rectangle 2×3 , ce qui s’itère naturellement et définit une substitution. Un pavage limite est représenté Fig. 1.5, à gauche.

On peut procéder de même si l’on dispose d’une déformation linéaire et de tuiles (pas nécessairement carrées) telles que chaque tuile, une fois déformée, peut être exactement remplacée par un motif formé des tuiles originales. La figure 1.2 présente un exemple avec une homothétie et une seule tuile (à isométrie près). On peut même envisager que le motif image d’une tuile ne coïncide pas exactement avec la tuile déformée, mais il faut alors garantir qu’il n’y ait ni trou ni recouvrement après remplacement afin de bien obtenir un pavage. La figure 1.3 donne un tel exemple, tiré de la famille des substitutions d’Arnoux-Ito [AI01, AIS01]. Le fait que l’image de tout pavage soit un pavage n’a rien d’évident, c’est un de mes résultats de thèse [7].

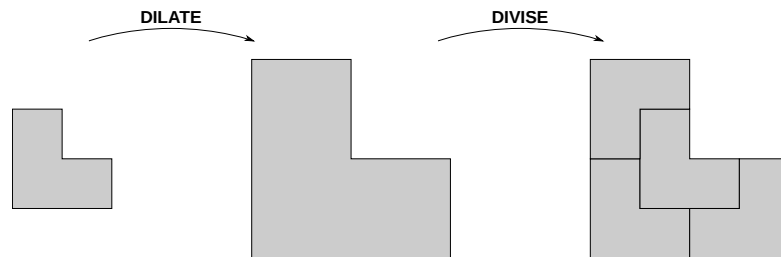


FIGURE 1.2 – Une homothétie de rapport deux suivie d’un remplacement par quatre tuiles (en forme de chaise dit-on) définissent une substitution sur les pavages par cette tuile. Un pavage limite est représenté Fig. 1.5, au centre.

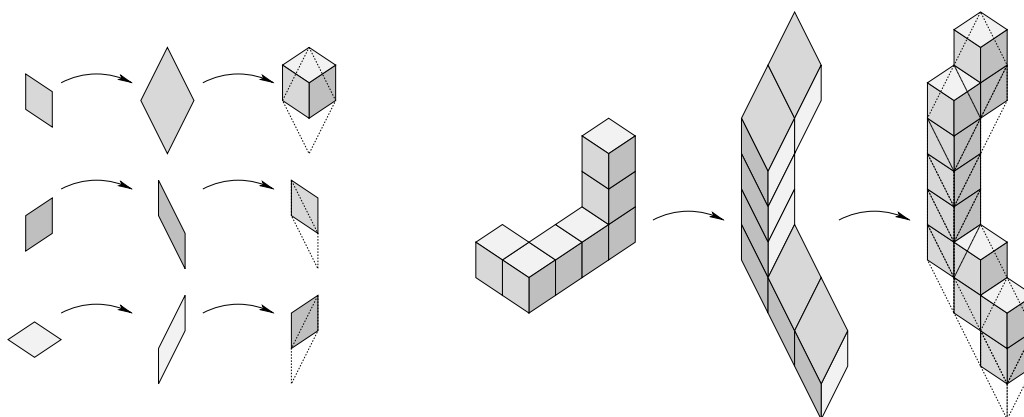


FIGURE 1.3 – Une substitution d’Arnoux-Ito. Elle agit sur un pavage par losanges par une transformation linéaire suivi d’un remplacement par des losanges originaux. Bien que le remplacement d’une tuile ne coïncide pas exactement avec la tuile déformée, on montre que c’est bien une action sur les pavages par losanges. Un pavage limite est représenté Fig. 1.5, à droite.

Une solution vraiment générale devrait idéalement reposer sur une notion de concaténation multidimensionnelle. C’est ce que propose la notion de **substitution combinatoire** ou **substitution topologique**), introduite par plusieurs auteurs avec autant de formalismes différents [ABS04, BH13, PF03, PFS14]. L’idée de base est naturelle : en plus de définir l’image d’une tuile, on définit les positions respectives des images de deux tuiles voisines. L’image d’un pavage est alors obtenue en parcourant les tuiles de proche en proche et en plaçant l’une par rapport à l’autre leurs images respectives. Toute la difficulté est d’assurer la cohérence d’une telle définition : la position de l’image d’une tuile ne doit pas dépendre du parcours qui a conduit à cette tuile. Un de mes résultats de thèse [15] montre que toute substitution d’Arnoux-Ito peut être définie comme ça (et donne un exemple de substitution combinatoire qui va au delà des substitutions d’Arnoux-Ito), ce qu’illustre la figure 1.4.

Mots ou pavages limites définis par substitution ont une structure hiérarchique forte qui permet de prouver des propriétés mathématiques avancées (spectrales, dynamiques ou topologiques, voir par exemple [BG13, Sad08]). La propriété qui va nous intéresser dans la suite est l’apériodicité.

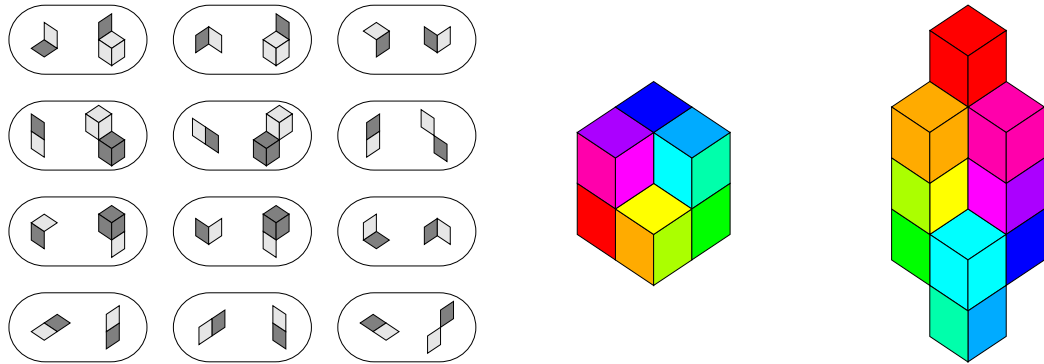


FIGURE 1.4 – Une substitution combinatoire. À gauche sont données les images de deux tuiles voisines, avec leurs positions relatives. À droite, ces règles de substitution sont utilisées pour construire l'image d'un petit motif. Cela définit en fait la même action que la substitution d'Arnoux-Ito Fig. 1.3.

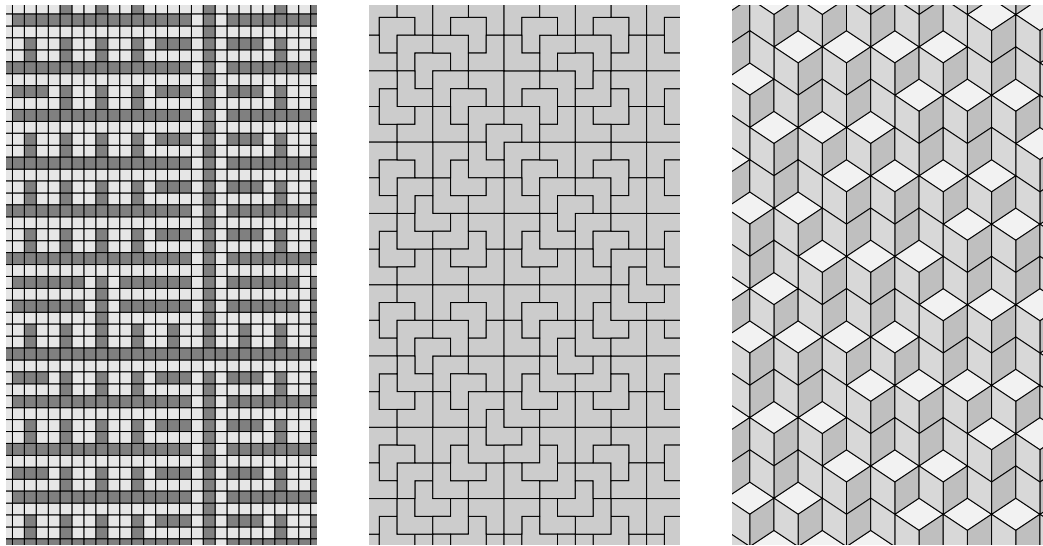


FIGURE 1.5 – Exemples de pavages limites définis par substitution.

1.2 Règles locales

La notion de substitution permet de définir, en tant que limite, des pavages apériodiques¹. Cependant, les tuiles de ces pavages limites peuvent généralement former bien d'autres pavages, en particulier des pavages périodiques qui ne nous intéressent guère. Peut-on caractériser ces pavages limites par la façon dont leur tuiles peuvent s'assembler localement ?

Peut-on par exemple définir l'ensemble des pavages limites comme un espace de type fini, c'est-à-dire comme l'ensemble des pavages qui évitent un ensemble fini de motifs finis ? La structure hiérarchique de ces pavages fait qu'on peut alors se ramener à des motifs très simples, formés de tuiles partageant un même point (on parle de *vertex-atlas*). En effet, s'il existe un pavage hors de l'ensemble limite qui évite ces motifs simples, alors plus on itère la substitution plus grande est la taille minimale du motif qui apparaît dans le pavage obtenu sans apparaître dans les pavages limites. La figure 1.6 illustre ceci. Il s'agit de cas plutôt exceptionnels (on peut notamment citer les pavages de Penrose, voir [Sen95, chap. 6]).

Qu'en est-il si l'on se donne un nombre fini de couleurs qui permettent de faire jouer à une tuile autant de rôles différents ? De manière équivalente, on peut préférer indenter les tuiles ou colorier leurs arêtes. En d'autres termes, l'ensemble limite est-il un espace de type sofique ? La figure 1.7 montre que c'est le cas de l'ensemble limite défini par la substitution de la figure 1.2. Cet exemple, dû à Joshua Socolar ([Sen95, p. 236]), fait partie des quelques rares exemples connus différenciant un nombre raisonnable de tuiles (comme les pavages de Penrose [Pen78], celui de Robinson [Rob71] ou ceux dus à Ammann [AGS92]). Cet exemple illustre bien l'idée clef, qui est de différencier les tuiles afin que tout pavage admette une préimage qui soit un pavage par le *même* jeu de tuiles, lequel admet donc à son tour une préimage par le même jeu de tuiles et ainsi de suite. En d'autres termes, les tuiles sont différenciées de sorte à ce que les *méta-tuiles* qu'elles forment (*i.e.*, les motifs images de ces tuiles par la substitution) leur soient *combinatoirement équivalentes*, c'est-à-dire qu'il y a une bijection entre ces tuiles et méta-tuiles qui préserve les possibilités d'adjacences – on parle d'*auto-simulation*.

1. Sauf dans certains cas particulier où il existe un pavage admettant plus d'une préimage, comme dans le cas de la substitution $\sigma(a) = \sigma(b) = ab$ dont les mots limites sont tous périodiques.

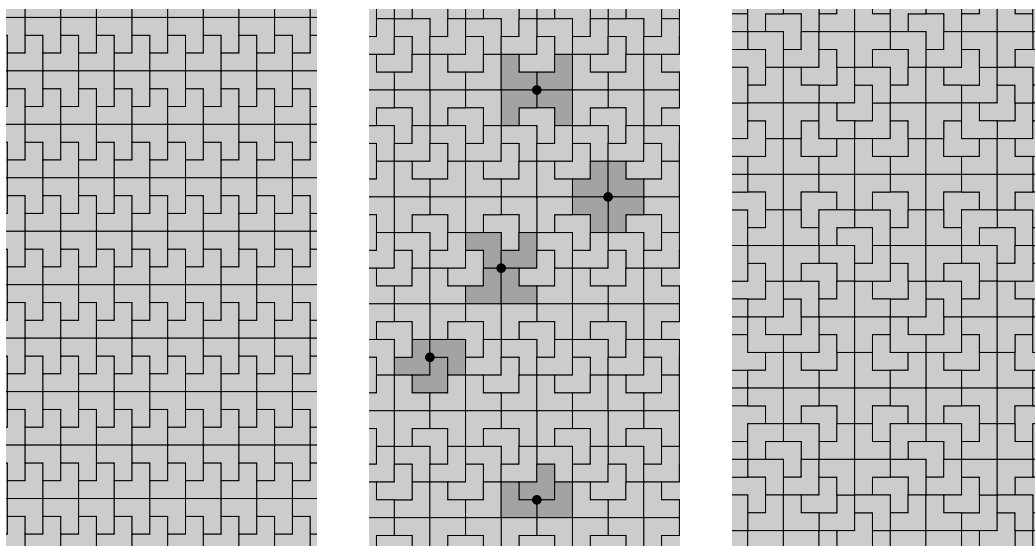


FIGURE 1.6 – À gauche, un pavage périodique par la tuile en forme de chaise qui n’est clairement pas dans l’ensemble limite de la substitution Fig. 1.2 (il n’admet même pas d’antécédent par la substitution). Pourtant, son image par la substitution est un pavage (au centre) dont tous les petits motifs formés de tuiles partageant un même point se retrouvent dans tout pavage limite (un exemple de chaque motif, à isométrie près, est mis en valeur). En itérant la substitution (à droite), on obtient des pavages qui ne sont toujours pas limites mais qui nécessitent des motifs de plus en plus grands pour être distingués des pavages limites. L’ensemble limite de la substitution Fig. 1.2 n’est donc pas de type fini.

