Reconnaissance Fractionnée de Droites et Plans Discrets

Thomas Fernique
Laboratoire d'Informatique Fondamentale
CNRS & Univ. Aix-Marseille

EJCIM Chambéry, 29 mars 2010

Reconnaissance de droites ou plans discrets : étape élémentaire du processus de vectorisation d'un objet acquis numériquement.

Reconnaissance de droites ou plans discrets : étape élémentaire du processus de vectorisation d'un objet acquis numériquement.

Principe : déterminer les/des paramètres (pente, vecteur normal) d'une droite ou d'un plan contenant un objet discret (points).

Reconnaissance de droites ou plans discrets : étape élémentaire du processus de vectorisation d'un objet acquis numériquement.

Principe : déterminer les/des paramètres (pente, vecteur normal) d'une droite ou d'un plan contenant un objet discret (points).

Plusieurs approches (réf. [1] des notes de cours).

On peut distinguer deux types d'approches :

En profondeur d'abord :

Déterminer totalement les paramètres d'une partie de l'objet.

En largeur d'abord :

Déterminer partiellement les paramètres de la totalité de l'objet.

On peut distinguer deux types d'approches :

En profondeur d'abord :

Déterminer totalement les paramètres d'une partie de l'objet.

En largeur d'abord :

Déterminer partiellement les paramètres de la totalité de l'objet.

Reconnaissance fractionnée : en largeur d'abord.

Le cas des droites

Le cas des droites

Définitions de base

Mot : séquence de lettres dans l'alphabet $\{1, 2, \ldots\}$.

Un mot peut être

- fini de longueur $|u| = p$: $u = (u_i)_{1 \leq i \leq p} = u_1 u_2 \cdots u_p$;
- infini : $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}} = u_0 u_1 \cdots$;
- biinfini : $u = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}} = \cdots u_{-1}.u_0 u_1 \cdots$.

Sous-séquence v de u indexée par un intervalle : facteur $v \lhd u$

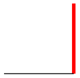
On note $|u|_j$ le nb. d'occurences de j dans un mot fini u.

Relèvement d'un mot (informel)

Relèvement du mot $u = \color{red}{1}\color{black}{211212112}$:

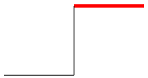
Relèvement d'un mot (informel)

Relèvement du mot $u = 1\textcolor{red}{2}11212112$:



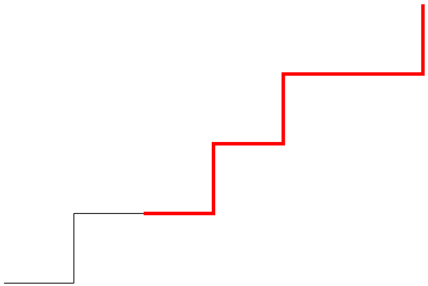
Relèvement d'un mot (informel)

Relèvement du mot $u = 1211212112$:



Relèvement d'un mot (informel)

Relèvement du mot $u = 121\textcolor{red}{1212112}$:



Relèvement d'un mot (formel)

Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

$\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$ et $1 \leq i \leq d \rightsquigarrow (\vec{x}, i)$, segment reliant $\vec{x}$ à $\vec{x} + \vec{e}_i$.

$\mathbb{Z}$-module $\mathfrak{G}$: sommes formelles de segments, à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Relèvement $\gamma(u) \in \mathfrak{G}$ d'un mot u sur d lettres :

$$\gamma(u_1 \cdots u_p) = \sum_{i=1}^{p} (\vec{f}(u_1 \cdots u_{i-1}), u_i),$$

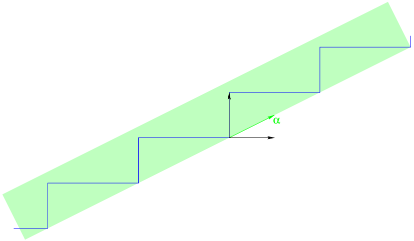
où $\vec{f}(u) = (|u|_1, \ldots, |u|_d) \in \mathbb{Z}^d$.

Courbe et droite en escalier

Courbe en escalier : relèvement d'un mot biinfini sur deux lettres.
Soit $\vec{\alpha} \in [0,1]^2 \setminus \{\vec{0}\}$ (irrationnel ou non).

Définition (Droite en escalier $\mathcal{D}_{\vec{\alpha}}$)

$\mathcal{D}_{\vec{\alpha}}$ est la courbe en escalier incluse dans la "bande" $\mathbb{R}\vec{\alpha} + [0,1[^2$.



$\mathcal{D}_{(1,\alpha)}$: relèvement du mot sturmien u_α de pente α et intercept 0.

Le cas des droites

Substitution

Substitution : morphisme non-effaçant du monoïde des mots, *i.e.*,

- l'image d'une lettre est un mot non vide ;
- l'image d'une concaténation est la concaténation des images.

Exemple (substitution de Fibonacci) :

$$\sigma \; : \; \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 12 \\ 2 & \rightarrow & 1 \end{array} \right. \qquad \leadsto \qquad \sigma(121) = \sigma(1)\sigma(2)\sigma(1) = 12112.$$

S'étend naturellement aux mots infinis ou biinfinis.

Relèvement d'une substitution

Relèvement $E_1(\sigma)$ d'une substitution σ : endomorphisme de $\mathfrak{G}$ t.q.

$$E_1(\sigma) \circ \gamma = \gamma \circ \sigma.$$

$E_1(\sigma)$ agit sur le relevé d'un mot comme σ agit sur ce même mot.

Relèvement d'une substitution

Relèvement $E_1(\sigma)$ d'une substitution σ : endomorphisme de $\mathfrak{G}$ t.q.

$$E_1(\sigma) \circ \gamma = \gamma \circ \sigma.$$

$E_1(\sigma)$ agit sur le relevé d'un mot comme σ agit sur ce même mot.

On calcule :

$$E_1(\sigma)(\vec{x}, i) = \sum_{j | \sigma(i) = p \cdot j \cdot s} (M_\sigma \vec{x} + \vec{f}(p), j),$$

où $(M_\sigma)_{i,j} := |\sigma(i)|_j$ est la matrice d'incidence de σ.

Relèvement d'une substitution

Relèvement $E_1(\sigma)$ d'une substitution σ : endomorphisme de $\mathfrak{G}$ t.q.

$$E_1(\sigma) \circ \gamma = \gamma \circ \sigma.$$

$E_1(\sigma)$ agit sur le relevé d'un mot comme σ agit sur ce même mot.

On calcule :

$$E_1(\sigma)(\vec{x}, i) = \sum_{j|\sigma(i)=p \cdot j \cdot s} (M_\sigma \vec{x} + \vec{f}(p), j),$$

où $(M_\sigma)_{i,j} := |\sigma(i)|_j$ est la matrice d'incidence de σ.

Exemple : $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 1$.

Substitution sturmienne

Substitution sturmienne : envoie les sturmiens sur des sturmiens.

Théorème (Berstel-Séébold 1993

Une substitution est sturmienne ssi c'est une composition de :

$$E : \begin{cases} 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 \end{cases}, \qquad \phi : \begin{cases} 1 & \mapsto & 12 \\ 2 & \mapsto & 1 \end{cases}, \qquad \phi' : \begin{cases} 1 & \mapsto & 21 \\ 2 & \mapsto & 1 \end{cases}$$

En particulier, σ sturmienne $\Rightarrow M_\sigma$ unimodulaire.

Action sur les droites discrètes

Proposition

Si σ une substitution sturmienne, alors

$$E_1(\sigma)(\mathcal{D}_{\vec{\alpha}}) = \mathcal{D}_{M_\sigma \vec{\alpha}}.$$

En terme de mots sturmiens : si ${}^t(1, \beta) \propto M_\sigma\ {}^t(1, \alpha)$, alors

$$\sigma(u_\alpha) = u_\beta.$$

Action sur les droites discrètes

Proposition

Si σ une substitution sturmienne, alors

$$E_1(\sigma)(\mathcal{D}_{\vec{\alpha}}) = \mathcal{D}_{M_\sigma \vec{\alpha}}.$$

En terme de mots sturmiens : si ${}^t(1, \beta) \propto M_\sigma\ {}^t(1, \alpha)$, alors

$$\sigma(u_\alpha) = u_\beta.$$

Preuve : raisonner sur les fréquences de chaque lettre en remarquant :

$$\vec{f}(\sigma(u)) = M_\sigma \vec{f}(u).$$

Action sur les droites discrètes

Proposition

Si σ une substitution sturmienne, alors

$$E_1(\sigma)(\mathcal{D}_{\vec{\alpha}}) = \mathcal{D}_{M_\sigma \vec{\alpha}}.$$

En terme de mots sturmiens : si ${}^t(1, \beta) \propto M_\sigma \, {}^t(1, \alpha)$, alors

$$\sigma(u_\alpha) = u_\beta.$$

Preuve : raisonner sur les fréquences de chaque lettre en remarquant :

$$\vec{f}(\sigma(u)) = M_\sigma \vec{f}(u).$$

$\rightsquigarrow$ Interprétation géométrique de l'action de M_σ sur $[0, 1[^2$.

Le cas des droites

Approximabilité

On veut approcher rapidement un réel par une suite de rationnels.

Définition (Réel δ-approchable)

Un réel α est dit *δ-approchable*, $\delta \in \mathbb{R}$, s'il existe C_α t.q.

$$\#\left\{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ t.q. } \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C_\alpha}{q^d}\right\} = +\infty$$

Approximabilité

On veut approcher rapidement un réel par une suite de rationnels.

Définition (Réel δ-approchable)

Un réel α est dit *δ-approchable*, $\delta \in \mathbb{R}$, s'il existe C_α t.q.

$$\#\left\{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ t.q. } \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C_\alpha}{q^d}\right\} = +\infty$$

Tout réel est 1-approchable. En effet, pour tout q :

$$\left|\alpha - \frac{\lfloor q\alpha \rceil}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}.$$

Tout rationnel $\frac{p}{q}$ est infiniment approchable (par (kp, kq), $k \geq 1$).

