Dominos, apériodicité et quasicritaux (2/4)

Thomas Fernique

Dubna, 19-29 juillet 2012

1 Pavages de Robinson

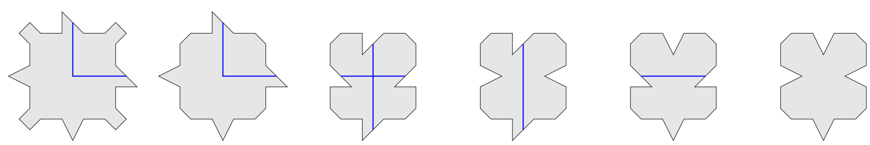


Figure 1 – Un *coin* NE, un *centre* NE et quatre *bras* S (de gauche à droite).

Définition 1 *Un coin d'ordre* 1 *est une tuile coin. Un coin d'ordre* $n \geq 2$ *est le carré de côté* $2^n - 1$ *formé de quatre coins d'ordre* $n-1$ *orientés vers un centre, les trous restant étant remplis par des bras.* [1]

Théorème 1 *Les tuiles de Robinson sont apériodiques.*

Preuve. D'un côté, on peut extraire de toute séquence de coins d'ordre croissant (Fig. 2) un pavage du plan. De l'autre côté, on prouve par induction que tout coin d'ordre n apparaissant dans un pavage y apparaît nécessairement dans un coin d'ordre $n+1$ (Fig. 3). Comme tout pavage contient clairement un coin d'ordre 1, il contient donc des coins d'ordre arbitrairement grand. Ces coins forment des carrés qui ne s'intersectent que s'ils sont de taille différente. Tout translation non trivial laissant invariant le pavage doit donc être plus grande que le côté de tous ces carrés. Ces carrés étant arbitrairement grand, c'est impossible : aucun pavage de Robinson n'est périodique. □

1. On vérifie qu'il y a une unique façon de remplir.

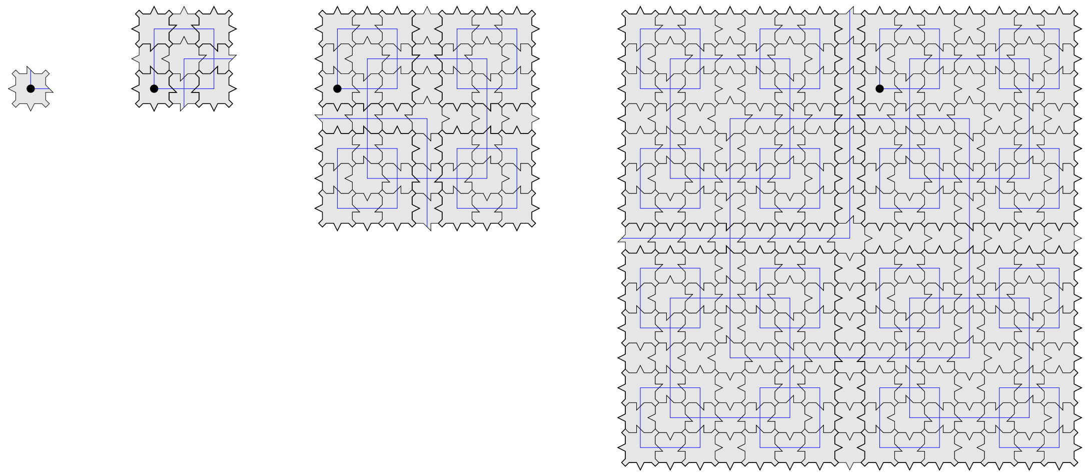


FIGURE 2 – Coins d'ordre 1 à 4.

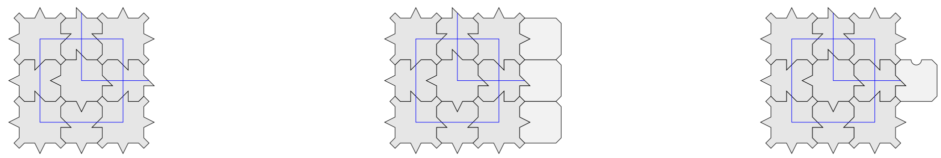
2 Pavages auto-similaires

2.1 Substitutions combinatoires

Une *substitution combinatoire* $\sigma = \{(P_i, Q_i, \gamma_i)_i\}$ est une relation entre des tuiles P_i et des pavages finis Q_i appelés *macro-tuiles*, telle qu'à toute face f de T_i correspond un ensemble fini de faces de la frontière de Q_i appelé *macro-face*.