La première méthode générale pour construire à partir d’une substitution un jeu de tuiles qui s’auto-simule a été proposée en 1989 par Shahar Mozes dans le cas des substitutions rectangulaires [Moz89]. Une méthode générale pour les substitutions qui dilatent les tuiles par homothéties et les redécoupent exactement en tuiles originales (comme la substitution Fig. 1.2) a été proposée en 1998 par Chaim Goodman-Strauss [GS98]. Avec Nicolas Ollinger, nous avons donné une méthode générale dans le cas des substitutions combinatoires, sous une “bonne” hypothèse :

Théorème 1 ([17]) *L’ensemble limite d’une bonne substitution combinatoire est sofique.*

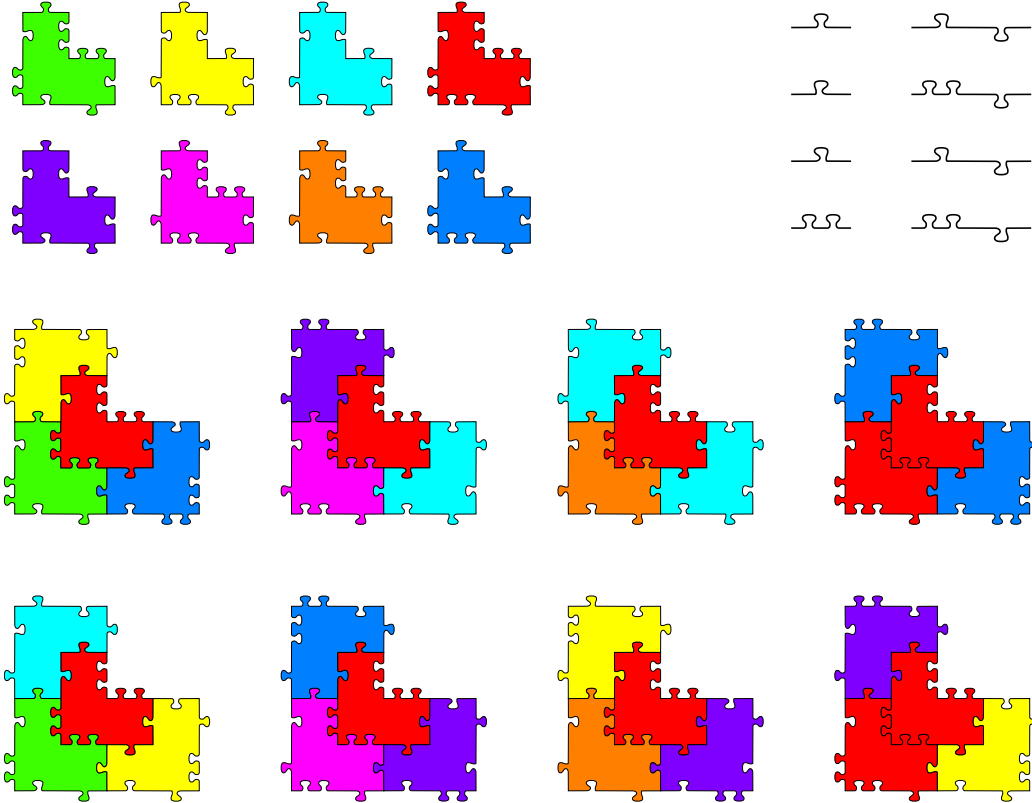


FIGURE 1.7 – La tuile en forme chaise est indentée de sorte à donner 8 pièces de puzzle différentes (en haut à gauche). Les pavages obtenus en emboîtant correctement ces pièces puis en les remplaçant toutes par la tuile initiale en forme de chaise sont alors exactement les pavages limites de la substitution de la figure 1.2. On montre en effet que tout pavage par ces 8 pièces est aussi un pavage par les 8 *méta-pièces* représentées en bas. Ceci montre déjà que tout pavage par ces pièces admet une préimage. Mais on a en fait bien mieux, car ces méta-pièces peuvent être remplacées par des pièces originales dilatées d'un facteur deux. Il existe en effet une bijection entre les indentations des pièces originales et des méta-pièces (représentée en haut à droite) qui conserve les possibilités d'emboîtement. La préimage peut donc à son tour être vue comme un pavage par les 8 pièces originales. L'argument peut donc être répété *ad libitum* pour obtenir une suite infinie de préimages.

En particulier, ce résultat englobe strictement les précédents. Cependant, à mon sens, son intérêt n'est pas tant ce gain de généralité que la simplification conséquente du formalisme et de la preuve. Sans prétendre juger un article au poids, soulignons que l'article de Mozes fait 48 pages, celui de Goodman-Strauss 43 pages² et le notre 11 pages, dont véritablement 2 pages de preuve.

Notre approche consiste à distinguer le problème de la géométrie et celui de la combinatoire. Le problème de la géométrie est en quelque sorte évacué dans l'hypothèse "bonne" substitution. Il reste alors la combinatoire, dont le principe est commun aux méthodes générales mentionnées ci-dessus. Il est facile de différencier les tuiles pour ne permettre que des pavages qui admettent au moins une préimage, c'est-à-dire pour forcer le premier niveau de la hiérarchie. Mais à cette différenciation des tuiles correspond une différenciation des méta-tuiles (puisqu'elles sont faites de tuiles différenciées). Donc pour simuler ces méta-tuiles avec les tuiles, il va falloir une deuxième étape de différenciation... Le procédé semble alors conduire à une différenciation sans fin sur chaque tuile, donc un nombre infini de tuiles. Cependant, on utilise le fait que les méta-tuiles sont plus grosses que les tuiles pour *éta-*ler l'information relative à ces différenciations et limiter ainsi l'information circulant dans chaque tuile. Le problème devient alors de *synchroniser* les différentes informations qui auraient dû se trouver au même endroit mais ont été dispersées à travers les méta-tuiles. C'est la façon dont l'information est *étalée et synchronisée* qui différencie les méthodes ci-dessus.

La description précédente est très informelle, mais il est difficile d'être plus précis sans entrer dans des détails très techniques (qui sont dans [17]). Si nous avons grandement simplifié et raccourci la preuve, elle reste néanmoins assez subtile : c'est une construction explicite de point fixe, avec les problèmes d'auto-référencement délicats qui vont avec. Et c'est bien souvent seulement en cherchant à différencier explicitement les tuiles d'un exemple concret de substitution qu'on se rend véritablement compte de son degré de compréhension de la construction générale.

En particulier, on verra au chapitre suivant pourquoi il serait très intéressant d'arriver à traiter le cas des *substitutions de Brun*, représentées Fig. 1.8. Le théorème précédent ne s'applique en effet pas directement car ce ne sont

2. En fait 77 pages dans sa version longue disponible sur la page web de l'auteur.

pas des “bonnes” substitutions : elle ne font que très peu grossir les tuiles (et encore, pas toutes). Elles définissent peut-être néanmoins des ensembles limites sofiques.

Conjecture 1 *L'ensemble limite des substitutions de Brun est sofique.*

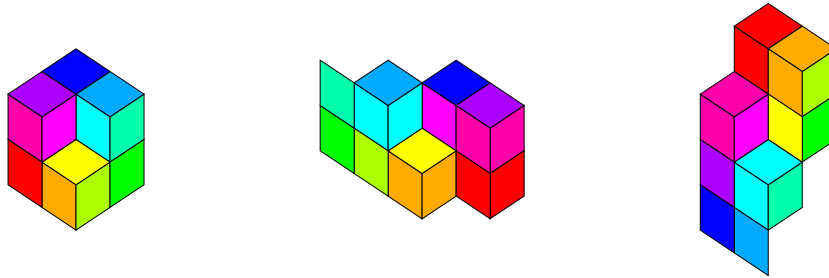


FIGURE 1.8 – Les substitutions de Brun sont les deux substitutions d’Arnoux-Ito décrites ici comme des substitutions combinatoires par leur action sur le petit motif de gauche (qui a la particularité d’avoir des tuiles adjacentes de toutes les façons possibles, donc son image caractérise la substitution combinatoire – à condition de repérer chaque tuile et son image par une couleur qui lui soit propre).

1.3 S-adicité

Étant donné un ensemble fini de substitutions, un pavage est dit **S-adique** s’il existe une suite infinie de pavages telle que l’un soit la préimage du suivant par une des substitutions données (voir notamment le survol [BD14] pour le cas des mots, et les articles [PFS14] ou [7] pour le cas des pavages). Le cas d’un pavage limite, considéré dans les paragraphes précédents, correspond simplement au cas d’un ensemble réduit à une unique substitution.

Un paramètre important d’un pavage S-adique est sa **suite directrice**, c’est-à-dire le mot infini formé de la suite des substitutions utilisées. En particulier, existe-t-il des liens intéressants entre les propriétés d’une suite directrice et celles des pavages S-adiques correspondants ?

Dans un travail en commun avec Valérie Berthé et Mathieu Sablik [8], nous avons examinés quelques-unes de ces liens, en particulier concernant l'effectivité, une notion calculatoire qui arrive assez naturellement avec les règles locales, comme on le verra plus en détail dans le chapitre suivant. De manière générale (voir [Wei00]), un **fermé effectif** d'un espace métrique X est un ensemble fermé $A \subset X$ tel qu'il existe un algorithme qui énumère des boules rationnelles³ dont l'union est égale au complémentaire de A . L'énumération est *a priori* infinie, l'important étant qu'un point hors de A sera un jour ou l'autre éliminé par l'algorithme. Sous certaines hypothèses sur l'ensemble de substitutions (propriété de *bonne croissance*), on montre

Théorème 2 ([8]) *Un ensemble fermé de pavages S -adiques est effectif si et seulement s'il peut être défini par un fermé effectif de suites directrices.*

Un des buts est de généraliser aux substitutions combinatoires le résultat suivant, démontré dans le cas des substitutions rectangulaires (dont la structure permet de faire circuler l'information plus simplement) :

Théorème 3 ([AS14]) *Un ensemble de pavages S -adiques définis par un fermé effectif de suites directrices est sofique.*

3. Boules de centre et de rayon rationnels, les rationnels étant un sous-ensemble dense dénombrable de X tel que la distance entre deux rationnels est calculable.

Chapitre 2

Pavages canoniques

2.1 Planarité et règles locales

Dans sa plus simple variante, la méthode de **coupe et projection** consiste à couper le plan euclidien par une droite D . Plus précisément, on sélectionne les segments unités de \mathbb{Z}^2 qui sont inclus dans la bande $D + [0, 1]^2$ (Fig. 2.1) puis on les projette orthogonalement sur D pour obtenir un pavage¹ par deux types de tuiles : les projections des segments horizontaux et verticaux. Recodé sur deux lettres, c'est un *mot sturmien* [Lot02, chap. 2].

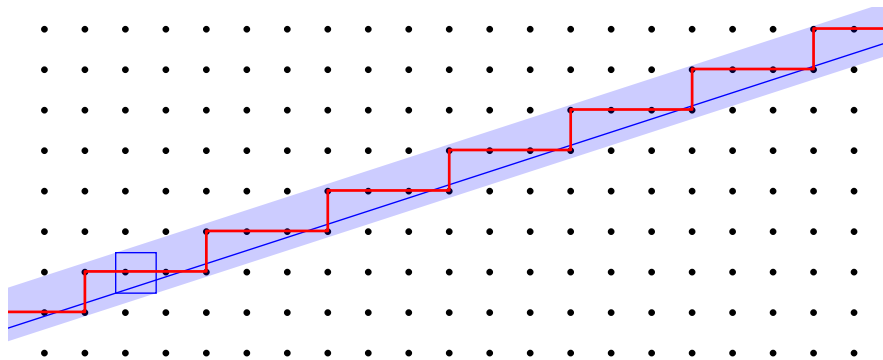


FIGURE 2.1 – Coupe du plan par une droite, *i.e.*, pavage planaire $2 \rightarrow 1$.

1. Il faut en fait supposer que D ne contient pas de point entier, sinon la bande contient un carré qui crée des superpositions quand on projette.

Cette méthode a été introduite dans [DB81] par De Bruijn pour les pavages de Penrose puis généralisée dans [GR86, DB86] (voir [Sen95, chap. 2] ou [BG13, chap. 7] pour une présentation plus récente).

Si E est un sous-espace affine de \mathbb{R}^n de dimension d tel que $E \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$, on appelle **pavage planaire de pente E** le pavage obtenu en sélectionnant les faces d -dimensionnelles des cubes unités de \mathbb{Z}^n qui sont incluses dans le cylindre $E + [0, 1]^n$, puis en les projetant orthogonalement sur E . Un tel pavage est dit de **dimension d** et de **codimension $n - d$** , ce qu'on résume en disant que c'est un pavage $n \rightarrow d$. Il est apériodique si E ne contient pas de droite rationnelle et quasipériodique dans tous les cas.

On peut étudier les motifs d'un pavage planaire via sa **fenêtre**, qui est simplement la projection orthogonale de $E + [0, 1]^n$ sur un espace E^\perp perpendiculaire à sa pente E . On montre en effet qu'à chaque motif P du pavage correspond une région polygonale de sa fenêtre telle que, pour tout point x de \mathbb{Z}^n , la projection de x sur E^\perp tombe cette région si et seulement un motif P apparaît dans le pavage à l'endroit où x se projette dans E (voir, par exemple, [BG13, chap. 7]).

Par exemple, les pavages d'Ammann-Beenker sont des pavages planaires $4 \rightarrow 2$. Leurs pentes sont les plans affines de \mathbb{R}^4 parallèles au plan vectoriel engendré par

$$(\sqrt{2}, 1, 0, -1) \quad \text{et} \quad (0, 1, \sqrt{2}, 1).$$

Ils sont non-dénombrables (continuum de plans affines) mais ils ont tous les mêmes motifs finis. La figure 2.2 illustre cet exemple.

Plus généralement, on appelle **pavages canoniques $n \rightarrow d$** l'ensemble de tous les pavages pouvant être formés avec les mêmes tuiles que les pavages planaires $n \rightarrow d$. Parmi eux, quels sont les pavages planaires caractérisés par leurs motifs d'une taille donnée? C'est par exemple le cas des pavages de Penrose (Fig. 2.3) même si, pour des raisons de cardinalité (continuum des pentes *vs* dénombrabilité des motifs finis), c'est nécessairement une exception.

À côté de la classique distinction entre règles locales colorées ou non, une seconde distinction a été introduite par Levitov [Lev88] pour les pavages planaires. Elle repose sur la notion suivante.

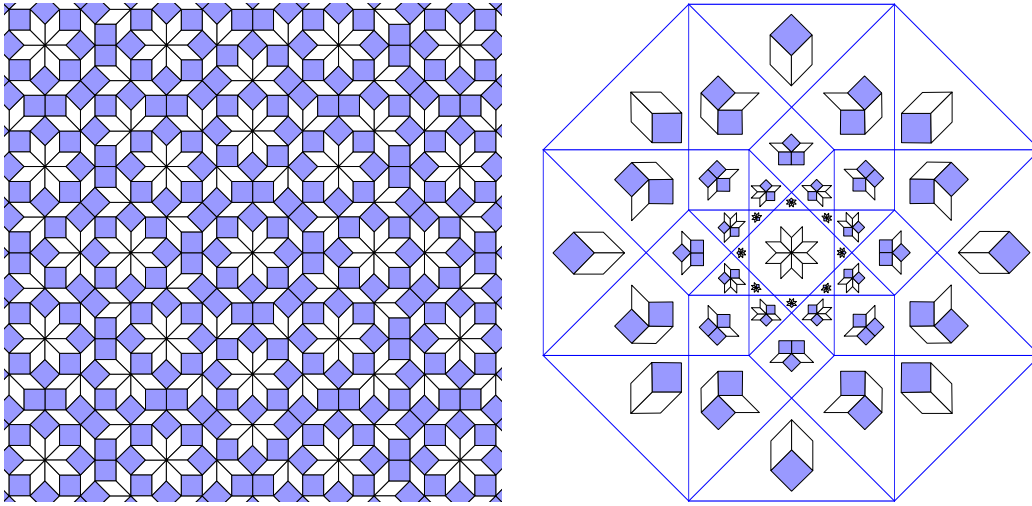


FIGURE 2.2 – Un pavage d’Ammann-Beenker (à gauche, vue partielle) et sa fenêtre (à droite). Chaque région de la fenêtre correspond au motif représenté dedans. La fréquence d’un motif est proportionnelle à l’aire de sa région.



FIGURE 2.3 – Les pavages de Penrose sont, parmi les pavages faits avec les mêmes tuiles, exactement ceux sans aucun de ces 7 motifs (à isométrie près).

Un **pavage quasilanaire de pente E et d’épaisseur $t \geq 1$** est un pavage canonique obtenu en projetant une variété d -dimensionnelle formée de faces de cubes unités de \mathbb{Z}^n et incluse dans le tube $E + [0, t]^n$. En d’autres termes, le pavage est autorisé à fluctuer plus ou moins autour de E selon la valeur de t . Pour $t = 1$, on retrouve la notion de pavage planaire.

On dit alors qu’un pavage planaire de pente E admet des **règles locales faibles** s’il existe $r \geq 0$ et $t \geq 0$ tel que tout pavage canonique dont les motifs de diamètre r sont des motifs de ce pavage est lui même un pavage quasilanaire de pente parallèle à E et d’épaisseur t . On parle de **règles locales fortes** quand $t = 1$. La figure 2.4 illustre ceci.