Borne inférieure

Théorème (Dirichlet)

Tout réel est 2-approchable.

Borne inférieure

Théorème (Dirichlet)

Tout réel est 2-approchable.

Principe de Dirichlet (*pigeonhole principle*) :

- on partage $[0, 1[$ en Q tiroirs (intervalles) de taille $1/Q$;
- on y range les $Q + 1$ chaussettes $\{q\alpha\}$, $q = 0, \ldots, Q$.

Borne inférieure

Théorème (Dirichlet)

Tout réel est 2-approchable.

Principe de Dirichlet (*pigeonhole principle*) :

- on partage $[0,1[$ en Q tiroirs (intervalles) de taille $1/Q$;
- on y range les $Q+1$ chaussettes $\{q\alpha\}$, $q=0,\ldots,Q$.

Il y a donc deux chaussettes $\{q_1\alpha\}$ et $\{q_2\alpha\}$ dans le même tiroir :

$$|\{q_1\alpha\}-\{q_2\alpha\}| \leq \frac{1}{Q} \rightsquigarrow |(q_1-q_2)\alpha-p| \leq \frac{1}{Q} \rightsquigarrow |\alpha-\frac{p}{q}| \leq \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Borne inférieure

Théorème (Dirichlet)

Tout réel est 2-approchable.

Principe de Dirichlet (*pigeonhole principle*) :

- on partage $[0,1[$ en Q tiroirs (intervalles) de taille $1/Q$;
- on y range les $Q+1$ chaussettes $\{q\alpha\}$, $q=0,\ldots,Q$.

Il y a donc deux chaussettes $\{q_1\alpha\}$ et $\{q_2\alpha\}$ dans le même tiroir :

$$|\{q_1\alpha\}-\{q_2\alpha\}|\leq\frac{1}{Q}\rightsquigarrow|(q_1-q_2)\alpha-p|\leq\frac{1}{Q}\rightsquigarrow|\alpha-\frac{p}{q}|\leq\frac{1}{qQ}\leq\frac{1}{q^2}.$$

Si nb. fini de $\frac{p_i}{q_i}$ convenant : contradiction pour $\frac{1}{Q}<\min|q_i\alpha-p_i|$.

Borne inférieure

Théorème (Dirichlet)

Tout réel est 2-approchable.

Principe de Dirichlet (*pigeonhole principle*) :

- on partage $[0,1[$ en Q tiroirs (intervalles) de taille $1/Q$;
- on y range les $Q+1$ chaussettes $\{q\alpha\}$, $q = 0, \ldots, Q$.

Il y a donc deux chaussettes $\{q_1\alpha\}$ et $\{q_2\alpha\}$ dans le même tiroir :

$$|\{q_1\alpha\} - \{q_2\alpha\}| \leq \frac{1}{Q} \rightsquigarrow |(q_1 - q_2)\alpha - p| \leq \frac{1}{Q} \rightsquigarrow |\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Si nb. fini de $\frac{p_i}{q_i}$ convenant : contradiction pour $\frac{1}{Q} < \min |q_i\alpha - p_i|$.

Remarque : ne marche pas pour tout q (ex : $\alpha = \frac{1}{2q}$).

Borne supérieure

Nb. algébrique : racine d'un polynôme à coefficients entiers.
Degré d'un algébrique α : degré de son polynôme minimal P_α.

Théorème (Liouville)

Un algébrique de degré $d \geq 2$ est au plus d-approchable.

Borne supérieure

Nb. algébrique : racine d'un polynôme à coefficients entiers.
Degré d'un algébrique α : degré de son polynôme minimal P_α.

Théorème (Liouville)

Un algébrique de degré $d \geq 2$ est au plus d-approchable.

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On a : $|P_\alpha(p/q)| \geq 1/q^d$.

Borne supérieure

Nb. algébrique : racine d'un polynôme à coefficients entiers.
Degré d'un algébrique α : degré de son polynôme minimal P_α.

Théorème (Liouville)

Un algébrique de degré $d \geq 2$ est au plus d-approchable.

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On a : $|P_\alpha(p/q)| \geq 1/q^d$.

Soit $[a, b] \supset \{\alpha, \frac{p}{q}\}$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} |P'_\alpha|$. Th. des accroissements finis :

$$\exists x \in]a, b[\quad \text{t.q.} \quad P'_\alpha(x) = \frac{P_\alpha(p/q) - P_\alpha(\alpha)}{p/q - \alpha}$$

Borne supérieure

Nb. algébrique : racine d'un polynôme à coefficients entiers.
Degré d'un algébrique α : degré de son polynôme minimal P_α.

Théorème (Liouville)

Un algébrique de degré $d \geq 2$ est au plus d-approchable.

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On a : $|P_\alpha(p/q)| \geq 1/q^d$.

Soit $[a, b] \supset \{\alpha, \frac{p}{q}\}$ et $M = \sup_{[a,b]} |P'_\alpha|$. Th. des accroissements finis :

$$\exists x \in]a, b[\quad \text{t.q.} \quad P'_\alpha(x) = \frac{P_\alpha(p/q) - P_\alpha(\alpha)}{p/q - \alpha}$$

$$\rightsquigarrow \quad \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| = \frac{|P_\alpha(p/q) - P_\alpha(\alpha)|}{|P'_\alpha(x)|} = \frac{|P_\alpha(p/q)|}{|P'_\alpha(x)|} \geq \frac{1}{Mq^d}.$$

Borne supérieure

Nb. algébrique : racine d'un polynôme à coefficients entiers.
Degré d'un algébrique α : degré de son polynôme minimal P_α.

Théorème (Liouville)

Un algébrique de degré $d \geq 2$ est au plus d-approchable.

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On a : $|P_\alpha(p/q)| \geq 1/q^d$.

Soit $[a, b] \supset \{\alpha, \frac{p}{q}\}$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} |P'_\alpha|$. Th. des accroissements finis :

$$\exists x \in]a, b[\quad \text{t.q.} \quad P'_\alpha(x) = \frac{P_\alpha(p/q) - P_\alpha(\alpha)}{p/q - \alpha}$$

$$\leadsto \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| = \frac{|P_\alpha(p/q) - P_\alpha(\alpha)|}{|P'_\alpha(x)|} = \frac{|P_\alpha(p/q)|}{|P'_\alpha(x)|} \geq \frac{1}{Mq^d}.$$

Remarque : le nb. d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a la pire constante d'approximation.

Développement en fraction continue

Application de Gauss T de $]0,1]$ dans $[0,1]$:

$$T(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor.$$

En posant $a_{n+1} := \left\lfloor \frac{1}{T^n(\alpha)} \right\rfloor$, on peut écrire :

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + T(\alpha)} = \frac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + T^2(\alpha)}} = \dots$$

Définition (Développement en fraction continue)

La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est le *développement en fraction continue* de α.

Approximation

Le $n^{\text{ème}}$ convergent $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, \ldots, a_n]$ de α est défini par

$$[a_1] = \frac{1}{a_1} \quad \text{et} \quad [a_1, \ldots, a_n] = \frac{1}{a_1 + [a_2, \ldots, a_n]}$$

Théorème (2-approximation)

$$\forall n, \qquad \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Approximation

Le $n^{\text{ème}}$ convergent $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, \ldots, a_n]$ de α est défini par

$$[a_1] = \frac{1}{a_1} \quad \text{et} \quad [a_1, \ldots, a_n] = \frac{1}{a_1 + [a_2, \ldots, a_n]}$$

Théorème (2-approximation)

$$\forall n, \qquad \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Cette approximation est quasi-optimale car on montre :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q^2} \;\Rightarrow\; \exists n \text{ t.q. } \frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Finitude et périodicité

On peut aussi montrer :

Théorème

Le développement en fraction continu d'un réel α est :

- fini ssi α est rationnel
- périodique ssi α est quadratique réduit (Galois)
- ultimement périodique ssi α est quadratique (Lagrange).

Finitude et périodicité

On peut aussi montrer :

Théorème

Le développement en fraction continu d'un réel α est :

- fini ssi α est rationnel
- périodique ssi α est quadratique réduit (Galois)
- ultimement périodique ssi α est quadratique (Lagrange).

Cas délicats : réciproques des points 2 et 3.
Dans la suite : essentiellement point 1 (trivial).

Formulation matricielle

Rappel :

$$T(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor = \frac{1}{\alpha} - a_1.$$

Matriciellement :

$$\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ T(\alpha) \end{pmatrix}.$$

On introduit, pour la suite, la matrice unimodulaire

$$B_a := \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Le cas des droites

Interpréter un développement sur une droite

Introduisons, pour $a \geq 1$, la substitution

$$\beta_a : \begin{cases} 1 & \mapsto & 1^a 2 \\ 2 & \mapsto & 1 \end{cases}$$

On a $M_{\beta_a} = B_a$. On vérifie $\beta_a = (\phi \circ E)^a \circ \phi \rightsquigarrow$ sturmienne.

Interpréter un développement sur une droite

Introduisons, pour $a \geq 1$, la substitution

$$\beta_a \; : \; \begin{cases} 1 & \mapsto & 1^a 2 \\ 2 & \mapsto & 1 \end{cases}$$

On a $M_{\beta_a} = B_a$. On vérifie $\beta_a = (\phi \circ E)^a \circ \phi \rightsquigarrow$ sturmienne.

La carac. de l'action des substitutions sturmiennes assure donc :

$$u_\alpha = \beta_{a_1}(u_{T(\alpha)}) = \beta_{a_1} \circ \beta_{a_2}(u_{T^2(\alpha)}) = \dots .$$

Développer une droite

Peut-on calculer le développement de α directement sur u_α ?
On a besoin de "lire", à chaque étape, l'information partielle a_n.

Définition (Palier)

i-palier de longueur k d'un mot : facteur i^k, avec k maximal.

$$u_{2/7} = \dots 211112111211112111211112111211112111211112 \dots$$

Développer une droite

Peut-on calculer le développement de α directement sur u_α ?
On a besoin de "lire", à chaque étape, l'information partielle a_n.