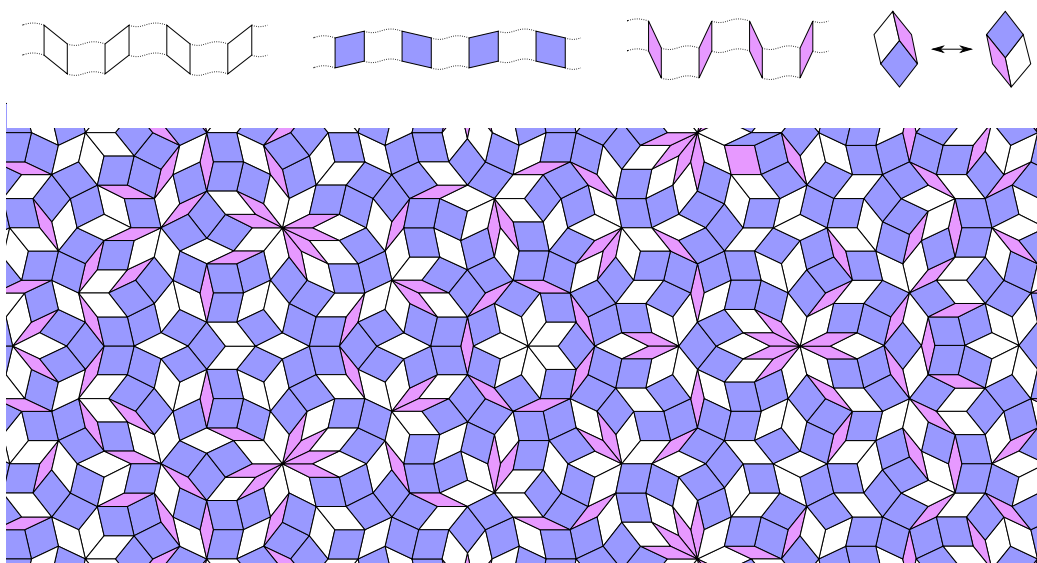


FIGURE 2.4 – Un pavage planaire $7 \rightarrow 2$ (en bas). Levitov [Lev88] a montré qu’il n’admettait pas de règles locales fortes. Socolar [Soc90] a montré qu’il admettait pourtant des règles locales faibles : elles consistent à forcer dans chaque bande l’alternance d’une tuile et de sa symétrique (trois dessins en haut à gauche, les pointillés indiquant que jusqu’à 10 tuiles autres que celles représentées peuvent se trouver à cet endroit). Les hexagones formés de trois tuiles différentes peuvent alors “flipper” (en haut à droite) sans violer l’alternance, ce qui laisse le pavage fluctuer autour de E .

2.2 La barrière du calcul

Cette section est consacrée au cas des règles locales colorés. Nous allons voir que la notion de calculabilité arrive naturellement pour caractériser les pentes des pavages planaires admettant de telles règles locales.

Rappelons qu’un nombre réel est **calculable** s’il existe un programme qui, étant donné un paramètre entier n , calcule la $n^{\text{ème}}$ décimale de ce nombre. En particulier, l’ensemble des nombres réels calculables est dénombrable.

Que la calculabilité joue ici un rôle n'est pas une surprise pour un informaticien, car les pavages sont en effet capables de simuler une machine de Turing (c'est une des clefs de la preuve de l'indécidabilité du problème du domino de [Ber66]). Le retentissement de [HM10] (qui donne une caractérisation calculatoire d'un invariant de systèmes dynamiques symboliques) montre que c'est peut-être plus surprenant en mathématiques, où l'on ne manipule généralement que des nombres calculables². Ici, ce sont les pentes calculables, *i.e.*, engendrées par des vecteurs dont les coordonnées sont toutes des réels calculables, qui jouent un rôle particulier :

Théorème 4 ([21]) *Un pavage planaire admet des règles locales faibles colorées si et seulement si sa pente est calculable.*

C'est une équivalence, qui va bien plus loin que tous les précédents résultats (notamment [AGS92, DB81, Kat88, Le97, LP95, LPS92, PK87, Soc89, Soc90]), lesquels ne dépassent pas le cas de pentes algébriques (ce qui est aussi le cas des pavages planaires substitutifs car leur pente est un espace propre de la matrice entière qui associe à chaque type de tuile le nombre de tuiles de chaque type dans son image). La preuve est assez technique mais le principe, illustré Fig. 2.5 dans le cas $3 \rightarrow 2$, est relativement simple.

Toujours avec Mathieu Sablik, nous avons étendu le résultat précédent au cas d'un *ensemble* de pentes. Nous avons encore obtenu une caractérisation dans laquelle c'est toujours la calculabilité qui joue un rôle clef, plus précisément la notion de fermé effectif déjà introduite Section 1.3 :

Théorème 5 ([20]) *Un ensemble de pavages planaires a des règles locales faibles colorées si et seulement si l'ensemble des pentes est un fermé effectif.*

En particulier, l'ensemble de toutes les pentes possibles formant un fermé effectif, un corollaire de ce théorème est que l'ensemble de tous les pavages planaires admet des règles locales faibles colorées. Le principe de la preuve est similaire à celle du théorème précédent, mais il faut en plus synchroniser les pentes des bandes de différentes directions (Fig. 2.6).

2. Car comment, par exemple, définir π autrement que par un moyen de le calculer, ne serait-ce que comme rapport du diamètre d'un cercle et de son périmètre ?

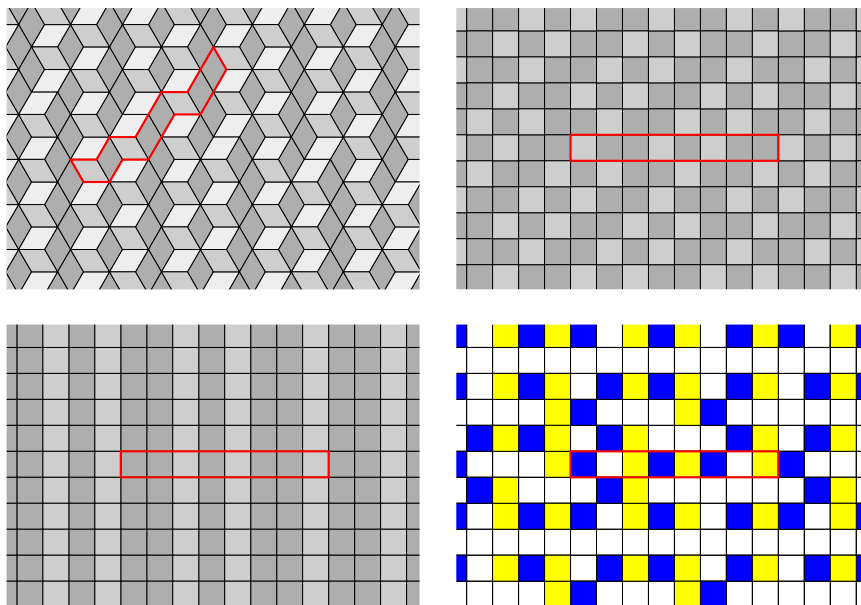


FIGURE 2.5 – Un pavage canonique $3 \rightarrow 2$ (en haut à gauche) est déformé pour donner un mot bidimensionnel (en haut à droite). Les lignes du mot correspondent à des bandes du pavage. Ce sont des mots sturmiens, tous de même pente. Il sont localement indistingables, mais différents. En particulier, le passage d'une ligne à la suivante est subtile, et il n'est pas clair que l'enveloppe de ce mot bidimensionnel soit sofique. Pour contourner ce problème, on décompose ce mot en un mot dont les lignes sont toutes identiques à un même mot sturmien (en bas à gauche) et le mot qui code la différence avec le mot initial (carré bleu pour une case à obscurcir, jaune pour une case à éclaircir). On montre grâce au résultat de [AS13, DRS12] que l'enveloppe du premier est sofique. On montre que le deuxième fait toujours partie des mots qui alternent carrés jaunes et bleus dans chaque ligne, lesquels forment un ensemble sofique. Le produit cartésien de ces deux ensemble sofiques définit donc un ensemble sofique qui contient le mot bidimensionnel initial. Il contient aussi d'autres mots (à cause du degré de liberté donné par le codage), mais on montre qu'ils ne sont jamais très loin (d'où des règles locales faibles et non fortes). Pour caractériser la pente du pavage original, il faut procéder ainsi sur les trois directions de bandes, *i.e.*, sur trois mot bidimensionnels obtenus en déformant le pavage différemment.

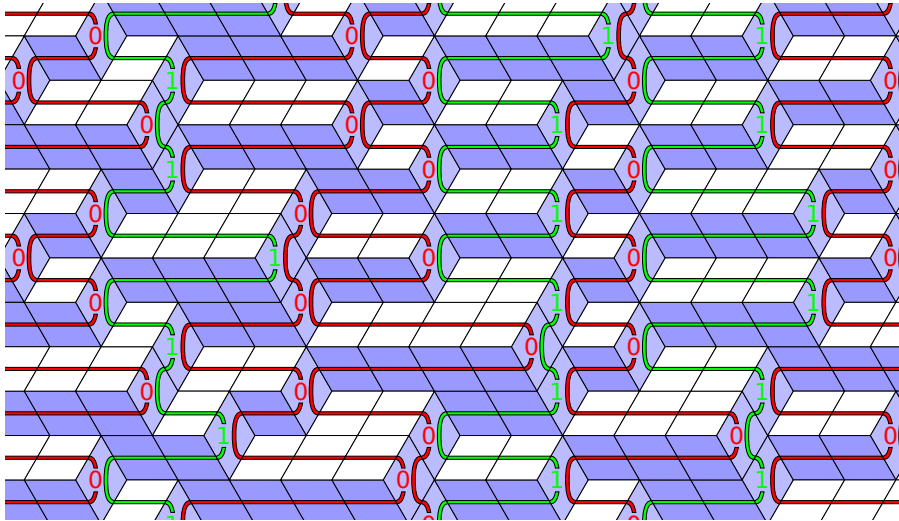


FIGURE 2.6 – Chaque bande de ce pavage fluctue autour d’un mot sturmien dont la pente ne dépend que de la direction de la bande. Il faut assurer que si α et β sont les pentes de bandes de directions différentes, alors (α, β) est dans le bon fermé effectif. Pour cela, on encode le mot sturmien de pente β sur les bandes de pente α (ce sont les 0 et 1 dessinés sur les tuiles), les règles locales vérifiant alors que (α, β) est dans le fermé effectif exactement de la même façon qu’elles vérifiaient que α était une pente acceptable. Ce mot sturmien de pente β est ensuite diffusé dans le pavage (“fils” rouges ou verts) jusqu’aux bandes dans l’autre direction, qui peuvent alors vérifier qu’elles sont bien elles-mêmes de pente β .

Ces deux constructions donnent des règles locales intrinsèquement *faibles* à cause des fluctuations permises sur les bandes. Il faudrait un autre ingrédient pour espérer obtenir des règles fortes.

Cet autre ingrédient pourrait être celui des substitutions de Brun, représentées Fig. 1.8 au chapitre précédent. En effet, j’ai montré dans ma thèse (voir [7]) que l’ensemble limite de ces substitutions est l’ensemble des pavages planaires. Si cet ensemble s’avère sofique (Conjecture 1), alors un produit cartésien avec les règles locales faibles précédentes donnerait des règles locales fortes. La conjecture 1 entraîne donc logiquement la conjecture suivante

Conjecture 2 *Un ensemble de pavages planaires admet des règles locales fortes colorées si et seulement si l’ensemble des pentes est un fermé effectif.*

2.3 La barrière algébrique

Cette section est consacrée au cas des règles locales non colorés. C'est un travail en commun avec Nicolas Bédaride depuis 2011, qui a donné lieu à une série publications [3, 4, 5, 6] et est toujours en cours. Sans couleur, la situation change complètement : la calculabilité cède en effet place à l'algèbre.

2.3.1 Grassmanniennes

Soit E un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension d et M une matrice $n \times d$ dont les colonnes forment une base de E . Les **coordonnées grassmanniennes**³ de E sont définies (à constante multiplicative commune près car elles sont projectives) comme les C_n^d mineurs $d \times d$ de M . Elles caractérisent E et ne dépendent pas de la base choisie. On note G_{i_1, \dots, i_d} la grassmannienne obtenue à partir des lignes i_1, \dots, i_d de M .

L'ensemble des sous-espaces de \mathbb{R}^n de dimension d formant une variété algébrique de dimension $d(n-d)$, des réels G_{i_1, \dots, i_d} ne sont pas toujours des grassmanniennes. Ils le sont si et seulement s'ils ne sont pas tous nuls et vérifient les **relations de Plücker**, définies pour $1 \leq k \leq d$ par

$$G_{i_1, \dots, i_d} G_{j_1, \dots, j_d} = \sum_{l=1}^d \underbrace{G_{i_1, \dots, i_d} G_{j_1, \dots, j_d}}_{\text{échanger } i_k \text{ et } j_l},$$

où, par convention, transposer deux indices d'une grassmanniennes revient à changer son signe, et une grassmannienne avec deux indices égaux est nulle.

Les pavages offrent une interprétation naturelle des grassmanniennes. En effet, après avoir divisé les grassmanniennes par leur norme 1, la valeur absolue de G_{i_1, \dots, i_d} donne la fréquence de la tuile T_{i_1, \dots, i_d} dans le pavage planaire de pente E , où T_{i_1, \dots, i_d} est la tuile obtenue en projetant sur E une face unité engendrée par les vecteurs $\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_d}$ de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Par exemple, les grassmanniennes des pavages d'Ammann-Beenker, calculées à partir de la base de leur pente donnée Section 2.1, sont

$$G_{12} = G_{14} = G_{23} = G_{34} = 1 \quad \text{et} \quad G_{13} = G_{24} = \sqrt{2}.$$

3. Une introduction plus complète aux coordonnées grassmanniennes peut être trouvé dans [HP94, chap. 7].

Elle vérifient la seule relation de Plücker non triviale qui existe dans ce cas :

$$G_{12}G_{34} = G_{13}G_{24} - G_{14}G_{23}.$$

On en déduit aussi que ces pavages contiennent $2\sqrt{2}$ carrés pour 4 losanges.

2.3.2 Coïncidences

Une **coïncidence** d'un sous-espace affine E de \mathbb{R}^n de dimension d est un point de la fenêtre qui appartient à la projection de $n - d + 1$ faces $n - d - 1$ -dimensionnelles de cubes unités de \mathbb{Z}^n . Lorsqu'on modifie la pente d'un pavage planaire, la rupture d'une coïncidence correspond à l'apparition d'un nouveau motif. Les figures 2.7 et 2.8 illustrent ceci pour $n = 2$ et $d = 1$.

Introduite dans [5], la notion de coïncidence relie donc la combinatoire d'un pavage planaire et la géométrie de sa pente. Plus précisément, si un pavage planaire admet des règles locales non colorées, alors sa pente est caractérisée par un nombre fini de coïncidences.