Définition (Palier)

i-palier de longueur k d'un mot : facteur i^k, avec k maximal.

$$u_{2/7} = \ldots 211112111211112111211112111211112111211112 \ldots$$

Développer une droite

Peut-on calculer le développement de α directement sur u_α ?
On a besoin de "lire", à chaque étape, l'information partielle a_n.

Définition (Palier)

i-palier de longueur k d'un mot : facteur i^k, avec k maximal.

$$u_{2/7} = \dots 211112111211112111211121111211121112\dots$$

Développer une droite

Peut-on calculer le développement de α directement sur u_α ?
On a besoin de “lire”, à chaque étape, l'information partielle a_n.

Définition (Palier)

i-palier de longueur k d'un mot : facteur i^k, avec k maximal.

$$u_{2/7} = \dots 2111121112111121112\color{red}{2}\color{black}{11112111211112111211112}\dots$$

Développer une droite

Peut-on calculer le développement de α directement sur u_α ?
On a besoin de "lire", à chaque étape, l'information partielle a_n.

Définition (Palier)

i-palier de longueur k d'un mot : facteur i^k, avec k maximal.

$$u_{2/7} = \ldots 2111121112111121112111121112111121112111112\ldots$$

Proposition

Les 1-paliers du mot sturmien u_α ont pour longueur $\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$ et $\left\lceil \frac{1}{\alpha} \right\rceil$.

Développer une droite

D'où le calcul du développement de α directement sur u_α :

1. Lire $a_1 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$ sur u_α (longueur du plus petit 1-palier).

Développer une droite

D'où le calcul du développement de α directement sur u_α :

1. Lire $a_1 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$ sur u_α (longueur du plus petit 1-palier).
2. $\beta_{a_1}(1) = 1^{a_1}2$ et $\beta_{a_1}(2) = 1 \rightsquigarrow$ décomposition unique :

$$u_\alpha = \ldots \beta_{a_1}(v_{-1})\beta_{a_1}(v_0)\beta_{a_1}(v_1)\ldots = \beta_{a_1}(u_{T(\alpha)}).$$

Développer une droite

D'où le calcul du développement de α directement sur u_α :

1. Lire $a_1 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$ sur u_α (longueur du plus petit 1-palier).
2. $\beta_{a_1}(1) = 1^{a_1}2$ et $\beta_{a_1}(2) = 1 \rightsquigarrow$ décomposition unique :

$$u_\alpha = \ldots \beta_{a_1}(v_{-1})\beta_{a_1}(v_0)\beta_{a_1}(v_1)\ldots = \beta_{a_1}(u_{T(\alpha)}).$$

3. Itérer le procédé sur $u_{T(\alpha)}$ pour obtenir a_2, puis a_3 *etc.*

Développer une droite

D'où le calcul du développement de α directement sur u_α :

1. Lire $a_1 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$ sur u_α (longueur du plus petit 1-palier).
2. $\beta_{a_1}(1) = 1^{a_1}2$ et $\beta_{a_1}(2) = 1 \rightsquigarrow$ décomposition unique :

$$u_\alpha = \ldots \beta_{a_1}(v_{-1})\beta_{a_1}(v_0)\beta_{a_1}(v_1)\ldots = \beta_{a_1}(u_{T(\alpha)}).$$

3. Itérer le procédé sur $u_{T(\alpha)}$ pour obtenir a_2, puis a_3 *etc.*
4. Cas d'arrêt éventuels : pas de 1-palier fini :

$$u_0 = \ldots 1111111 \ldots \qquad \text{et} \qquad u_{0^+} = \ldots 1112111 \ldots$$

Développer une droite

D'où le calcul du développement de α directement sur u_α :

1. Lire $a_1 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$ sur u_α (longueur du plus petit 1-palier).
2. $\beta_{a_1}(1) = 1^{a_1}2$ et $\beta_{a_1}(2) = 1 \leadsto$ décomposition unique :

$$u_\alpha = \ldots \beta_{a_1}(v_{-1})\beta_{a_1}(v_0)\beta_{a_1}(v_1)\ldots = \beta_{a_1}(u_{T(\alpha)}).$$

3. Itérer le procédé sur $u_{T(\alpha)}$ pour obtenir a_2, puis a_3 *etc.*
4. Cas d'arrêt éventuels : pas de 1-palier fini :

$$u_0 = \ldots 1111111\ldots \qquad \text{et} \qquad u_{0^+} = \ldots 1112111\ldots$$

Exemple : $u_\alpha = \ldots 11121111 2\underline{111211112}111211112\ldots$

Développer une courbe

Et si l'on fait pareil sur un mot non sturmien (courbe en escalier) ?

Développer une courbe

Et si l'on fait pareil sur un mot non sturmien (courbe en escalier) ?

On montre :

Proposition (Wu 1982, Troesch 1993, F. 2007)

Considérons le développement d'un mot u biinfini. Alors :

- développement fini sur u_0 ou u_{0^+} $\Rightarrow$ u sturmien (pente ratio.) ;
- autre développement fini $\Rightarrow$ u non sturmien ;
- développement infini $\Rightarrow$ u sturmien (pente irrat.).

Développer une courbe

Et si l'on fait pareil sur un mot non sturmien (courbe en escalier) ?

On montre :

Proposition (Wu 1982, Troesch 1993, F. 2007)

Considérons le développement d'un mot u biinfini. Alors :

- développement fini sur u_0 ou u_{0^+} $\Rightarrow$ u sturmien (pente ratio.) ;
- autre développement fini $\Rightarrow$ u non sturmien ;
- développement infini $\Rightarrow$ u sturmien (pente irrat.).

$\rightsquigarrow$ Algorithme de reconnaissance de mot sturmien !

Développer une courbe

Et si l'on fait pareil sur un mot non sturmien (courbe en escalier) ?

On montre :

Proposition (Wu 1982, Troesch 1993, F. 2007)

Considérons le développement d'un mot u biinfini. Alors :

- développement fini sur u_0 ou u_{0^+} $\Rightarrow$ u sturmien (pente ratio.) ;
- autre développement fini $\Rightarrow$ u non sturmien ;
- développement infini $\Rightarrow$ u sturmien (pente irrat.).

$\rightsquigarrow$ Algorithme de reconnaissance de mot sturmien !

Exemple : $u = \ldots 121211211\underline{212121121121}212112112\ldots$

Le cas des droites

Développer un mot fini

Un mot fini u est-il facteur d'un mot sturmien ?

Non-unicité : $111 \lhd u_\alpha$ pour tout $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$.

Développer un mot fini

Un mot fini u est-il facteur d'un mot sturmien ?

Non-unicité : $111 \lhd u_\alpha$ pour tout $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$.

Définition (Paramètres acceptables)

Paramètres acceptables d'un mot u : $D(u) = \{\alpha \mid u \lhd u_\alpha\}$

Comment déterminer si $D(u) = \emptyset$? Calculer $D(u)$?

Lire l'information nécessaire

Soit u un mot admettant

- un 1-palier de longueur p *interne* (encadré par des 2) ;
- un 1-palier de longueur $q > p$.

Alors :

$$u \lhd u_\alpha \quad \Rightarrow \quad p = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor \text{ et } q = \left\lceil \frac{1}{\alpha} \right\rceil.$$

Lire l'information nécessaire

Soit u un mot admettant

- un 1-palier de longueur p *interne* (encadré par des 2) ;
- un 1-palier de longueur $q > p$.

Alors :

$$u \lhd u_\alpha \quad \Rightarrow \quad p = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor \text{ et } q = \left\lceil \frac{1}{\alpha} \right\rceil .$$

D'où :

- $q > p + 1 \ \Rightarrow \ D(u) = \emptyset$
- $q = p + 1 \ \Rightarrow \ {}^t(1, D(u)) = B_p \, {}^t(1, D(v))$, avec $u = \beta_p(v)$.

Désubstituer

Dans ce dernier cas, on doit donc désubstituer u par β_p.

Décomposition en blocs $\beta_p(1) = 1^p2$ et $\beta_p(2) = 1$: pb de bords.

$$u = \ 121112112111$$

Désubstituer

Dans ce dernier cas, on doit donc désubstituer u par β_p.

Décomposition en blocs $\beta_p(1) = 1^p2$ et $\beta_p(2) = 1$: pb de bords.

$$u = \ 121112112111$$

On s'en tire en modifiant u sans changer $D(u)$:

Désubstituer

Dans ce dernier cas, on doit donc désubstituer u par β_p.

Décomposition en blocs $\beta_p(1) = 1^p2$ et $\beta_p(2) = 1$: pb de bords.

$$u = 1121112112111$$

On s'en tire en modifiant u sans changer $D(u)$:

- prolonger le 1-palier externe gauche à la longueur p ;

Désubstituer

Dans ce dernier cas, on doit donc désubstituer u par β_p.

Décomposition en blocs $\beta_p(1) = 1^p2$ et $\beta_p(2) = 1$: pb de bords.

$$u = 11211121121112$$

On s'en tire en modifiant u sans changer $D(u)$:

- prolonger le 1-palier externe gauche à la longueur p ;
- fermer le 1-palier externe droit s'il est de longueur $p + 1$;

Désubstituer

Dans ce dernier cas, on doit donc désubstituer u par β_p.

Décomposition en blocs $\beta_p(1) = 1^p2$ et $\beta_p(2) = 1$: pb de bords.

$$u = 11211121121112$$

On s'en tire en modifiant u sans changer $D(u)$:

- prolonger le 1-palier externe gauche à la longueur p ;
- fermer le 1-palier externe droit s'il est de longueur $p + 1$;
- le supprimer s'il est plus court.

Désubstituer

Dans ce dernier cas, on doit donc désubstituer u par β_p.

Décomposition en blocs $\beta_p(1) = 1^p2$ et $\beta_p(2) = 1$: pb de bords.

$$u = 11211121121112$$

On s'en tire en modifiant u sans changer $D(u)$:

- prolonger le 1-palier externe gauche à la longueur p ;
- fermer le 1-palier externe droit s'il est de longueur $p+1$;
- le supprimer s'il est plus court.

$$u = \beta_2(121121)$$

Ou ne pas désubstituer

Inversement, on ne sait pas par quoi désubstituer si le mot u

- n'a pas de 1-palier interne ;
- n'a pas de 1-palier strictement plus long qu'un 1-palier interne.

C'est-à-dire :

- $u = 1^p$ ou $u = 1^p21^q$;
- $u = 1^p2(1^r2)^s1^q$ avec $\{p, q\} \subset \{0, \dots, r\}$.

Ou ne pas désubstituer

Inversement, on ne sait pas par quoi désubstituer si le mot u

- n'a pas de 1-palier interne ;
- n'a pas de 1-palier strictement plus long qu'un 1-palier interne.

C'est-à-dire :

- $u = 1^p$ ou $u = 1^p 2 1^q$ avec $|p - q| \leq 1$ si on veut ;
- $u = 1^p 2 (1^r 2)^s 1^q$ avec $\{p, q\} \subset \{r - 1, r\}$ si on veut.

Ou ne pas désubstituer

Inversement, on ne sait pas par quoi désubstituer si le mot u

- n'a pas de 1-palier interne ;
- n'a pas de 1-palier strictement plus long qu'un 1-palier interne.

C'est-à-dire :

- $u = 1^p$ ou $u = 1^p 2 1^q$ avec $|p - q| \leq 1$ si on veut ;
- $u = 1^p 2 (1^r 2)^s 1^q$ avec $\{p, q\} \subset \{r - 1, r\}$ si on veut.

$\rightsquigarrow$ Cas terminaux, à étudier directement.

Cas terminaux

- $$D(1) = [0, +\infty[$$
- Avec $p \geq 1$:
$$D(1^p) = \left[0, \frac{1}{p-1}\right[$$
- Avec $|p-q| \leq 1$:
$$D(1^p 2 1^q) = \left]0, \frac{2}{p+q-1}\right[$$
- Avec $\{p, q\} \subset \{r-1, r\}$ et $s' := s + (p-r+1) + (q-r+1)$:
$$D(1^p 2 (1^r 2)^s 1^q) = \left]\frac{s}{sr+1}, \frac{s'}{s'r-1}\right[$$

Deux exemples à la main

$$u = 11211211211121121112112111211211211$$

$$v = 11211211211211211121121112112112111$$

Deux exemples à la main

$$u = 11211211211121121112112111211211211$$

$$D(u) = \left]\frac{9}{22}, \frac{5}{12}\right[= \frac{9}{22} + \left]0, \frac{1}{132}\right[$$

$$v = 11211211211211121121112112112111$$

Deux exemples à la main

$$u = 11211211211121121112112111211211211$$

$$D(u) = \left]\frac{9}{22}, \frac{5}{12}\right[= \frac{9}{22} + \left]0, \frac{1}{132}\right[$$

$$v = 11211211211211121121112112112112111$$

$$D(v) = \emptyset$$

Complexité

La longueur diminue d'un facteur $\lambda \leq \frac{4}{5}$ à chaque désubstitution.
Pire cas :

$$21211 \longrightarrow 1212112 \longrightarrow \beta_1(1121)$$

Complexité

La longueur diminue d'un facteur $\lambda \leq \frac{4}{5}$ à chaque désubstitution.
Pire cas :

$$21211 \longrightarrow 1212112 \longrightarrow \beta_1(1121)$$

Chaque étape est linéaire en la longueur (lire p, découper en blocs).
D'où la complexité, pour un mot initial de longueur n :

$$O(n + 4/5n + (4/5)^2 n + \ldots) = O(n).$$

Complexité

La longueur diminue d'un facteur $\lambda \leq \frac{4}{5}$ à chaque désubstitution.
Pire cas :

$$21211 \longrightarrow 1212112 \longrightarrow \beta_1(1121)$$

Chaque étape est linéaire en la longueur (lire p, découper en blocs).
D'où la complexité, pour un mot initial de longueur n :

$$O(n + 4/5n + (4/5)^2 n + \ldots) = O(n).$$

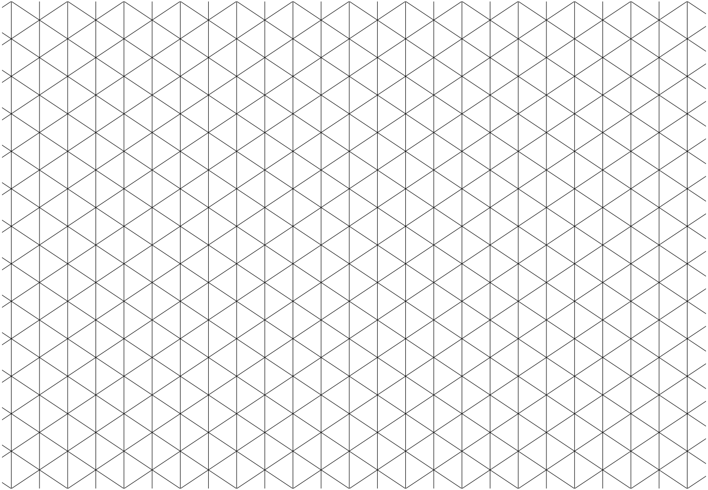
Implémenté dans le package *Sage-words* ? Code *OCaml* :
`http://www.lif.univ-mrs.fr/~fernique/temp/words.ml`

Le cas des plans

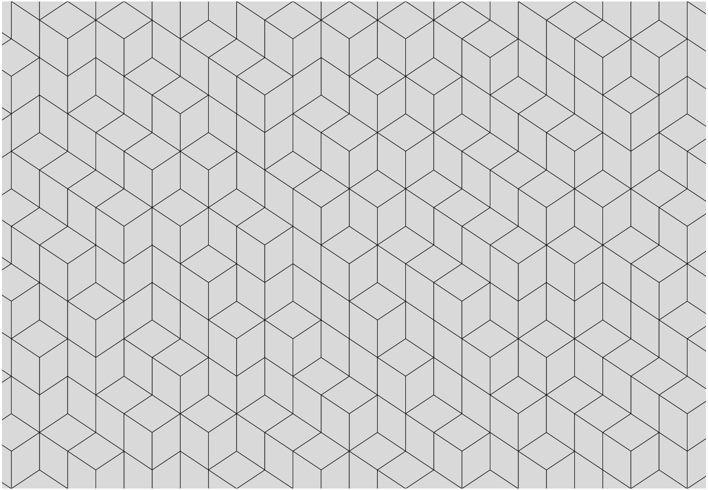
1. Surfaces et plans en escalier
2. Substitutions généralisées
3. Développement en fraction continue
4. Reconnaissance fractionnée (I)
5. Reconnaissance fractionnée (II)

Le cas des plans

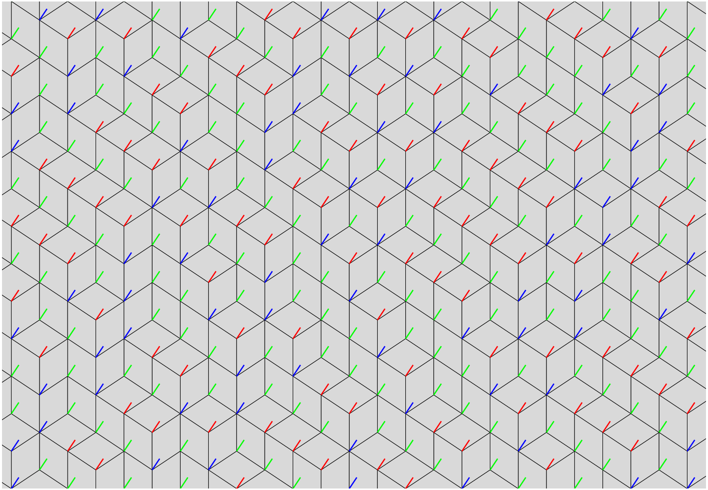
Quelques dessins



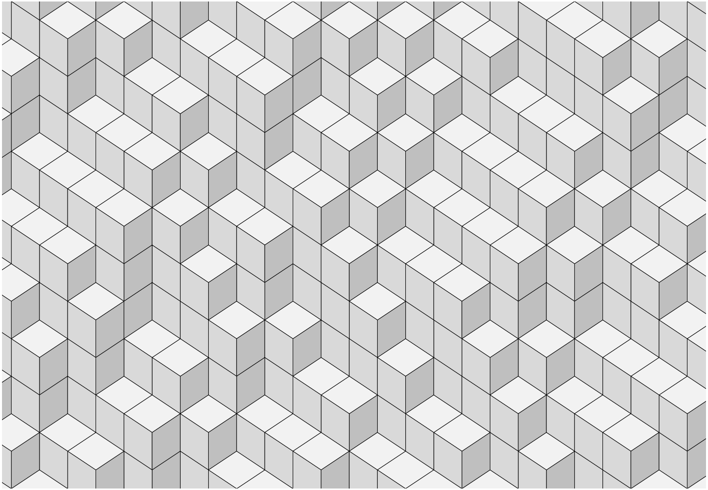
Quelques dessins



Quelques dessins

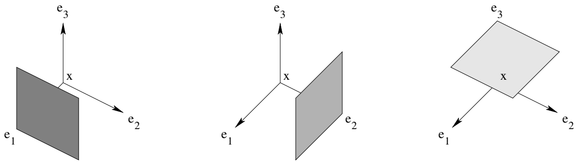


Quelques dessins



Surface en escalier

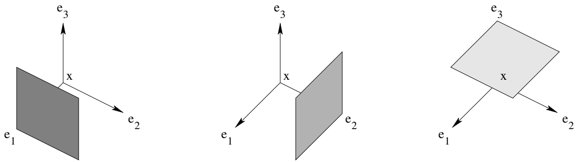
$$\vec{x} \in \mathbb{Z}^3 \text{ et } 1 \leq i \leq 3 \rightsquigarrow (\vec{x}, i^*), \text{ face } \vec{x} + \vec{e}_i + \{\sum_{j \neq i} \lambda_j \vec{e}_j,\ 0 \leq \lambda_j \leq 1\}$$



$\mathbb{Z}$-module $\mathfrak{F}$: sommes formelles de faces, à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Surface en escalier

$$\vec{x} \in \mathbb{Z}^3 \text{ et } 1 \leq i \leq 3 \rightsquigarrow (\vec{x}, i^*), \text{ face } \vec{x} + \vec{e}_i + \{\sum_{j \neq i} \lambda_j \vec{e}_j,\ 0 \leq \lambda_j \leq 1\}$$



$\mathbb{Z}$-module $\mathfrak{F}$: sommes formelles de faces, à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Définition (Surface en escalier)

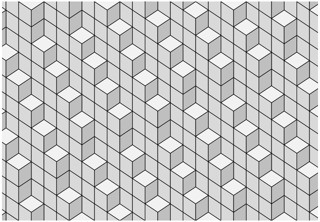
Une surface en escalier est une somme de faces homeomorphe au plan de normale $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ par projection orthogonale.