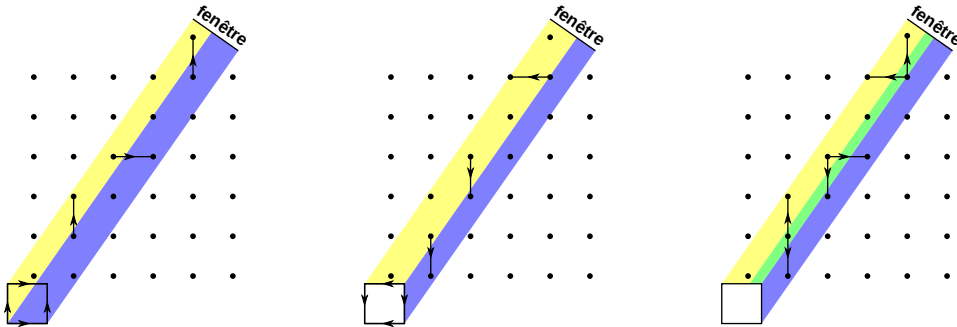


FIGURE 2.7 – Coupe de \mathbb{R}^2 par une droite E . Si un point de \mathbb{Z}^2 se projette sur la face gauche ou inférieure du carré qui définit la bande $E + [0, 1]^2$, alors il est suivi d'un segment respectivement horizontal ou vertical (à gauche). S'il se projette sur la face droite ou supérieure de ce même carré, alors il est suivi d'un segment respectivement horizontal ou vertical (au centre). Le carré partitionne donc la fenêtre en trois régions, chacune associée à un motif formé de deux segments (à droite). Plus généralement, les projections des segments unités à coordonnées entières dans $[0, k]$ découpent la fenêtre en $2k + 1$ régions qui correspondent aux motifs de taille $2k$.

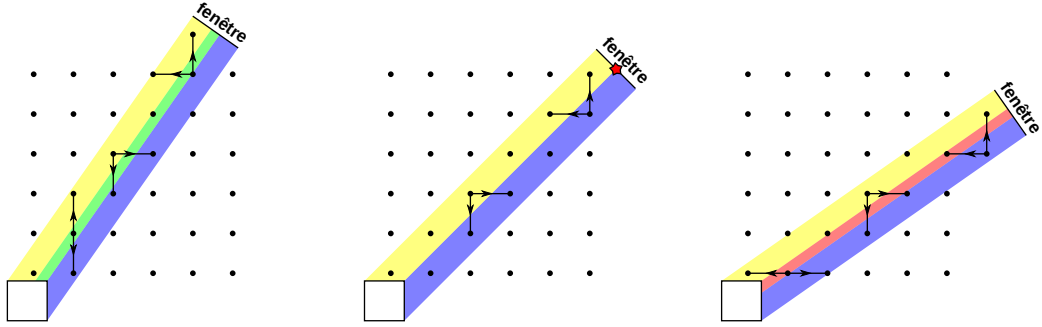


FIGURE 2.8 – Coupe de \mathbb{R}^2 par une droite. La fenêtre est partitionnée en trois régions, chacune associée à un motif formé de deux segments (à gauche). Tourner la droite modifie leurs tailles, et lorsque la pente atteint 45° , la région associée aux deux segments verticaux se réduit à un point (une coïncidence marquée par une étoile, au centre) : le motif disparaît ! Tourner plus casse la coïncidence et crée une nouvelle région, donc un nouveau motif (à droite).

Considérons une coïncidence. C'est la projection de points $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-d}$ de \mathbb{R}^n ayant chacun au plus $n-d-1$ coordonnées non entières. Notons $\mathbb{Q}(G)$ le corps des fractions rationnelles dont les indéterminées sont les grassmanniennes de E . Soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d$ une base de E , qu'on peut toujours choisir de sorte à ce que les coordonnées de \vec{u}_i soient dans $\mathbb{Q}(G)$. Le fait que les \vec{x}_i se projettent sur un même point se traduit par

$$\vec{x}_0 - \vec{x}_i = \sum_{k=1}^d \lambda_{ik} \vec{u}_k, \quad i = 1, \dots, n-d,$$

qu'on peut voir comme un système linéaire de $n(n-d)$ équations à coefficients dans $\mathbb{Q}(G)$ dont les inconnues sont les λ_{ik} et les coordonnées potentiellement non entières de chaque \vec{x}_i . Le nombre total d'inconnues est

$$d(n-d) + (n-d+1)(n-d-1) = d(n-d) + (n-d)^2 - 1 = n(n-d) - 1,$$

soit une de moins que le nombre d'équations. L'existence d'une solution (la coïncidence) se traduit donc par une relation sur les coefficients de ces équations, *i.e.*, une équation algébrique sur les grassmanniennes de E .

Par exemple, une coïncidence d'un plan de \mathbb{R}^4 se traduit par une équation quadratique à coefficients entiers de la forme (à permutation des indices près)

$$aG_{14}G_{23} - bG_{13}G_{24} + cG_{12}G_{34} + dG_{24}G_{34} + eG_{14}G_{34} + fG_{14}G_{24} = 0.$$

En particulier, si un pavage planaire admet des règles locales non colorées, alors l'ensemble fini de coïncidences qui caractérisent sa pente se traduit par un système d'équations algébriques sur les grassmanniennes de sa pente. On retrouve ainsi la "barrière algébrique" découverte par Le :

Théorème 6 ([Le97]) *Si un pavage planaire admet des règles locales (faibles ou fortes) non colorées, alors sa pente est algébrique.*

Cette condition nécessaire n'est cependant pas suffisante. Par exemple, les pavages d'Ammann-Beenker sont des pavages planaires de pente algébrique, et même quadratique car ses grassmanniennes sont dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, mais ils n'admettent pas de règles locales non colorées ([Bur88], voir aussi [5]). Peut-on trouver une condition nécessaire et suffisante ?

2.3.3 Sous-périodes

Le cas des pavages canoniques de codimension 1 est assez simple : un pavage planaire $n \rightarrow n - 1$ admet des règles locales non colorées si et seulement si sa pente est rationnelle (voir, par exemple, [Lev88]). C'est en codimension supérieure que la situation se complique.

Ceci nous a conduit, dans [6], à introduire les **ombres** d'un pavage canonique de codimension d : ce sont les pavages de codimension 1 obtenus en choisissant $d + 1$ des directions des arêtes de leurs tuiles parmi les C_n^d directions possibles, puis en contractant toutes les arêtes dans les autres directions. En d'autres termes, en voyant un pavage canonique comme une variété d -dimensionnelle de \mathbb{R}^n (chaque direction d'arête de tuile correspondant à un vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n), ses ombres sont les pavages de codimension 1 obtenus par projection sur l'espace engendré par $d + 1$ vecteurs de la base canonique (Fig. 2.9).

L'idée était de chercher à comprendre un pavage canonique de grande codimension à partir de ses ombres de codimension 1. Or il s'est avéré que des exemples classiques comme les pavages d'Ammann-Beenker ou de Penrose avaient des ombres très particulières : elles sont toutes périodiques (Fig. 2.9). Nous avons alors introduit la notion de **sous-période** d'un pavage canonique : c'est une période minimale d'une ombre de ce pavage.

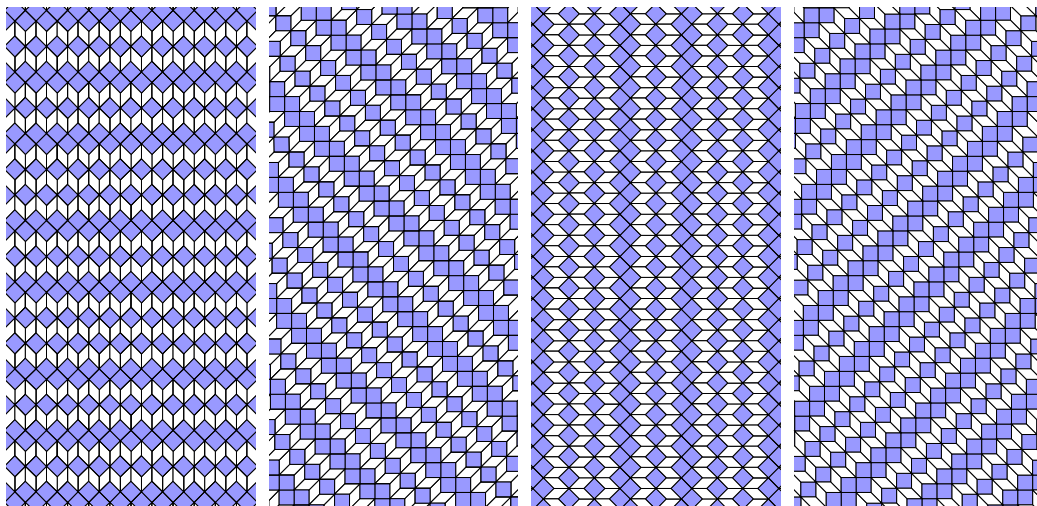


FIGURE 2.9 – Les ombres d’un pavage d’Ammann-Beenker sont périodiques.

Nous avons montré qu’on peut forcer un pavage canonique à avoir une sous-période donnée en interdisant un nombre fini de motifs finis [6]. Ainsi, à l’instar des coïncidences, les sous-périodes relient la combinatoire d’un pavage planaire à la géométrie de sa pente.

Dans le cas d’un pavage planaire de pente E , une sous-période se traduit par une relation linéaire entière entre $d + 1$ grassmanniennes de E dont les indices sont prennent au plus $d + 1$ valeurs différentes. En particulier, il est facile de vérifier si les sous-périodes d’un pavage planaire caractérisent sa pente, ou du moins un nombre fini de pentes. On parle de sous-périodes **déterminantes**.

Par exemple, les pavages d’Ammann-Beenker ont quatre sous-périodes :

$$G_{12} = G_{14}, \quad G_{12} = G_{23}, \quad G_{14} = G_{34}, \quad G_{23} = G_{34}.$$

Soulignons que $G_{13} = G_{24}$ n’est pas une sous-période car les indices des grassmanniennes utilisées prennent quatre valeurs différentes. Ces sous-périodes ne sont pas déterminantes car le système polynomial formé par ces quatre équations et la relation de Plücker a pour solutions (en normalisant à $G_{12} = 1$) :

$$G_{12} = G_{14} = G_{23} = G_{34} = 1 \quad \text{et} \quad G_{13}G_{24} = 2.$$

C'est une hyperbole de l'espace des plans de \mathbb{R}^4 (qui est de dimension 4). Le pavage d'Ammann-Beenker correspond à $G_{13} = G_{24}$, les autres étant en fait les *pavages de Beenker* [Bee82]. La figure 2.10 représente une branche de cette hyperbole, paramétrée par $t = G_{13}$ (l'autre branche est identique).

On a vu que les pavages canoniques de codimension 1 ont des règles locales si et seulement si leur pente est rationnelle, ce qui s'avère être équivalent à avoir des sous-périodes déterminantes. C'est encore le cas pour les pavages $4 \rightarrow 2$ (tels les pavages de Beenker), aussi appelés **pavages octogonaux** :

Théorème 7 ([3, 6]) *Un pavage planaire octogonal admet des règles locales faibles non colorées si et seulement si ses sous-périodes sont déterminantes.*

Plus précisément, on prouve dans [6] que si un pavage planaire a des sous-périodes déterminantes alors il admet des règles locales faibles non colorées (résultat qui est en fait déjà plus ou moins contenu dans [Lev88]), et on prouve la réciproque dans [3] (ce qui répond à une conjecture de [Le95]).

Un autre cas générique est celui des **pavages d'ordre $2n$** , qui sont les pavages planaires de dimension 2 dont la pente est engendré par les vecteurs

$$(\cos(2k\pi/n))_{0 \leq k < m} \quad \text{et} \quad (\sin(2k\pi/n))_{0 \leq k < m},$$

avec $m = n$ si n est impair ou $m = n/2$ sinon. Le nom de ces pavages vient du fait qu'ils ont une symétrie rotationnelle locale d'ordre $2n$, *i.e.*, l'ensemble de leurs motifs finis est stable par rotation d'angle π/n (mais pas forcément le pavage entier lui-même). Nous en avons déjà vu : les pavages d'Ammann-Beenker (Fig. 2.2) sont d'ordre 8, ceux de Penrose (Fig. 2) d'ordre 10, et celui Fig. 2.4 d'ordre 14. Socolar a montré qu'ils admettaient des règles locales faibles non colorées quand n était impair [Soc90]. Nous avons montré qu'ils n'en n'admettaient pas pour n pair [5]. Nous avons aussi montré que leur sous-périodes étaient déterminantes si et seulement si n était impair [6]. D'où, au final :

Théorème 8 ([Soc90],[5, 6]) *Un pavage d'ordre $2n$ a des règles locales faibles non colorées si et seulement si ses sous-périodes sont déterminantes.*

Mentions encore quelques exemples isolés vérifiant cette caractérisation : les pavages icosaédraux [2] ou un pavage dodécagonal cubique [6]. Tout ceci nous conduit à nous demander si cette caractérisation n'est pas générale :

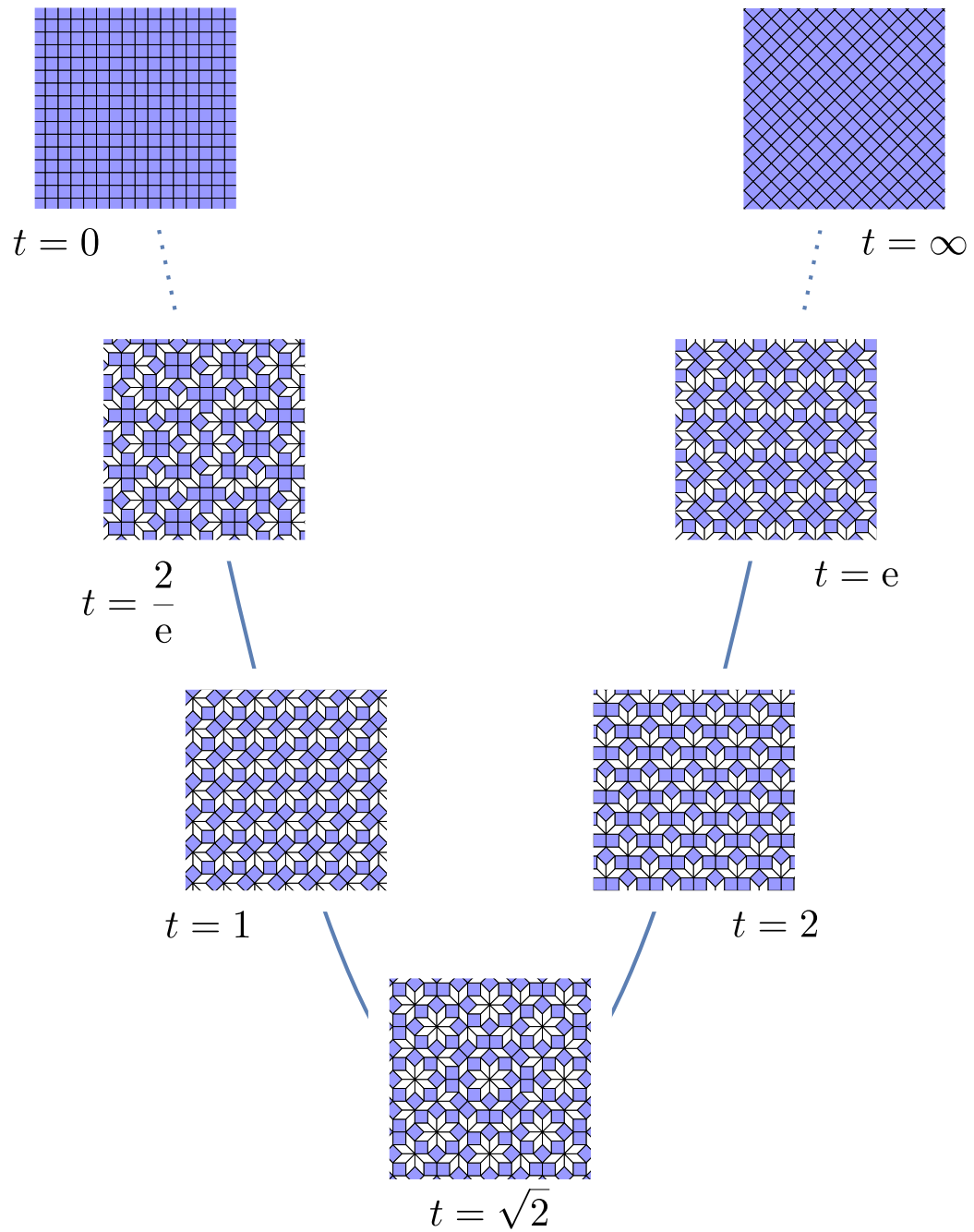


FIGURE 2.10 – Les pentes des pavages de Beenker forment une hyperbole. Les pavages d’Ammann-Beenker ($|t| = \sqrt{2}$) minimisent la proportion de carrés.