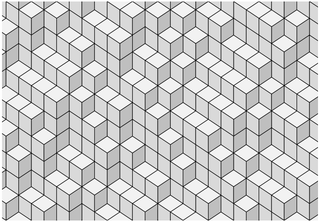
Plan en escalier

Soit $\vec{\alpha} \in [0,1]^3 \backslash \{\vec{0}\}$.

Définition (Plan en escalier $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}}$)

$\mathcal{P}_{\vec{\alpha}}$: surface en escalier incluse dans la “tranche” $\vec{\alpha}^{\perp} + [0,1]^3$.





Plan et surface.

Le cas des plans

Substitution multi-dimensionnelle ?

Que devrait vérifier une bonne définition de substitution ?

- $\sigma(x \in \mathcal{P}) = \mathcal{X} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{X}$ fini ;
- $\sigma(x \cup y) = \sigma(x) \cup \sigma(y)$;
- $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}' \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}) \sim \sigma(\mathcal{P}')$.

Substitution multi-dimensionnelle ?

Que devrait vérifier une bonne définition de substitution ?

- $\sigma(x \in \mathcal{P}) = \mathcal{X} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{X}$ fini ;
- $\sigma(x \cup y) = \sigma(x) \cup \sigma(y)$;
- $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}' \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}) \sim \sigma(\mathcal{P}')$.

Choix courant : dilater et redécouper (pas de pb. d'agencement).
Généralise plutôt bien les substitutions *de longueur constante*.

Substitution multi-dimensionnelle ?

Que devrait vérifier une bonne définition de substitution ?

- $\sigma(x \in \mathcal{P}) = \mathcal{X} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{X}$ fini ;
- $\sigma(x \cup y) = \sigma(x) \cup \sigma(y)$;
- $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}' \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}) \sim \sigma(\mathcal{P}')$.

Choix courant : dilater et redécouper (pas de pb. d'agencement).
Généralise plutôt bien les substitutions *de longueur constante*.

Ici : substitution généralisée introduite en 2001 par Arnoux et Ito.
Généralise plutôt bien les substitutions sturmiennes.

Dualité segment/face

Idée : voir la face $(\vec{x}, i^*)$ comme la forme linéaire de $\mathfrak{G}$ dans $\mathbb{Z}$ t.q.

$$(\vec{x}, i^*)(\vec{y}, j) \overset{\text{not.}}{=} \langle (\vec{x}, i^*) \mid (\vec{y}, j) \rangle \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{y} = \vec{x} \text{ et } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les faces forment alors une base du dual $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{G}$.

Dualité segment/face

Idée : voir la face $(\vec{x}, i^*)$ comme la forme linéaire de $\mathfrak{G}$ dans $\mathbb{Z}$ t.q.

$$(\vec{x}, i^*)(\vec{y}, j) \overset{\text{not.}}{=} \langle(\vec{x}, i^*) \mid (\vec{y}, j)\rangle \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{y} = \vec{x} \text{ et } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les faces forment alors une base du dual $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{G}$.

Dual $E_1^*(\sigma)$ du relèvement $E_1(\sigma)$ d'une substitution σ :

$$\langle E_1(\sigma)(\vec{y}, j) \mid (\vec{x}, i^*)\rangle = \langle(\vec{y}, j) \mid E_1^*(\sigma)(\vec{x}, i^*)\rangle.$$

Formule explicite quand M_σ est unimodulaire :

$$E_1(\sigma)^*(\vec{x}, i^*) = \sum_{j \mid \sigma(j) = p \cdot i \cdot s} (M_\sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{f}(p)), j^*).$$

Exemple : Tribonnaci

$$\sigma : \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \mapsto & 12 \\ 2 & \mapsto & 13 \\ 3 & \mapsto & 1 \end{array} \right. \quad M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; M_\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple : Tribonnaci

$$\sigma : \left\{ \begin{array}{lcl} 1 & \mapsto & 12 \\ 2 & \mapsto & 13 \\ 3 & \mapsto & 1 \end{array} \right. \quad M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$E_1^*(\sigma) : \left\{ \begin{array}{lcl} (\vec{0}, 1^*) & \mapsto & (\vec{0}, 1^*) + (\vec{0}, 2^*) + (\vec{0}, 3^*) \\ (\vec{0}, 2^*) & \mapsto & (-\vec{e}_2, 1^*) \\ (\vec{0}, 3^*) & \mapsto & (-\vec{e}_2, 2^*) \end{array} \right.$$

Exemple : Tribonnaci

$$\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 12 \\ 2 & \mapsto & 13 \\ 3 & \mapsto & 1 \end{array} \right. \quad M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$E_1^*(\sigma) : \left\{ \begin{array}{ccc} (\vec{0}, 1^*) & \mapsto & (\vec{0}, 1^*) + (\vec{0}, 2^*) + (\vec{0}, 3^*) \\ (\vec{0}, 2^*) & \mapsto & (-\vec{e}_2, 1^*) \\ (\vec{0}, 3^*) & \mapsto & (-\vec{e}_2, 2^*) \end{array} \right.$$

Puis :

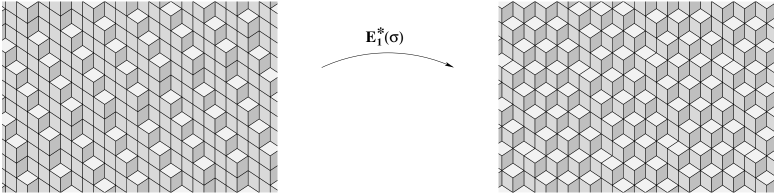
$$E_1^*(\sigma)(\vec{x}, i^*) = M_\sigma^{-1}\vec{x} + E_1^*(\sigma)(\vec{0}, i^*).$$

Action sur les plans en escalier

Théorème (F. 2006)

Si σ est une substitution unimodulaire, alors

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\vec{\alpha}}) = \mathcal{P}_{{}^{t}M_\sigma \vec{\alpha}}.$$

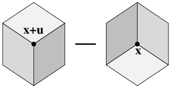


Preuve : calcul

Action sur les flips

Flip en $\vec{x}$: somme formelle de faces $\mathcal{F}_{\vec{x}} \in \mathfrak{F}$ définie par

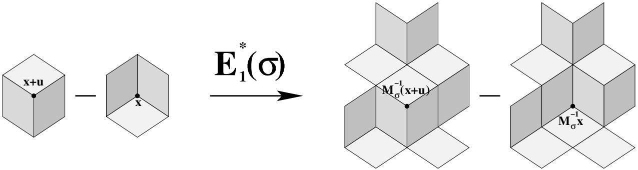
$$\mathcal{F}_{\vec{x}} = \sum_{1 \leq i \leq 3} (\vec{x}, i^*) - \sum_{1 \leq i \leq 3} (\vec{x} - \vec{e}_i, i^*).$$



Action sur les flips

Flip en $\vec{x}$: somme formelle de faces $\mathcal{F}_{\vec{x}} \in \mathfrak{F}$ définie par

$$\mathcal{F}_{\vec{x}} = \sum_{1 \leq i \leq 3} (\vec{x}, i^*) - \sum_{1 \leq i \leq 3} (\vec{x} - \vec{e}_i, i^*).$$



Proposition (Arnoux-Ito 2001)

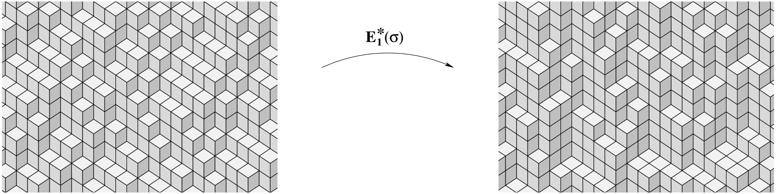
$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_{\vec{x}}) = \mathcal{F}_{M_\sigma^{-1}\vec{x}}.$$

Action sur les surfaces en escalier

En écrivant une surface comme une somme de flips sur un plan :

Théorème (Arnoux-Berthé-F.-Jamet 2007)

$E_1^*(\sigma)$ envoie toute surface en escalier sur une surface en escalier.

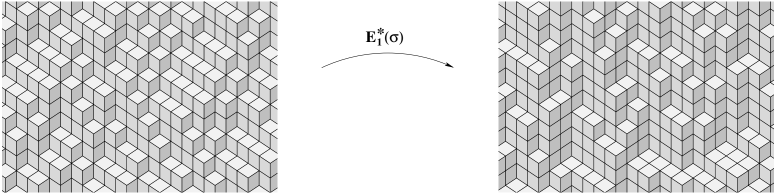


Action sur les surfaces en escalier

En écrivant une surface comme une somme de flips sur un plan :

Théorème (Arnoux-Berthé-F.-Jamet 2007)

$E_1^*(\sigma)$ envoie toute surface en escalier sur une surface en escalier.



Question : preuve “immédiate” via la dualité ?