Conjecture 3 *Un pavage planaire admet des règles locales faibles non colorées si et seulement si ses sous-périodes sont déterminantes.*

L'implication directe est un problème *a priori* purement algébrique : une pente caractérisée par des coïncidences (un nombre fini d'équations algébriques qu'on montre être homogènes de degré $n - d$) est-elle toujours caractérisée par ses seules sous-périodes (au plus $d \times C_n^{d+1}$ équations linéaires, sans oublier dans les deux cas d'ajouter les relations de Plücker, soit encore au plus $d \times (C_n^d)^2$ équations algébriques homogènes de degré d) ? L'implication réciproque est, elle, géométrique : un pavage avec des sous-périodes déterminantes est-il nécessairement planaire ?

2.3.4 Planarité

Plus généralement, on peut se demander à quelle condition les pavages canoniques partageant un ensemble donné de sous-périodes sont tous planaires, c'est-à-dire quand est-ce que des sous-périodes forcent la planarité. Cela peut en effet arriver pour des sous-périodes non déterminantes.

C'est par exemple le cas des pavages d'Ammann-Beenker ([Kat95], [4]) : ses sous-périodes ne sont pas déterminantes mais il n'y a que des pavages planaires qui peuvent avoir ces sous-périodes (Fig. 2.11).

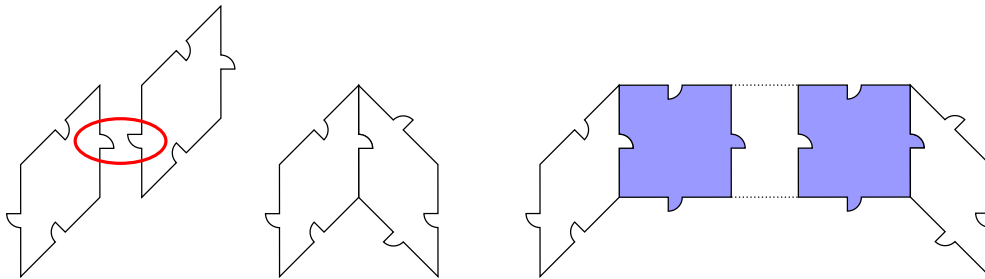


FIGURE 2.11 – Un carré et un losange indentés qui forment exactement les pavages dans les bandes desquels les losanges alternent. Ce sont les pavages canoniques qui ont les quatre sous-périodes des pavages d'Ammann-Beenker, c'est-à-dire les pavages de Beenker (Fig. 2.10). Ce qui montre au passage que l'ensemble des pavages de Beenker est sofique, ce qu'on savait déjà grâce au théorème 5 mais avec un nombre de tuiles sans commune mesure !

Nous avons montré dans [6] que les sous-périodes des pavages d'ordres $2n$ pour n pair caractérisent une famille à un paramètre de pentes et forcent la planarité pour n multiple de 4 ou 6. On retrouve Ammann-Beenker (ordre 8) pour $n = 4$. Le cas $n = 6$ est connu sous le nom de pavage dodécagonal. Dans ces deux cas, certains pavages sont périodiques (ceux dont la grassmannienne G_{13} est rationnelle). À partir de $n = 8$, par contre, on obtient un continuum de pavages planaires tous apériodiques ! Au delà du cas n impair et de n multiple de 4 ou 6, nous conjecturons que les sous-périodes des pavages d'ordre $2n$ forcent en fait toujours la planarité :

Conjecture 4 *Les sous-périodes des pavages d'ordre $2n$ forcent la planarité.*

Peut-on aller plus loin ? Quelques essais non publiés (voir, par exemple, Fig. 2.12) nous conduisent à conjecturer :

Conjecture 5 *Un ensemble de sous-périodes forcent la planarité si et seulement si les seules variétés différentiables dont les espaces tangents ont tous ces sous-périodes sont des variétés affines.*

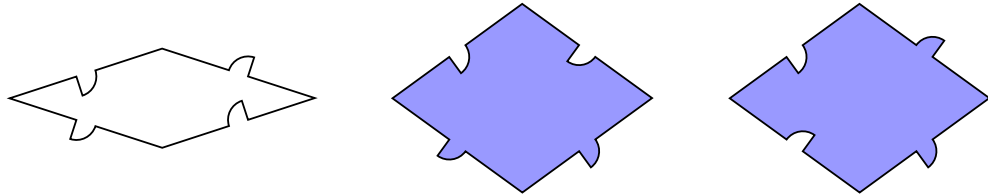


FIGURE 2.12 – Les sous-périodes des pavages de Penrose sont déterminantes et forcent la planarité. Elles correspondent en fait à deux alternances indépendantes dans les bandes, une pour chaque type de losange (Fig. 4 p. 5). Les trois tuiles ci-dessus sont indentées de sorte à former les pavages où les losanges fins alternent tandis que les losanges gras son libres. Il s'agit d'une sorte d'hybride entre les tuiles originales de Penrose et celles de la figure 2.11. Cela revient à ne garder que la moitié des sous-périodes originales. On montre facilement que ces sous-périodes caractérisent une famille à deux paramètres de pentes. On montre aussi que toute surface différentiable de \mathbb{R}^5 dont les plans tangents sont dans cette famille à deux paramètres est elle-même un plan. Peut-on en déduire que ces tuiles ne forment que des pavages planaires ?

2.3.5 Épaisseur

Dans ce qui précède, toutes les conditions suffisantes pour l'existence de règles locales non colorées concernent des règles locales faibles. Les preuves sont de plus très qualitatives et ne donnent pas de borne explicite sur l'épaisseur des pavages quasiplanaires permis par ces règles faibles.

Dans [Lev88], Levitov donne une condition nécessaire pour qu'un pavage canonique de dimension 2 ait des règles locales non colorées fortes : la *SI-condition*. Cette condition revient à dire que toutes les ombres du pavage ont au moins une sous-période – on dit que les sous-périodes sont **complètes**. Bien que n'ayant guère d'éléments pour étayer cela, nous conjecturons

Conjecture 6 *Un pavage planaire admet des règles locales fortes non colorées si et seulement si ses sous-périodes sont complètes et déterminantes.*

Une conséquence de cette conjecture, si elle s'avère vraie, serait qu'il n'y a pas de différence entre règles locales non colorées fortes et faibles dans le cas des pavages octogonaux, car dans ce cas des sous-périodes déterminantes sont nécessairement complètes. C'est cependant faux pour des pavages canoniques plus généraux, comme l'a montré l'exemple Fig. 2.4.

Chapitre 3

Dynamique de flips

3.1 Graphe des flips

Étant données $d + 1$ tuiles d'un pavage canonique $n \rightarrow d$ qui ont en commun un sommet, la région qu'elles pavent s'avère admettre exactement un autre pavage par ces mêmes tuiles (obtenu en translatant chaque tuile par le vecteur commun aux d autres tuiles). Un **flip** est l'opération élémentaire qui passe de l'un à l'autre (Fig 3.1).

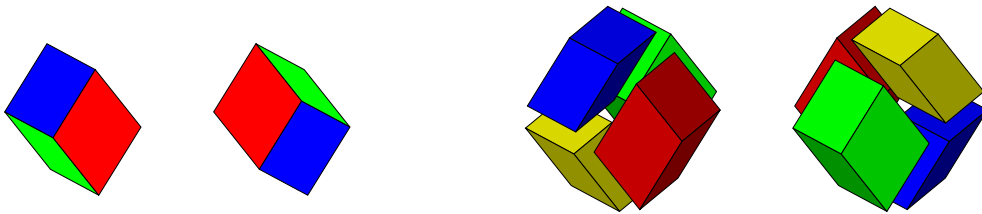
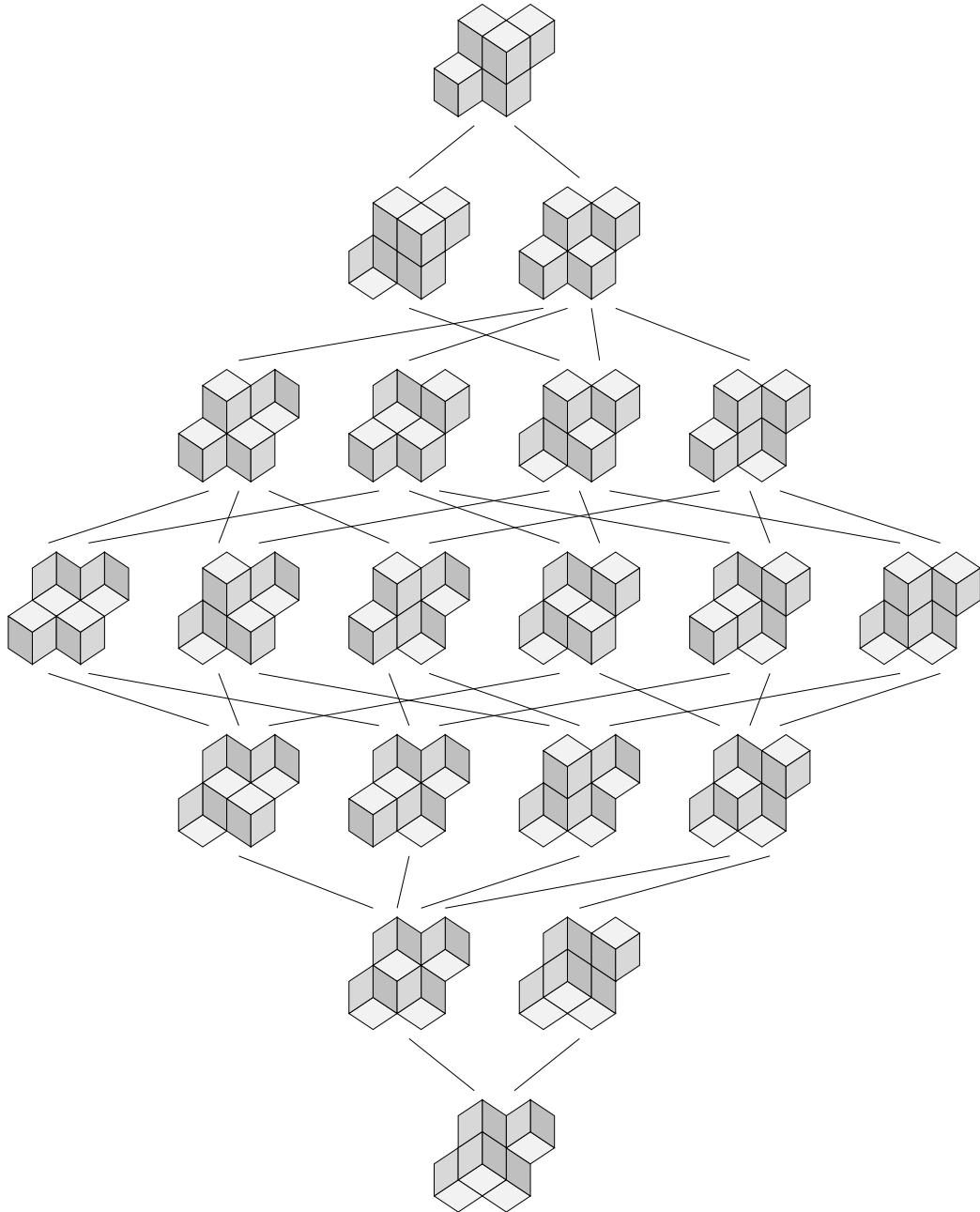


FIGURE 3.1 – Flip en dimension 2 (à gauche) et 3 (à droite, vue explosée).

Les flips agissent sur les pavages canoniques, qu'ils soient infinis (pavage de l'espace entier) ou finis (pavage d'une région compacte). On associe à un pavage (ou à la région qu'il pave) son **graphe des flips** : c'est le graphe non-orienté dont les sommets sont les pavages de la même région, deux sommets étant reliés si les pavages correspondants diffèrent d'un flip. La figure 3.2 illustre le cas d'un petit pavage $3 \rightarrow 2$.

FIGURE 3.2 – Graphe des flips d'un pavage $3 \rightarrow 2$ avec 12 tuiles.

En particulier, le graphe des flips de la figure 3.2 est connexe. Avec Olivier Bodini et Éric Rémila, nous avons donné dans [13] une condition nécessaire et suffisante pour que deux pavages $n \rightarrow 2$ du plan entier soient reliés par une suite (possiblement infinie) de flips. Cette condition s'exprime en termes d'**ombre**, dans un sens similaire mais différent des ombres définies au chapitre précédent (page 29) : il s'agit ici des projections du pavage sur l'espace engendré par *deux* vecteurs de la base canonique (au lieu de trois).

Théorème 9 ([13]) *Soient \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 deux pavages $n \rightarrow 2$. Alors \mathcal{P}_1 peut être transformé en \mathcal{P}_2 par une suite (potentiellement infinie) de flips si et seulement si les ombres de \mathcal{P}_2 sont incluses dans celles de \mathcal{P}_1 .*

Un premier corollaire est que les pavages planaires sont toujours reliés par des flips (sauf dans le cas dégénéré d'une pente avec une coordonnée grassmannienne nulle, c'est-à-dire que certaines tuiles ne sont pas utilisées). Ceci provient du fait que ces pavages ont des ombres toutes égales à \mathbb{R}^2 tout entier.

Un deuxième corollaire est la connexité du graphe des flips d'un pavage $n \rightarrow 2$ d'une région compacte *sans trou* (cette hypothèse de simple connexité est cruciale pour la connexité du graphe). Ce résultat, connu depuis [Ken93]¹, découle ici du fait que l'ombre d'un pavage fini ne dépend que de la région qu'il pave.

Un troisième corollaire, dû au caractère constructif de la preuve, est que le diamètre du graphe des flips d'un pavage $n \rightarrow d$ avec N tuiles est au plus dN^3 . Cette borne n'est cependant sans doute pas optimale, en tous cas pas en petite codimension comme nous allons voir.