Un point de vue intuitif

Action de M_σ^{-1} sur le plan réel $\vec{\alpha}^\perp$ (facile) :

$$M_\sigma^{-1}(\vec{\alpha}^\perp) = ({}^{\mathrm{t}}M_\sigma\vec{\alpha})^\perp$$

Action de $E_1^*(\sigma)$ sur la discrétisation $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}}$ de $\vec{\alpha}^\perp$ (rappel) :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\vec{\alpha}}) = \mathcal{P}_{{}^{\mathrm{t}}M_\sigma\vec{\alpha}}$$

En outre :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_{\vec{x}}) = \mathcal{F}_{M_\sigma^{-1}\vec{x}}.$$

Un point de vue intuitif

Action de M_σ^{-1} sur le plan réel $\vec{\alpha}^\perp$ (facile) :

$$M_\sigma^{-1}(\vec{\alpha}^\perp) = ({}^{t}M_\sigma \vec{\alpha})^\perp$$

Action de $E_1^*(\sigma)$ sur la discrétisation $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}}$ de $\vec{\alpha}^\perp$ (rappel) :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\vec{\alpha}}) = \mathcal{P}_{{}^{t}M_\sigma \vec{\alpha}}$$

En outre :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_{\vec{x}}) = \mathcal{F}_{M_\sigma^{-1}\vec{x}}.$$

Pratique : voir $E_1^*(\sigma)$ comme une discrétisation de M_σ^{-1}.

Le cas des plans

Approximabilité

On veut approcher rapidement un vecteur réel par des vecteurs rationnels dont les coordonnées ont toutes le même dénominateur.

Définition (Vecteur réel δ-approchable)

Un vecteur $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ est dit δ-*approchable*, $\delta \in \mathbb{R}$, s'il existe $C_{\vec{\alpha}}$ t.q.

$$\#\left\{(\vec{p}, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^* \text{ t.q. } \left|\left|\vec{\alpha} - \frac{\vec{p}}{q}\right|\right|_\infty < \frac{C_{\vec{\alpha}}}{q^\delta}\right\} = +\infty$$

Bornes théoriques

Théorème (Dirichlet)

Tout vecteur de $\mathbb{R}^d$ est $(1 + \frac{1}{d})$-approchable.

Preuve : encore des tiroirs et chaussettes (d-dimensionnels).

Théorème

Pour tout $\delta > 1 + \frac{1}{d}$, il existe un vecteur de $\mathbb{R}^d$ non δ-approchable.

Développement en fraction continue

Plusieurs algorithmes : Jacobi-Perron, Poincaré, Brun, Selmer. . .

Développement en fraction continue

Plusieurs algorithmes : Jacobi-Perron, Poincaré, Brun, Selmer...

Application de Brun T de $[0,1]^d \backslash \{\vec{0}\}$ dans $[0,1]^d$:

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \ldots, \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}, \frac{1}{\alpha_i} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha_i} \right\rfloor, \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \ldots, \frac{\alpha_d}{\alpha_i} \right),$$

où $i = \min\{j \mid \alpha_j = ||\vec{\alpha}||_\infty\}$.

Développement en fraction continue

Plusieurs algorithmes : Jacobi-Perron, Poincaré, Brun, Selmer...

Application de Brun T de $[0,1]^d \backslash \{\vec{0}\}$ dans $[0,1]^d$:

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \ldots, \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}, \frac{1}{\alpha_i} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha_i} \right\rfloor, \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \ldots, \frac{\alpha_d}{\alpha_i} \right),$$

où $i = \min\{j \mid \alpha_j = ||\vec{\alpha}||_\infty\}$.

On pose $a_n = \lfloor ||T^n(\vec{\alpha})||_\infty \rfloor$, $i_n = \min\{j \mid (T^n(\vec{\alpha}))_j = ||T^n(\vec{\alpha})||_\infty\}$.

Définition (Développement de Brun)

La suite $(a_n, i_n)_{n \geq 1}$ est appelée *développement de Brun* de $\vec{\alpha}$.

Matriciellement

Rappel :

$$T(\alpha_1,\dots,\alpha_d)=\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i},\dots,\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i},\frac{1}{\alpha_i}-a,\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i},\dots,\frac{\alpha_d}{\alpha_i}\right),$$

où $i=\min\{j\mid \alpha_j=||\vec{\alpha}||_\infty\}$ et $a=\lfloor 1/\alpha_i\rfloor$. Matriciellement :

$${}^{\mathrm{t}}(1,\vec{\alpha})=\alpha_i B_{a,i}\ {}^{\mathrm{t}}(1,T(\vec{\alpha})),$$

où

$$B_{a,i}=\begin{pmatrix} a & & 1 & \\ & I_{i-1} & & \\ 1 & & 0 & \\ & & & I_{d-i}\end{pmatrix}$$

Approximation

Le $n^{\text{ème}}$ convergent $\frac{\vec{p}_n}{q}$ d'un vecteur $\vec{\alpha} = [(a_n, i_n)_{n\geq 1}]$ est défini par

$$(q_n, \vec{p}_n) = B_{a_1,i_1} \times \ldots \times B_{a_n,i_n} \ {}^{t}(1, \vec{0}).$$

Théorème (Faible convergence, Brun)

$$\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d, \qquad \left|\left|\vec{\alpha} - \frac{\vec{p}_n}{q_n}\right|\right|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Approximation

Le $n^{\text{ème}}$ convergent $\frac{\vec{p}_n}{q}$ d'un vecteur $\vec{\alpha} = [(a_n, i_n)_{n\geq 1}]$ est défini par

$$(q_n, \vec{p}_n) = B_{a_1,i_1} \times \ldots \times B_{a_n,i_n} \, {}^t(1, \vec{0}).$$

Théorème (Faible convergence, Brun)

$$\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^d, \qquad \left|\left| \vec{\alpha} - \frac{\vec{p}_n}{q_n} \right|\right|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Théorème (Ito-Keane-Ohtsuki 1993)

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^2, \qquad \left|\left| \vec{\alpha} - \frac{\vec{p}_n}{q_n} \right|\right|_\infty < \frac{C}{q_n^{1+\varepsilon}}.$$

Finitude et périodicité

Développement de Brun fini : vecteur rationnel. Plus précisément :

Proposition (F. 2007)

Le développement de Brun de $\frac{\vec{p}}{q} \in \mathbb{Q}^d$ est de longueur au plus

$$\log_{\frac{d+2}{d+1}}(p_1 + \ldots + p_d + q).$$

Preuve : induction sur la longueur du développement de $\vec{\alpha} \in \mathbb{Q}^d$.

Finitude et périodicité

Développement de Brun fini : vecteur rationnel. Plus précisément :

Proposition (F. 2007)

Le développement de Brun de $\frac{\vec{p}}{q} \in \mathbb{Q}^d$ est de longueur au plus

$$\log_{\frac{d+2}{d+1}}(p_1 + \ldots + p_d + q).$$

Preuve : induction sur la longueur du développement de $\vec{\alpha} \in \mathbb{Q}^d$.

Caractérisation algébrique de la périodicité du développement ?

Le cas des plans

Interpréter un développement sur un plan

Soit $\beta_{a,i}$ la substitution de matrice d'incidence $B_{a,i}$ définie par

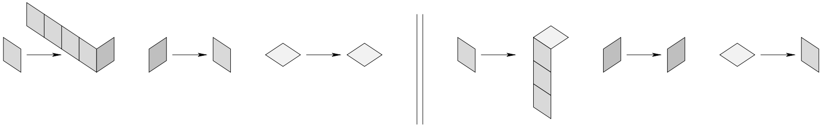
$$\beta_{a,i} = \left\{ \begin{array}{ccl} 1 & \mapsto & 1^a \cdot (i+1) \\ (i+1) & \mapsto & 1 \\ j & \mapsto & j \end{array} \right.$$

Interpréter un développement sur un plan

Soit $\beta_{a,i}$ la substitution de matrice d'incidence $B_{a,i}$ définie par

$$\beta_{a,i} = \left\{ \begin{array}{ccl} 1 & \mapsto & 1^a \cdot (i+1) \\ (i+1) & \mapsto & 1 \\ j & \mapsto & j \end{array} \right.$$

Substitutions généralisées associées (ici, $E_1^*(\beta_{4,1})$ et $E_1^*(\beta_{3,2})$) :

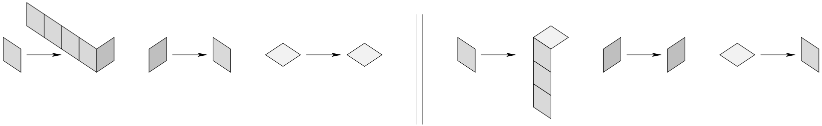


Interpréter un développement sur un plan

Soit $\beta_{a,i}$ la substitution de matrice d'incidence $B_{a,i}$ définie par

$$\beta_{a,i} = \begin{cases} 1 & \mapsto & 1^a \cdot (i+1) \\ (i+1) & \mapsto & 1 \\ j & \mapsto & j \end{cases}$$

Substitutions généralisées associées (ici, $E_1^*(\beta_{4,1})$ et $E_1^*(\beta_{3,2})$) :



L'action des substitutions généralisées sur les plans assure :

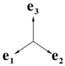
$$\mathcal{P}_{(1,\vec{\alpha})} = E_1^*(\beta_{a_1,i_1})(\mathcal{P}_{(1,T(\vec{\alpha}))}) = E_1^*(\beta_{a_1,i_1}) \circ E_1^*(\beta_{a_2,i_2})(\mathcal{P}_{(1,T^2(\vec{\alpha}))}) = \dots$$

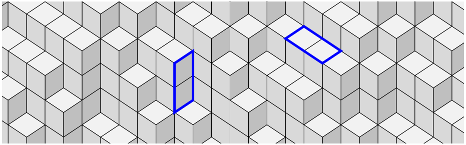
Développer un plan

Définition (Palier)

(i, j)-palier d'une surface $\mathcal{S}$: sous-somme maximale de la forme

$$\sum_{1 \leq k \leq L} (\vec{x} + k\vec{e}_j, i^*).$$



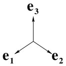


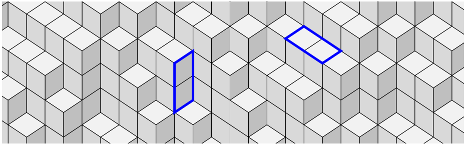
Développer un plan

Définition (Palier)