Pour étudier plus finement le graphe des flips, nous avons introduit avec Olivier Bodini et Éric Rémila [12] une **distance de Hamming** sur les pavages $n \rightarrow 2$, voir Fig. 3.3. Elle s'avère donner des informations précises sur les flips en codimension 1 ou 2 :

Théorème 10 ([9, 12]) *La distance de Hamming entre deux pavages $3 \rightarrow 2$ ou $4 \rightarrow 2$ d'une même région est égale au nombre minimal de flips les reliant.*

1. Cette preuve comporte cependant une erreur.

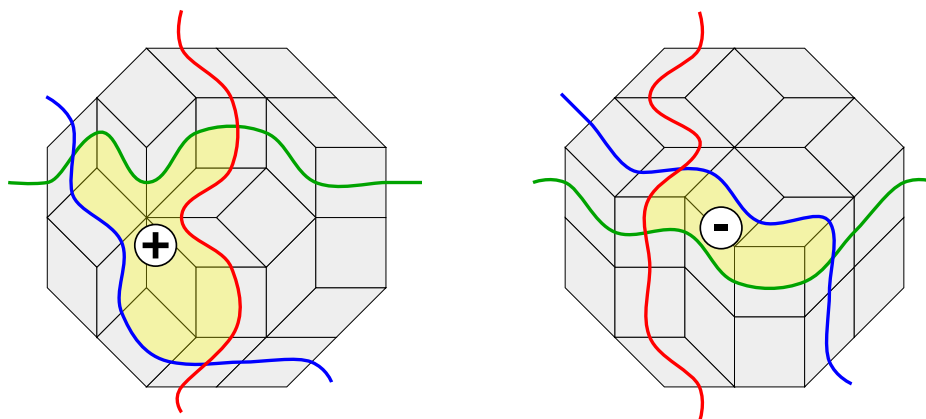


FIGURE 3.3 – Les tuiles d'un pavage $n \rightarrow 2$ forment des bandes faites de losanges qui partagent tous une même direction d'arête (trois sont ici matérialisées par des lignes continues). Trois bandes qui se coupent forment un *triangle* (ici teinté en jaune) auquel on peut assigner dans chaque pavage un *signe*, selon que deux bandes données se coupent d'un côté ou de l'autre de la troisième bande. La distance de Hamming entre deux pavages est le nombre de triangles dont le signe est différent dans les deux pavages (ici 15).

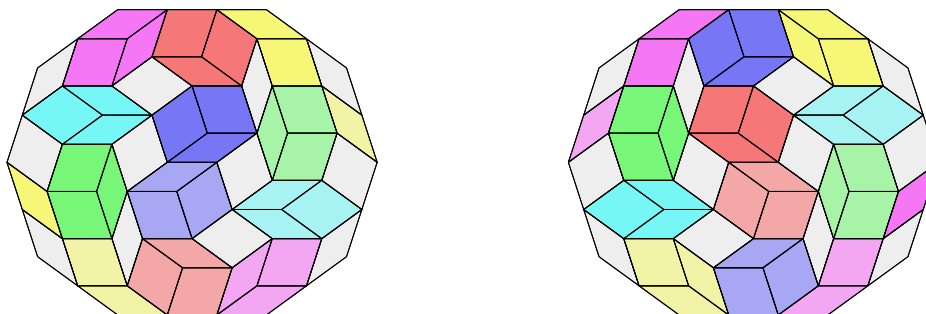


FIGURE 3.4 – Deux pavages $5 \rightarrow 2$ d'une même région. Leur distance de Hamming est 32. Les flips possibles (tuiles teintées) forment des triangles qui ont chacun le même signe dans les deux pavages. Toute suite de flip reliant ces pavages commencera donc par inverser un triangle qui devra ultérieurement être remis dans sa position initiale. La plus courte suite sera en conséquence de longueur au moins 34 (ce qui est le cas ici).

On déduit de ce théorème une borne (atteinte) sur le diamètre du graphe des flips d'un pavage $3 \rightarrow 2$ ou $4 \rightarrow 2$ avec N tuiles. Ce dernier est respectivement inférieur à $(N/3)^{3/2}$ et $\sqrt{2}(N/3)^{3/2}$. La borne générique dN^3 pour les pavages $n \rightarrow 2$ n'est donc pas optimale. Et en codimension supérieure ?

La combinatoire devenant de plus en plus compliquée, nous avons cherché une preuve par ordinateur avec Michael Rao [9], ce qui nous a permis de vérifier les codimensions 1 et 2 mais nous a finalement révélé un exemple montrant que ce résultat pouvait être faux dès la codimension 3, voir Fig. 3.4. Il y a donc une sorte d'obstruction qui n'apparaît qu'à partir de la codimension 3.

Mentionons que dans le cas des pavages $3 \rightarrow 2$, aussi appelés *pavages par dimères* et tout particulièrement étudiés (voir, par exemple, [DTF14, Ken00]), le graphe des flips a une structure de *treillis distributif* [Pro93]. Ce n'est plus le cas pour les pavages $4 \rightarrow 2$, mais le graphe des flips peut néanmoins être vu comme un *ordre gradué*, c'est-à-dire qu'on peut associer à chaque pavage un entier, son *rang*, qu'un flip modifie toujours exactement d'une unité [CR06]. Et en codimension supérieure ?

Nous n'avons considéré ici que la dimension 2. En dimension supérieure la situation se complique encore. En effet, dès la dimension 3 même la connexité du graphe des flips n'est pas toujours assurée [DD05].

3.2 Flips aléatoires

Les flips permettent d'effectuer sur les pavages canoniques des marches aléatoires qui, outre leur intérêt en physique (modélisation), peuvent servir à générer des pavages typiques afin d'en observer les propriétés. Formellement, soit \mathcal{M}_∞ la chaîne de Markov² à temps discret dont l'action sur chaque pavage du graphe des flips consiste à

1. choisir au hasard³ un flip, *i.e.*, une configuration formée de $d+1$ tuiles ;
2. choisir au hasard un sommet x du pavage ;
3. si la configuration choisie apparaît en x , effectuer le flip correspondant.

2. Le sens de l'indice ∞ du nom de la chaîne deviendra clair Section 3.3.

3. Sauf précision contraire, tous les choix "au hasard" seront uniformes.

Cette chaîne est apériodique car la probabilité de ne rien faire est strictement positive. Elle est irréductible pour $d = 2$ car le graphe des flips est connexe. Elle a donc une unique distribution stationnaire pour $d = 2$, qui est uniforme car il y a autant de chance de faire un flip que de le défaire au pas suivant.

La convergence d'une chaîne de Markov ergodique (*i.e.*, apériodique et irréductible) vers sa distribution stationnaire π sur l'espace Ω se mesure par

$$d(t) := \max_{x \in \Omega} \frac{1}{2} \sum_{y \in \Omega} |P^t(x, y) - \pi(y)|,$$

où $P^t(x, y)$ est la probabilité que la chaîne partie de x soit en y après t pas. Bien qu'exponentiellement rapide en t , cette convergence peut être lente à cause de sa dépendance en le nombre $|\Omega|$ d'états. Aussi s'intéresse-t-on au comportement asymptotique quand $|\Omega| \rightarrow \infty$ du **temps de mélange**⁴ :

$$\tau_{\text{mix}} := \min\{t \mid d(t) \leq 1/4\}.$$

Il s'agit en quelque sorte de la "demi-vie" de la chaîne : la distance à la distribution stationnaire est en effet divisée (au moins) par 2 tous les τ_{mix} pas.

Une borne inférieure très simple du temps de mélange est la moitié du diamètre de Ω . En effet, si après t pas au plus la moitié de l'espace a été visité, alors $d(t) \geq 1/2$ et donc $t < \tau_{\text{mix}}$. Mais un petit diamètre ne signifie pas nécessairement un mélange rapide, comme l'illustre le cas d'école Fig. 3.5.

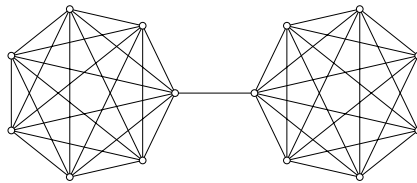


FIGURE 3.5 – Deux cliques de taille n reliées par un pont. Le diamètre de ce graphe est 3 mais son temps de mélange est $\Theta(n^2)$. Une distribution initialement concentrée sur un point mettra en effet longtemps à se répartir dans l'autre clique à cause du rôle de *goulot d'étranglement* joué par le pont.

4. Le lecteur souhaitant plus de détails peut se référer au très complet [LPW09].

Le cas des dimères est encore une fois le mieux connu. Le mélange est alors polynomial en la taille du pavage⁵ – on parle de **mélange rapide**. Précisément, le temps de mélange d'un pavage canonique $3 \rightarrow 2$ de N tuiles est en $O(N^{5/2} \log N)$ [LRS01, Wil04], et même en $O(N^2 \log N)$ si le bord est plat, *i.e.*, peut être dessiné sur un pavage planaire [CMT12, LT15].

Ces bornes sur les dimères ont été obtenues essentiellement par **couplage**, ce qui consiste à faire évoluer en parallèle deux copies d'une chaîne de Markov. L'idée est que lorsqu'elles coalescent, on ne peut plus les distinguer selon leur état de départ : le biais initial a été "oublié". Formellement, on prouve

$$\tau_{\text{mix}} \leq \max_{x,y \in \Omega} \mathbb{E}(\min\{t \mid X_t = Y_t, X_0 = x, Y_0 = y\}),$$

où (X_t, Y_t) peut être n'importe quel couplage de la chaîne considérée. La subtilité vient du choix de ce couplage, *i.e.*, de la *corrélation* des évolutions des états couplés.

Un exemple très simple pour illustrer ceci : voici deux couplages de la marche aléatoire sur n points du cercle qui reste sur place avec probabilité $1/2$, ou saute équiprobablement à gauche ou à droite sinon :

1. faire exactement la même chose sur les deux états couplés ;
2. quand l'un saute l'autre reste sur place.

Dans les deux cas, malgré la corrélation entre états couplés, chacun vu isolément suit la loi de la marche aléatoire. Cependant, seul le second couplage pourra coalescer un jour (en temps moyen $\Theta(n^2)$). Il y a couplage et couplage !

Pour les dimères, le couplage utilisé consiste à choisir un type de flip et un sommet x du réseau triangulaire, puis d'essayer de faire ce même flip en x sur chacun des deux pavages couplés. Ceux-ci ne sont pas toujours tous les deux modifiés⁶ : l'un peut rester sur place tandis que l'autre s'en rapproche... ou s'en éloigne, ce qui est une des difficultés pour borner le temps de coalescence.

Les sommets d'un pavage $n \rightarrow 2$ ne formant plus un réseau pour $n \geq 4$, le couplage précédent ne se généralise pas naturellement. Pour contourner ce problème, j'ai modifié la chaîne \mathcal{M}_∞ pour définir la chaîne \mathcal{M}_∞^t consistant à

5. Donc logarithmique en la taille du graphe des flips car on montre que le nombre de pavage d'une région compacte est exponentiel en le nombre de tuiles (sauf cas dégénérés).

6. Ce qui évite l'écueil du premier exemple de couplage de la marche sur le cercle.

1. choisir au hasard un signe σ , positif ou négatif;
2. choisir au hasard un triangle T du pavage (Fig. 3.3);
3. inverser T par un *unique* flip si possible et s'il est de signe σ .

Il y a alors un couplage naturel qui consiste à choisir même signe et même triangle dans les pavages couplés. De plus, \mathcal{M}_∞^t est identique à \mathcal{M}_∞ à *un ralentissement près*, dû au fait qu'il y a plus de triangles que de sommets⁷. Ce ralentissement est cependant *polynomial* car il y a $O(N^{3/2})$ triangles pour N sommets. Donc \mathcal{M}_∞^t mélange rapidement si et seulement si \mathcal{M}_∞ aussi.

Dans le cas des dimères, les simulations Fig. 3.6 suggèrent un temps de coalescence polynomial pour ce couplage de \mathcal{M}_∞^t , ce qui est conforme avec le mélange rapide de \mathcal{M}_∞ , donc de \mathcal{M}_∞^t . Mais les simulations Fig. 3.7 suggèrent un temps de coalescence *exponentiel* dans le cas des pavages $4 \rightarrow 2$. Peut-on en conclure que \mathcal{M}_∞^t , donc \mathcal{M}_∞ , mélangent lentement les pavages $4 \rightarrow 2$? Sur la base de simulations et d'arguments heuristiques, Destainville conjecture le contraire [Des01, Des02]. Peut-être est-ce notre couplage qui est problématique? Peut-être faudrait-il modifier différemment la chaîne \mathcal{M}_∞ ?

n	4	5	6	7	8	9	10	11
essais	6203	3130	1856	1170	1078	1055	1032	1023
écart type	631	1668	3340	7095	12248	19836	29176	47734
moyenne	1193	3326	7332	14909	26642	44554	70171	110219
$\lfloor \pi n^4 \log n \rfloor$	1115	3160	7295	14678	26758	45289	72338	110294

FIGURE 3.6 – Nombre de flips faits avant coalescence d'un couplage de \mathcal{M}_∞^t partant de deux pavages $3 \rightarrow 2$ extrémaux de l'hexagone de côté n .

n	1	2	3	4	5	6
essais	78025	65373	23573	11369	597	445
écart type	19	689	8419	88617	1322492	29196970
moyenne	21	920	10369	95348	1241423	27538962
$\lfloor \frac{1}{3} \log(\text{moyenne}) \rfloor$	1	2	3	4	5	6

FIGURE 3.7 – Nombre de flips faits avant coalescence d'un couplage de \mathcal{M}_∞^t partant de deux pavages $4 \rightarrow 2$ extrémaux de l'octogone de côté n (Fig. 3.8).

7. L'accélération due au fait qu'il peut y avoir plus de deux types de flips est négligeable.

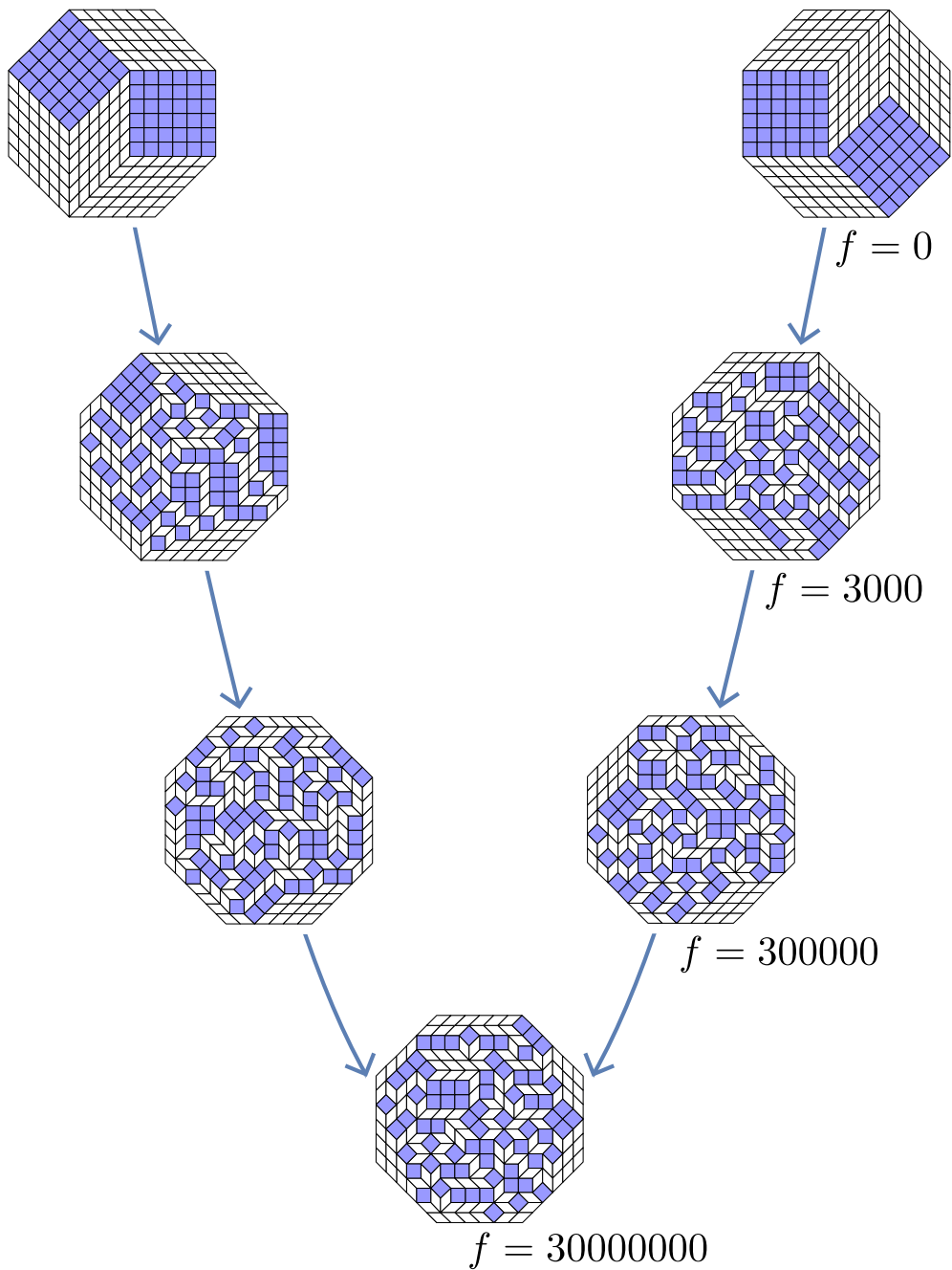


FIGURE 3.8 – Couplage de \mathcal{M}_∞^t sur deux pavages octogonaux. On devine facilement qui provient de qui après $f = 3000$ flips. C'est plus difficile après 300000 flips, et impossible après 30 millions, quand les pavages ont coalescé.