(i,j)-palier d'une surface $\mathcal{S}$: sous-somme maximale de la forme

$$\sum_{1 \leq k \leq L} (\vec{x} + k\vec{e}_j, i^*).$$

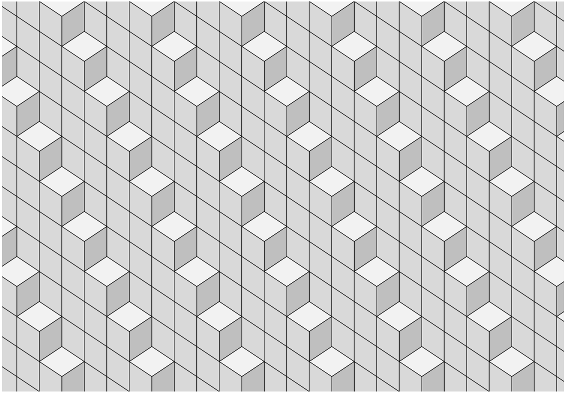




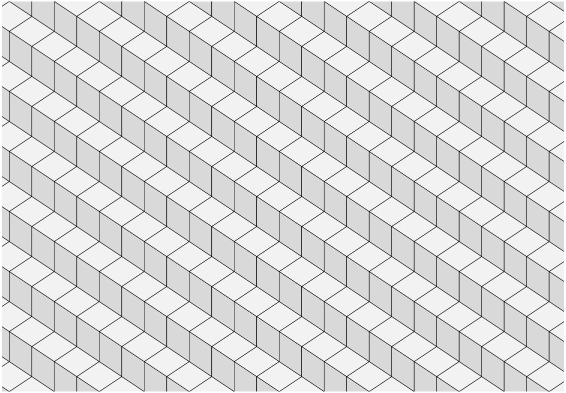
Proposition (F. 2007)

Les (i,j)-paliers du plan $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}}$ ont pour longueur $\left\lfloor \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \right\rfloor$ et $\left\lceil \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \right\rceil$.

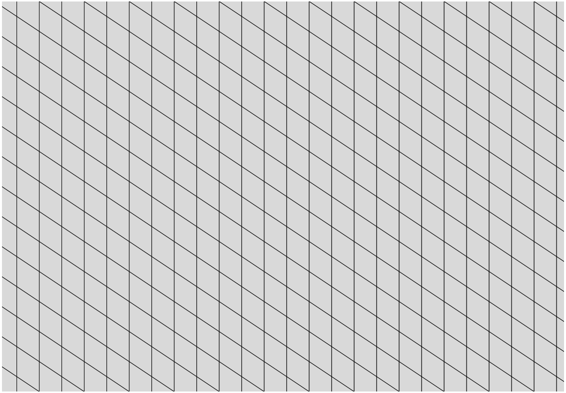
Développer un plan



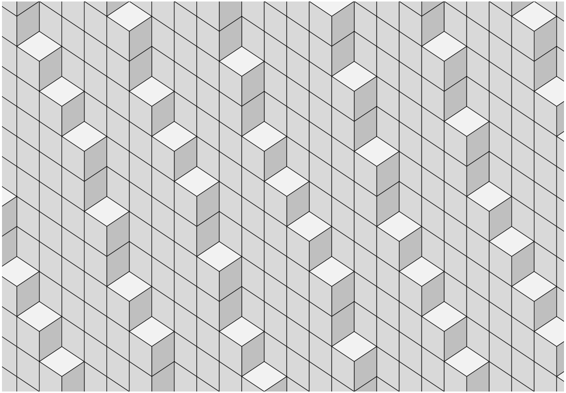
Développer un plan



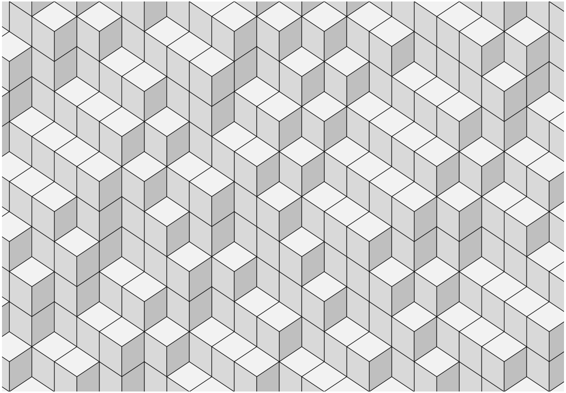
Développer un plan



Développer une surface



Développer une surface

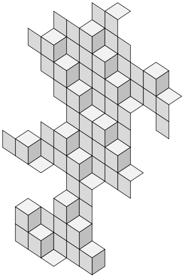


Le cas des plans

Développer un morceau de surface

Définition (Paramètres acceptables)

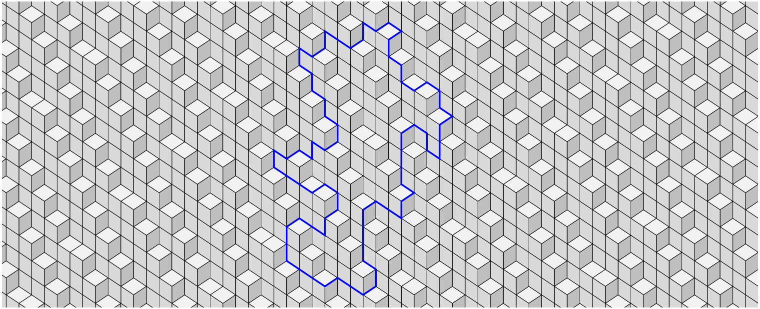
Paramètres acceptables de $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}$: $D(\mathcal{U}) = \{\vec{\alpha} \mid \mathcal{U} \leq \mathcal{P}_{\vec{\alpha}}\}$.



Développer un morceau de surface

Définition (Paramètres acceptables)

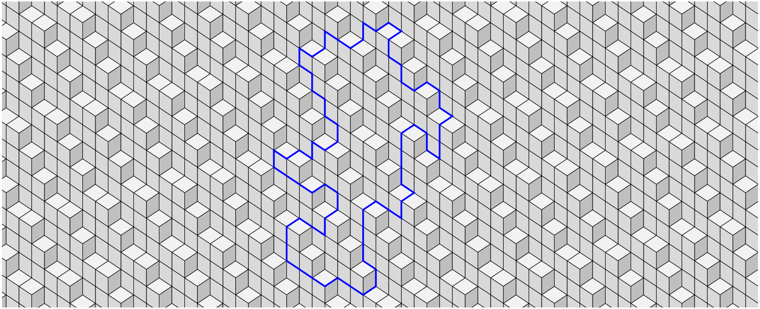
Paramètres acceptables de $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}$: $D(\mathcal{U}) = \{\vec{\alpha} \mid \mathcal{U} \leq \mathcal{P}_{\vec{\alpha}}\}$.



Développer un morceau de surface

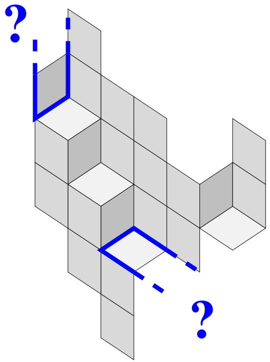
Définition (Paramètres acceptables)

Paramètres acceptables de $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}$: $D(\mathcal{U}) = \{\vec{\alpha} \mid \mathcal{U} \leq \mathcal{P}_{\vec{\alpha}}\}$.



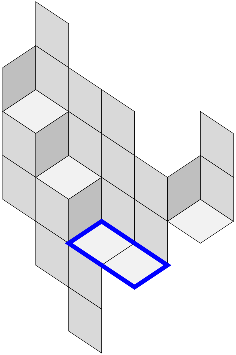
Lire l'information

Les paliers peuvent être incomplets :



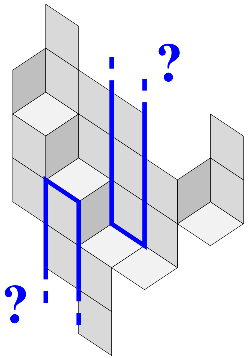
Lire l'information

Les paliers peuvent être incomplets :



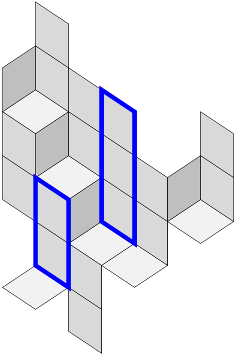
Lire l'information

Les paliers peuvent être incomplets :



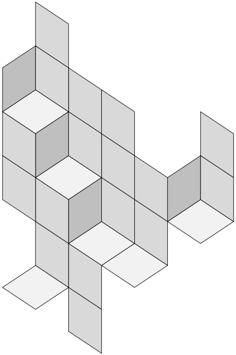
Lire l'information

Les paliers peuvent être incomplets :



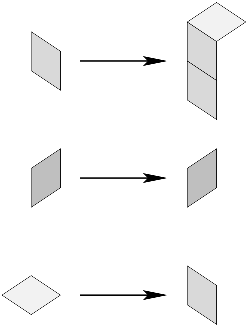
Lire l'information

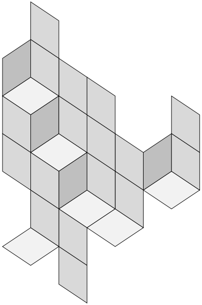
Les paliers peuvent être incomplets :



Désubstituer

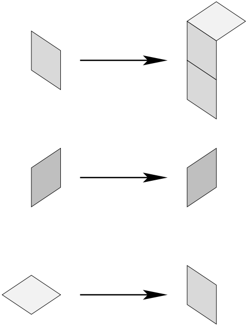
Décomposition en blocs $E_1^*(\beta_{a,i})(\vec{x}, j^*)$: pb. de bords.

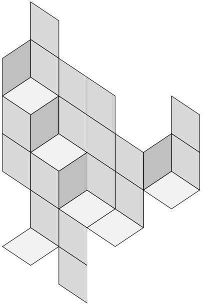




Désubstituer

Décomposition en blocs $E_1^*(\beta_{a,i})(\vec{x}, j^*)$: pb. de bords.