3.3 Flips contextuels

3.3.1 Principe

Nous combinons ici le graphe des flips avec les motifs finis du chapitre 2. Étant donné un ensemble fini de motifs finis, on appelle **énergie** d'un pavage canonique fini le nombre de ces motifs qu'il contient. Pour $T > 0$, on définit alors la chaîne de Markov \mathcal{M}_T qui consiste à

1. choisir au hasard un flip ;
2. choisir au hasard un sommet x du pavage ;
3. s'il est possible, faire le flip en x avec probabilité $\min(1, \exp(-\Delta E/T))$, où ΔE est la variation d'énergie du pavage quand on fait ce flip.

Le paramètre T , bien sûr appelé **température**, quantifie le rôle des motifs. Pour $T \rightarrow \infty$ on retrouve la chaîne \mathcal{M}_∞ de la section précédente, définie sans référence à aucun motif. À l'inverse, pour $T \rightarrow 0$, on obtient une chaîne notée \mathcal{M}_0 qui s'interdit tout flip augmentant strictement l'énergie du pavage.

La chaîne \mathcal{M}_T est en fait un classique de la mécanique statistique : c'est l'algorithme de Metropolis-Hastings pour échantillonner le graphe des flips selon la mesure de Gibbs

$$\mu(x) := \frac{1}{Z} \exp(-E(x)/T),$$

où $E(x)$ est l'énergie du pavage x et Z est un facteur de normalisation appelé fonction de partition du système. Une méthode tout aussi classique pour converger vers les pavages d'énergie minimale est alors le **recuit simulé**, qui consiste à modifier \mathcal{M}_T en faisant varier la température avec le temps jusqu'à $T = 0$ (la chaîne n'est donc plus homogène).

Généralement, le recuit simulé doit diminuer T exponentiellement lentement ([Haj88, BS12]). Remarquablement, il semblerait qu'ici la combinaison de propriétés du graphe des flips et des motifs caractérisant des pavages planaires permettent de simplement fixer $T = 0$ du début à la fin, ce qui correspond à effectuer une bête descente de gradient grâce à \mathcal{M}_0 . Plus précisément, nous allons essayer dans ce qui suit d'étayer la conjecture suivante.

Conjecture 7 *Pour un ensemble fini de motifs finis forçant la planarité, \mathcal{M}_0 converge rapidement vers un ensemble de pavages d'énergie minimale.*

3.3.2 Deux lettres et dimères

Avec Olivier Bodini et Damien Regnault, nous avons d'abord considéré le cas d'un mot sur deux lettres (pavages $2 \rightarrow 1$) avec pour motifs définissant l'énergie ceux constitués de deux lettres identiques consécutives [11]. Un flip échange deux lettres différentes consécutives, à l'exclusion de $xyxy \rightarrow xxyy$ qui augmente strictement l'énergie. Il existe un mot d'énergie nulle si et seulement s'il y a autant de lettres de chaque type, et il y en a alors deux : ce sont ceux qui alternent les deux types de lettres. Nous avons montré :

Théorème 11 ([11]) *Pour les motifs formés de deux lettres identiques consécutives, \mathcal{M}_0 converge rapidement, si possible, vers un mot d'énergie nulle.*

Avec Damien Regnault toujours, nous avons ensuite considéré le cas des pavages par dimères avec pour motifs définissant l'énergie ceux constitués de deux losanges adjacents identiques à translation près [19]. On distingue alors, selon leurs tuiles voisines (le "contexte"), 16 flips différents dont 5 interdits (Fig. 3.9). Les pavages d'énergie nulle sont les pavages planaires avec autant de losanges dans chacune des trois orientations possibles (leur existence dépend du bord de la région). Nous avons montré (voir aussi Fig. 3.10) :

Théorème 12 ([19]) *Pour les motifs formés de deux dimères identiques adjacents, \mathcal{M}_0 converge rapidement, si possible, vers un pavage d'énergie nulle.*

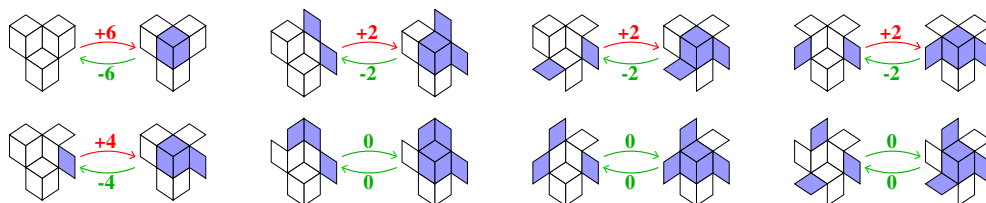


FIGURE 3.9 – Les flips sur un pavage par dimères et leur action sur l'énergie quand elle est égale au nombre de paires de losanges adjacents identiques.

Les preuves des deux théorèmes ci-dessus sont relativement techniques. Elles consistent à trouver une bonne métrique qui permette de montrer que la distance entre deux pavages couplés diminue en moyenne. Dans le cas des dimères, nous avons majoré le temps de coalescence de deux pavages par celui d'une sorte d'enveloppe convexe de ces pavages qui permet de les régulariser.

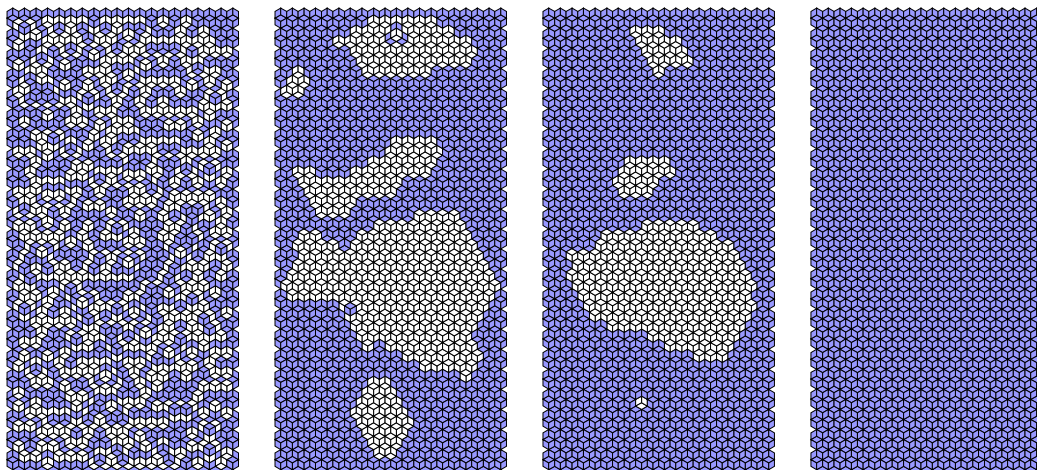


FIGURE 3.10 – Action de \mathcal{M}_0 sur un pavage par dimères à bord plat typique (de gauche à droite). L'énergie est la somme des périmètres des amas de même couleur. Elle diminue d'abord très rapidement avec la disparition des petits amas. Les gros amas centraux sont ensuite progressivement érodés, l'érosion semblant proportionnelle à une sorte de "courbure discrète".

Les régions pavées considérées sont compatibles avec un pavage d'énergie nulle, ce qui est le cas le plus simple à simuler car \mathcal{M}_0 se stabilise dès qu'elle tombe sur un pavage d'énergie nulle au lieu de continuer à errer sans fin dans l'ensemble des pavages d'énergie minimale.

Remarquons que \mathcal{M}_0 n'est pas irréductible (sauf bord ou motifs dégénérés pour lesquels tous les pavages ont la même énergie). Il s'agit en fait un *système dynamique à trou*, le trou étant l'ensemble des pavages d'énergie minimale. On préfère souvent décrire un tel système par ses distributions *quasistationnaires*, *i.e.*, conditionnées au fait de ne pas être tombé dans le trou (les distributions stationnaires sont juste l'enveloppe convexe des pavages d'énergie minimale).

Soulignons que la planarité des pavages d'énergie minimale semble jouer un rôle clef. Par exemple, si on définit au contraire l'énergie comme le nombre de lettres ou losanges différents adjacents, alors \mathcal{M}_0 se stabilise très rapidement sur un pavage qui n'est pas du tout d'énergie minimale (Fig. 3.11) : un véritable recuit simulé devient nécessaire !

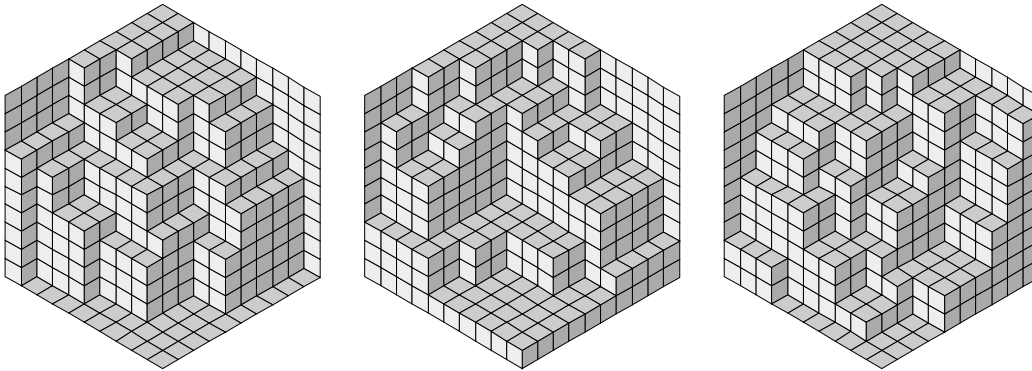


FIGURE 3.11 – Si on définit l'énergie comme le nombre de losanges différents adjacents, alors le "cube plein" et le "cube vide" sont les pavages d'énergie minimale (parmi ceux ayant ce bord). Cependant, partant d'un pavage quelconque, \mathcal{M}_0 se stabilise rapidement sur un pavage d'énergie généralement bien plus grande (comme les trois représentés ici).

3.3.3 Beenker et Penrose

Plusieurs milliards de flips sur les pavages de Beenker et Penrose m'ont convaincu que la conjecture 7 était vérifiée pour ces pavages [10]. Évidemment ça ne fait pas une preuve, laquelle reste un objectif majeur. De plus, ces simulations (un exemple est donné Fig. 3.12) sont à prendre avec du recul.

Un premier problème est de trouver le "pire" pavage, *i.e.*, celui que \mathcal{M}_0 mettra le plus longtemps à corriger (en moyenne...). Un bon candidat est un pavage d'énergie maximale, mais il n'est pas si simple d'en trouver un avec un bord qui soit compatible avec un pavage d'énergie nulle, *i.e.*, un bord dessinable sur un pavage de Beenker ou de Penrose selon le cas considéré. Nous avons aussi considéré l'alternative (justifiée par les motivations physiques sous-jacentes) consistant à partir d'un pavage typique, *i.e.*, tiré uniformément au hasard, mais c'est alors le problème du temps de mélange de \mathcal{M}_∞ qui revient par la fenêtre ! De plus, le temps de correction dépendra aussi de ce pavage initial tiré au hasard, ajoutant de l'incertitude à de l'incertitude...

Ce qui semble certain, c'est que la correction est *possible*, *i.e.*, il existe dans le graphe des flips un chemin qui réduit l'énergie à zéro sans jamais l'augmenter. Même ceci reste à démontrer pour Beenker ou Penrose !

Que le temps de correction soit polynomial semble aussi très probable car son écart type est assez faible (de l'ordre de 20% de sa moyenne, soit beaucoup moins que celui du temps de coalescence du couplage de \mathcal{M}_∞^t étudié Section 3.2), et sa moyenne colle bien à un modèle asymptotique de l'ordre de $N^{3/2}$ (resp. N^2) pour un pavage typique (resp. de grand énergie) de N tuiles (les tracés en échelle log-log sont visiblement linéaires).

N	842	1044	1240	1427	1538	1725	1922
essais	9999	5134	2932	1629	997	414	264
σ_{mix}	10393	13715	19916	25562	31545	46831	53184
μ_{mix}	14472	18730	27367	34505	42552	65215	73676
$\lfloor \frac{1}{2016} N^{5/2} \rfloor$	10204	17469	26857	38157	46015	61303	80333
σ_{cor}	236	303	424	502	604	802	991
μ_{cor}	1305	1683	2325	2817	3343	4587	5248
$\lfloor \frac{1}{125} N^{3/2} \log N \rfloor$	1317	1876	2488	3132	3541	4272	5097

FIGURE 3.12 – Action de \mathcal{M}_0 (et \mathcal{M}_∞) sur les pavages d'Ammann-Beenker. On part de \mathcal{P}_0 , un morceau de N tuiles d'un pavage d'Ammann-Beenker (pour avoir des bords compatibles). Un *essai* consiste alors à calculer une trajectoire $(\mathcal{P}_t)_{t \geq 0}$ sous l'action mélangeante de \mathcal{M}_∞ , tout en mesurant pour chaque t le temps mis par \mathcal{M}_0 pour corriger le pavage \mathcal{P}_t , et ceci jusqu'à ce temps de correction soit à peu près stabilisé (l'idée étant qu'il ne dépend alors plus trop de \mathcal{P}_t – le temps mélangeant semble alors ici polynomial, ce qui va plutôt dans le sens de la conjecture de Destainville mentionnée en fin de section 3.2). Ce tableau donne l'écart-type et la moyenne du nombre de flips faits lors de la phase mélangeante (σ_{mix} et μ_{mix}) et de la phase de correction (σ_{cor} et μ_{cor}), cette moyenne étant faite sur tous les essais. Un modèle asymptotique est proposé pour chacune de ces moyennes.

Bibliographie personnelle

- [1] P. Arnoux, V. Berthé, Th. Fernique, and D. Jamet. Functional stepped surfaces, flips and generalized substitutions. *Theoretical Computer Science*, 380 :251–265, 2007.
- [2] N. Bédaride and Th. Fernique. Icosahedral tilings revisited. Preprint. [arxiv:1608.03962](https://arxiv.org/abs/1608.03962).
- [3] N. Bédaride and Th. Fernique. Weak local rules for planar octagonal tilings. to appear in *Israel Journal of Mathematics*.
- [4] N. Bédaride and Th. Fernique. *Aperiodic Crystals*, chapter The Ammann–Beenker tilings revisited, pages 59–65. Springer Netherlands, Dordrecht, 2013.
- [5] N. Bédaride and Th. Fernique. No weak local rules for the 4p-fold tilings. *Discrete & Computational Geometry*, 54 :980–992, 2015.
- [6] N. Bédaride and Th. Fernique. When periodicities enforce aperiodicity. *Communications in Mathematical Physics*, 335 :1099–1120, 2015.
- [7] V. Berthé and Th. Fernique. Brun expansions of stepped surfaces. *Discrete Mathematics*, 311 :521–543, 2011.
- [8] V. Berthé, Th. Fernique, and M. Sablik. Effective S-adic symbolic dynamical systems. In A. Beckmann, L. Bienvenu, and N. Jonoska, editors, *Computability in Europe*, volume 9709 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 13–23. Springer, 2016.
- [9] O. Bodini, Th. Fernique, M. Rao, and É Rémila. Distances on rhombus tilings. *Theoretical Computer Science*, 412 :4787–4794, 2011.
- [10] O. Bodini, Th. Fernique, and D. Regnault. Crystallization by stochastic flips. *Journal of Physics : Conference Series*, 226 :012022, 2010.
- [11] O. Bodini, Th. Fernique, and D. Regnault. Stochastic flips on two-letter words. In M. J. Golin and R. Sedgewick, editors, *ANALCO*, pages 48–55. SIAM, 2010.

- [12] O. Bodini, Th. Fernique, and É. Rémila. A characterization of flip-accessibility for rhombus tilings of the whole plane. In *Language and Automata Theory and Applications LATA'07*, pages 139–150, 2007.
- [13] O. Bodini, Th. Fernique, and É. Rémila. A characterization of flip-accessibility for rhombus tilings of the whole plane. *Information and Computation*, 206 :1065–1073, 2008.
- [14] Th. Fernique. Multidimensional sturmian sequences and generalized substitutions. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 17 :575–600, 2006.
- [15] Th. Fernique. Local rule substitutions and stepped surfaces. *Theoretical Computer Science*, 380 :317–329, 2007.
- [16] Th. Fernique. Generation and recognition of digital planes using multi-dimensional continued fractions. *Pattern Recognition*, 42 :2229–2238, 2009.
- [17] Th. Fernique and N. Ollinger. Combinatorial substitutions and sofic tilings. In J. Kari, editor, *JAC*, pages 100–110. Turku Center for Computer Science, 2010.
- [18] Th. Fernique and E. Poloskin. [Un parquet de Penrose](#). *Images des Mathématiques du CNRS*, 2016.
- [19] Th. Fernique and D. Regnault. Stochastic flips on dimer tilings. In M. Drmota and B. Gittenberger, editors, *Analysis of Algorithms*, pages 205–218. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2010.
- [20] Th. Fernique and M. Sablik. Weak colored local rules for planar tilings. Submitted. [arxiv:1603.09485](#).
- [21] Th. Fernique and M. Sablik. Local rules for computable planar tilings. In E. Formenti, editor, *AUTOMATA & JAC*, volume 90 of *EPTCS*, pages 133–141, 2012.

Bibliographie générale

- [ABS04] P. Arnoux, V. Berthé, and A. Siegel. Two-dimensional iterated morphisms and discrete planes. *Theoretical Computer Science*, 319 :145–176, 2004.
- [AGS92] R. Ammann, B. Grünbaum, and G. C. Shephard. Aperiodic tiles. *Discrete & Computational Geometry*, 8 :1–25, 1992.
- [AI01] P. Arnoux and S. Ito. Pisot substitutions and Rauzy fractals. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society — Simon Stevin*, 8 :181–207, 2001.
- [AIS01] P. Arnoux, S. Ito, and Y. Sano. Higher dimensional extensions of substitutions and their dual maps. *Journal d'Analyse Mathématique*, 83 :183–206, 2001.
- [AS13] N. Aubrun and M. Sablik. Simulation of effective subshifts by two-dimensional subshifts of finite type. *Acta Applicandae Mathematicae*, 126 :35–63, 2013.
- [AS14] N. Aubrun and M. Sablik. Multidimensional effective S-adic subshifts are sofic. *Uniform Distribution Theory*, 9 :7–29, 2014.
- [BD14] V. Berthé and V. Delecroix. Beyond substitutive dynamical systems : S-adic expansions. *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 46 :81–123, 2014.
- [Bee82] F. P. M. Beenker. Algebraic theory of non periodic tilings of the plane by two simple building blocks : a square and a rhombus. Technical Report TH Report 82-WSK-04, Technische Hogeschool Eindhoven, 1982.
- [Ber66] R. Berger. *The Undecidability of the domino problem*. Number 66 in Memoirs of the American Mathematical Society. The American Mathematical Society, 1966.

- [BG13] M. Baake and U. Grimm. *Aperiodic Order*, volume 149 of *Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge University Press, 2013.
- [BH13] N. Bédaride and A. Hilion. Geometric realizations of two-dimensional substitutive tilings. *Quarterly Journal of Mathematics*, 64 :955–979, 2013.
- [BP97] M.-P. Béal and D. Perrin. Symbolic dynamics and finite automata. In *Handbook of formal languages*, volume 2, pages 463–505. Springer, 1997.
- [BP98] S. Brin and L. Page. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer Networks and ISDN Systems*, 30 :107–117, 1998.
- [BS12] T. W. Byington and J. E. S. Socolar. Hierarchical freezing in a lattice model. *Physical Review Letters*, 108 :045701, 2012.
- [Bur88] S. E. Burkov. Absence of weak local rules for the planar quasicrystalline tiling with the 8-fold rotational symmetry. *Communications in Mathematical Physics*, 119 :667–675, 1988.
- [CMT12] P. Caputo, F. Martinelli, and F.L. Toninelli. Mixing times of monotone surfaces and SOS interfaces : a mean curvature approach. *Communications in Mathematical Physics*, 311 :157–189, 2012.
- [CR06] F. Chavanon and E. Rémila. Rhombus tilings : decomposition and space structure. *Discrete & Computational Geometry*, 35 :329–358, 2006.
- [DB81] N. G. De Bruijn. Algebraic theory of Penrose’s nonperiodic tilings of the plane. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 43 :39–52, 1981.
- [DB86] N. G. De Bruijn. Dualization of multigrids. *Journal de Physique Colloques*, 47 :9–18, 1986.
- [DD05] V. Desoutter and N. Destainville. Flip dynamics in three-dimensional random tilings. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 38 :17–45, 2005.
- [Des01] N. Destainville. Mixing times of plane random rhombus tilings. In R. Cori, J. Mazoyer, M. Morvan, and R. Mosseri, editors, *Discrete Models : Combinatorics, Computation, and Geometry*, pages 1–22. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2001.

- [Des02] N. Destainville. Flip dynamics in octagonal rhombus tiling sets. *Physical Review Letters*, 88 :030601, 2002.
- [DRS12] B. Durand, A. Romashchenko, and A. Shen. Fixed-point tile sets and their applications. *Journal of Computer and System Sciences*, 78 :731–764, 2012.
- [DTF14] B. De Tilière and P. Ferrari. *Dimer models and random tilings*. Panoramas et synthèses. Société mathématique de France, 2014.
- [EMH⁺14] K. Edagawa, P. Mandal, K. Hosono, K. Suzuki, and Sh. Takeuchi. In situ high-resolution transmission electron microscopy observation of the phason-strain relaxation process in an Al-Cu-Co-Si decagonal quasicrystal. *Physical Review Letters B*, 70 :184202, 2014.
- [FHK02] A. Forrest, J. Hunton, and J. Kellendonk. *Topological invariants for projection method patterns*. Number 758 in Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, 2002.
- [GR86] F. Gähler and J. Rhyner. Equivalence of the generalised grid and projection methods for the construction of quasiperiodic tilings. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 19 :267–277, 1986.
- [GS98] Ch. Goodman-Strauss. Matching rules and substitution tilings. *Annals of Mathematics*, 147 :181–223, 1998.
- [Haj88] B. Hajek. Cooling schedules for optimal annealing. *Mathematics of Operations Research archive*, 13 :311–329, 1988.
- [Hen91] Ch. Henley. Random tiling models. In *Quasicrystals : The State of the Art*, pages 429–524. World Scientific, 1991.
- [HM10] M. Hochman and T. Meyerovich. A characterization of the entropies of multidimensional shifts of finite type. *Annals of Mathematics*, 171 :2011–2038, 2010.
- [HP94] W. V. D. Hodge and D. Pedoe. *Methods of algebraic geometry*, volume 2. Cambridge University Press, 1994.
- [Jan96] C. Janot. *Quasicrystals – a primer*. Oxford University Press, 1996.
- [Kat88] A. Katz. Theory of matching rules for the 3-dimensional Penrose tilings. *Communications in Mathematical Physics*, 118 :263–288, 1988.

- [Kat95] A. Katz. *Beyond Quasicrystals : Les Houches, March 7–18, 1994*, chapter Matching rules and quasiperiodicity : the octagonal tilings, pages 141–189. Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [Ken93] R. Kenyon. Tiling a polygone with parallelograms. *Algorithmica*, 9 :382–397, 1993.
- [Ken00] R. Kenyon. *The planar dimer model with boundary : A survey*, volume 13 of *CRM Monograph Series*, pages 307–328. American Mathematical Society, 2000.
- [LCCG96] S. Lyonnard, G. Coddens, Y. Calvayrac, and D. Gratias. Dynamics of phason hopping in AlFeCu and AlMnPd quasicrystals. *Physical Review Letters B*, 53 :3150–3160, 1996.
- [Le95] T. Q. T. Le. Local rules for pentagonal quasi-crystals. *Discrete & Computational Geometry*, 14 :31–70, 1995.
- [Le97] T. Q. T. Le. Local rules for quasiperiodic tilings. In *The mathematics of long-range aperiodic order (Waterloo, ON, 1995)*, volume 489 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 331–366. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [Lev86] L. A. Levin. Average case complete problems. *SIAM Journal on Computing*, 15(1) :285–286, 1986.
- [Lev88] L. S. Levitov. Local rules for quasicrystals. *Communications in Mathematical Physics*, 119 :627–666, 1988.
- [LM95] D. Lind and B. Marcus. *An Introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [Lot02] M. Lothaire. *Algebraic combinatorics on words*, volume 90 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [LP95] T. Q. T. Le and S. Piunikhin. Local rules for multi-dimensional quasicrystals. *Differential Geometry and its Applications*, 5 :10–31, 1995.
- [LPS92] T. Q. T. Le, S. Piunikhin, and V. Sadov. Local rules for quasiperiodic tilings of quadratic 2-planes in \mathbf{R}^4 . *Communications in mathematical physics*, 150 :23–44, 1992.
- [LPW09] D. A. Levin, Y. Peres, and E. L. Wilmer. *Markov chains and mixing times*. American Mathematical Society, 2009.

- [LRS01] M. Luby, D. Randall, and A. Sinclair. Markov chain algorithms for planar lattice structures. *SIAM Journal on Computing*, 31 :167–192, 2001.
- [LS84] D. Levine and P. J. Steinhardt. Quasicrystals : A new class of ordered structures. *Physical Review Letters*, 53 :2477–2480, 1984.
- [LT15] B. Laslier and F.L. Toninelli. Lozenge tilings, Glauber dynamics and macroscopic shape. *Communications in Mathematical Physics*, 338 :1287–1326, 2015.
- [Moz89] S. Mozes. Tilings, substitution systems and dynamical systems generated by them. *Journal d'Analyse Mathématique*, 53 :139–186, 1989.
- [Pen74] R. Penrose. The rôle of aesthetics in pure and applied mathematical research. *The Institute of Mathematics and its Applications Bulletin*, 10 :266–271, 1974.
- [Pen78] R. Penrose. Pentaplexity : a class of non-periodic tilings of the plane. *Eureka*, 39, 1978.
- [Pen79] R. Penrose. Set of tiles for covering a surface, 1979. US Patent 4,133,152.
- [PF02] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, volume 1794 of *Lecture notes in mathematics*. Springer, 2002.
- [PF03] N. Priebe Frank. Detecting combinatorial hierarchy in tilings using derived Voronoï tessellations. *Discrete & Computational Geometry*, 29 :459–467, 2003.
- [PFS14] N. Priebe Frank and L. Sadun. Fusion : a general framework for hierarchical tilings of \mathbb{R}^d . *Geometriae Dedicata*, 171 :149–186, 2014.
- [PK87] A. Pavlovitch and M. Kleman. Generalised 2D Penrose tilings : structural properties. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 20 :687–702, 1987.
- [Pou14] L. Pournin. The diameter of associahedra. *Advances in Mathematics*, 259 :13–42, 2014.
- [Pro93] J. Propp. Lattice structure for orientations of graphs. Preprint. [arxiv:math/0209005](https://arxiv.org/abs/math/0209005), 1993.

- [Rob71] R. M. Robinson. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones Mathematicae*, 12 :177–209, 1971.
- [Rob04] E. A. Robinson. Symbolic dynamics and tilings of \mathbb{R}^d . *Symbolic dynamics and its applications*, 60 :81–119, 2004.
- [Sad08] L. Sadun. *Topology of tiling spaces*. University lecture series. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [SBGC84] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. W. Cahn. Metallic phase with long-range orientational symmetry and no translational symmetry. *Phys. Rev. Let.*, 53 :1951–1953, 1984.
- [SD91] P. J. Steinhardt and D. P. DiVincenzo, editors. *Quasicrystals : The State of the Art*. World Scientific, 1991.
- [Sen95] M. Senechal. *Quasicrystals and geometry*. Cambridge University Press, 1995.
- [Soc89] J. E. S. Socolar. Simple octagonal and dodecagonal quasicrystals. *Physical Review B*, 39 :519–551, 1989.
- [Soc90] J. E. S. Socolar. Weak matching rules for quasicrystals. *Communications in Mathematical Physics*, 129 :599–619, 1990.
- [Thu89] W. P. Thurston. Groups, tilings and finite state automata. Lectures notes distributed in conjunction with the Colloquium Series, in *AMS Colloquium lectures*, 1989.
- [Wan60] H. Wang. Proving theorems by pattern recognition I. *Communications of the ACM*, 3 :220–234, 1960.
- [Wan61] H. Wang. Proving theorems by pattern recognition II. *Bell Systems technical journal*, 40 :1–41, 1961.
- [Wei00] K. Weihrauch. *Computable Analysis : An Introduction*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2000.
- [Wil04] D. B. Wilson. Mixing times of lozenge tiling and card shuffling markov chains. *Annals of Applied Probability*, 14 :274–325, 2004.
- [Wol02] S. Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media Inc., 2002.