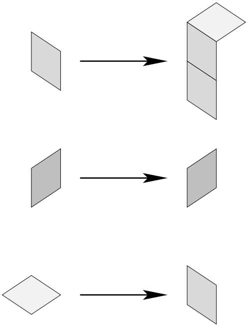


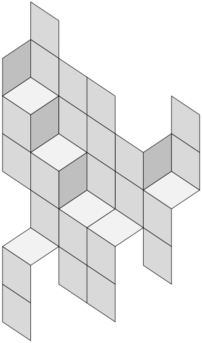


Il faut jouer sur le bord sans modifier les paramètres acceptables.

Désubstituer

Décomposition en blocs $E_1^*(\beta_{a,i})(\vec{x}, j^*)$: pb. de bords.

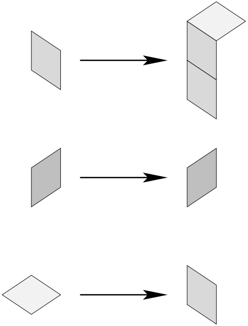


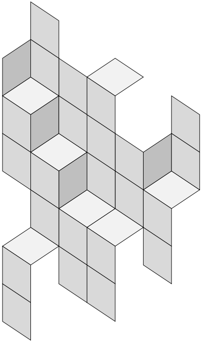


Il faut jouer sur le bord sans modifier les paramètres acceptables.

Désubstituer

Décomposition en blocs $E_1^*(\beta_{a,i})(\vec{x}, j^*)$: pb. de bords.

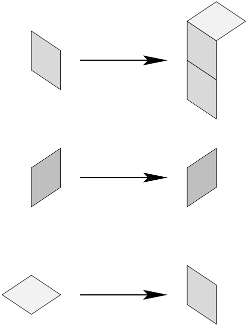


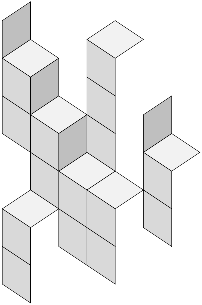


Il faut jouer sur le bord sans modifier les paramètres acceptables.

Désubstituer

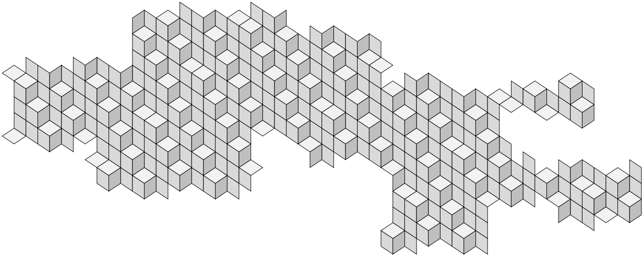
Décomposition en blocs $E_1^*(\beta_{a,i})(\vec{x}, j^*)$: pb. de bords.





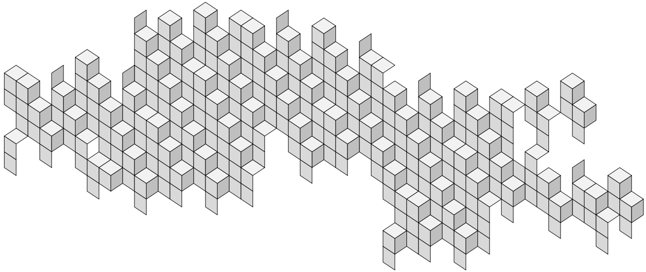
Il faut jouer sur le bord sans modifier les paramètres acceptables.

Exemple



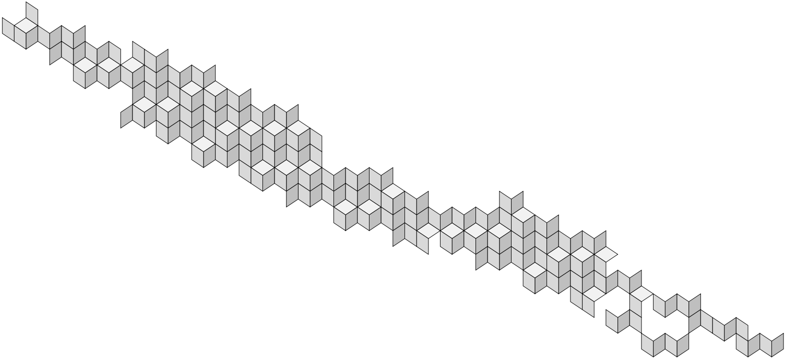
On lit $(a, i) = (2, 2)$.

Exemple



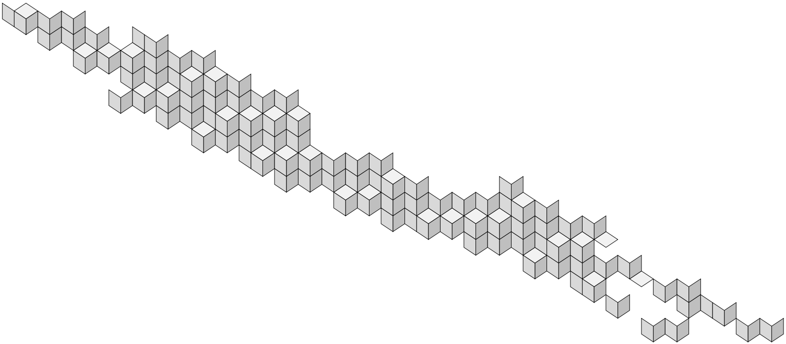
Modification des bords pour désubstituer par $E_1^*(\beta_{2,2})$.

Exemple



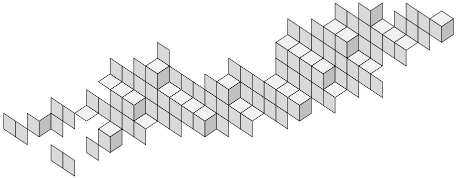
On lit $(a, i) = (1, 1)$.

Exemple



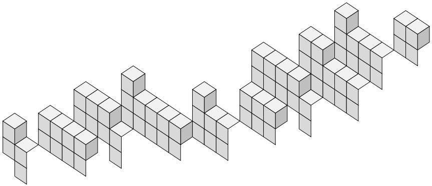
Modification des bords pour désubstituer par $E_1^*(\beta_{1,1})$.

Exemple



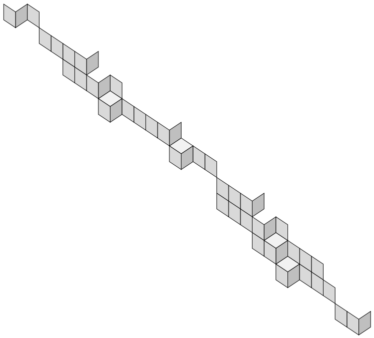
On lit $(a, i) = (2, 2)$.

Exemple



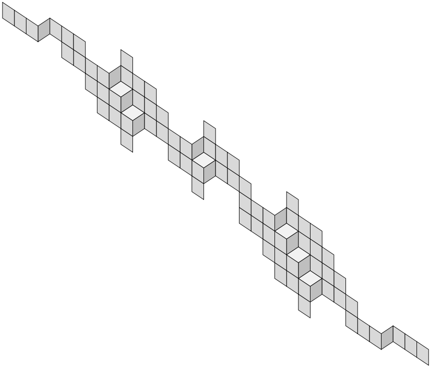
Modification des bords pour désubstituer par $E_1^*(\beta_{2,2})$.

Exemple



Les paliers ne permettent pas de lire (a, i)

Exemple



Même en prolongeant autant que possible. Cas terminal !

Cas terminaux

Typologie trop complexe ($\neq$ cas des droites).

Que faire ?

Cas terminaux

Typologie trop complexe ($\neq$ cas des droites).

Que faire ?

- faire un “pari” sur (a, i) et continuer à désubstituer ;

Cas terminaux

Typologie trop complexe ($\neq$ cas des droites).

Que faire ?

- faire un “pari” sur (a, i) et continuer à désubstituer ;
- Estimer que la convergence rapide du développement de Brun permet de prendre n’importe quels paramètres ($\simeq$ lissage) ;

Cas terminaux

Typologie trop complexe ($\neq$ cas des droites).

Que faire ?

- faire un "pari" sur (a, i) et continuer à désubstituer ;
- Estimer que la convergence rapide du développement de Brun permet de prendre n'importe quels paramètres ($\simeq$ lissage) ;
- recourir à un autre algorithme pour les (petits) cas terminaux

Complexité

Chaque étape : temps linéaire (lecture, désubstitution).
Diminution du nb. de faces à chaque étape : pas clair.

Complexité

Chaque étape : temps linéaire (lecture, désubstitution).
Diminution du nb. de faces à chaque étape : pas clair.

Mais le développement de Brun de $\frac{\vec{p}}{q}$ est de longueur $O(\log(q))$. Or

Proposition (F. 2007)

$$D(\mathcal{U}) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; D(\mathcal{U}) \cap \frac{1}{\varnothing(\mathcal{U})}\mathbb{Z}^d \neq \emptyset.$$

$\rightsquigarrow$ nb. d'étapes logarithmique en le diamètre $\varnothing(\mathcal{U})$ de $\mathcal{U}$.

Complexité

Chaque étape : temps linéaire (lecture, désubstitution).
Diminution du nb. de faces à chaque étape : pas clair.

Mais le développement de Brun de $\frac{\vec{p}}{q}$ est de longueur $O(\log(q))$. Or

Proposition (F. 2007)

$$D(\mathcal{U}) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; D(\mathcal{U}) \cap \frac{1}{\varnothing(\mathcal{U})}\mathbb{Z}^d \neq \emptyset.$$

$\rightsquigarrow$ nb. d'étapes logarithmique en le diamètre $\varnothing(\mathcal{U})$ de $\mathcal{U}$.

Morceau raisonnable $\rightsquigarrow$ cas terminal en temps quasi-linéaire.

Quelques questions en guise de conclusion :

- algorithme robuste de reconnaissance fractionné ?
- “facettisation” d’une surface (développement arborescent) ?