Un pavage $\mathcal{P}$ par des tuiles P_i est un *antécédent* par σ d'un pavage $\mathcal{Q}$ par des macro-tuiles Q_i s'il y a une bijection entre tuiles et macro-tuiles telle que si deux tuiles sont adjacentes selon une face, alors les macro-tuiles correspondantes sont adjacentes selon les macro-faces correspondantes. Il y a *consistence* quand tout pavage par macro-tuiles (adjacence par macro-faces) admet un antécédent. L'*ensemble limite* d'un substitution combinatoire σ est formé des pavages qui admettent une suite infinie d'antécédents par σ.

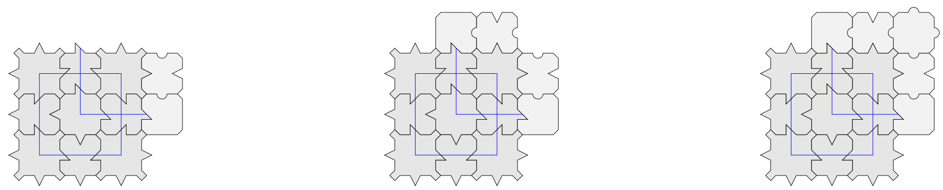
On parle de *simulation* quand on peut décorer les tuiles P_i (jeu τ) et les tuiles des macro-tuiles Q_i (jeu τ') de sorte à ce que tout pavage par des tuiles de τ' admette un antécédent par σ. Si en plus $\tau \subset \tau'$, alors tout pavage par des tuiles de τ' est dans l'ensemble limite de σ.



(a) Soit un coin NE d'ordre n.

(b) Les tuile sur son côté est sont forcément des bras.

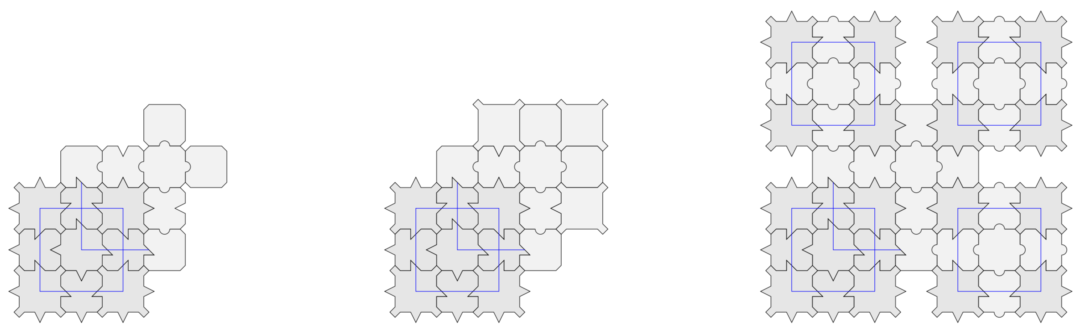
(c) Celle du milieu est S ou E : sa flèche N est rentrante.



(d) Cela force l'orientation du bras au nord.

(e) La situation est symétrique sur le côté nord.

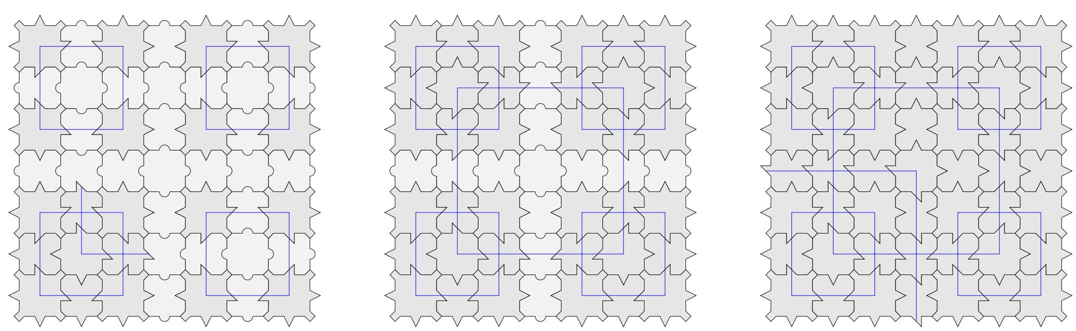
(f) Cela force un centre,



(g) deux bras,

(h) et trois coins d'ordre 1, faisant par induction partie de coins d'ordre n.

(i) Leur position est forcée par leurs arêtes sortantes.



(j) Les trous doivent ensuite être remplis par des bras partant du centre.

(k) Cela fixe l'orientation de tous les coins d'ordre n.

(l) Enfin, orienter le centre détermine le type de tous les bras.

Figure 3 – Dans un pavage, tout coin d'ordre n est dans un coin d'ordre $n+1$.

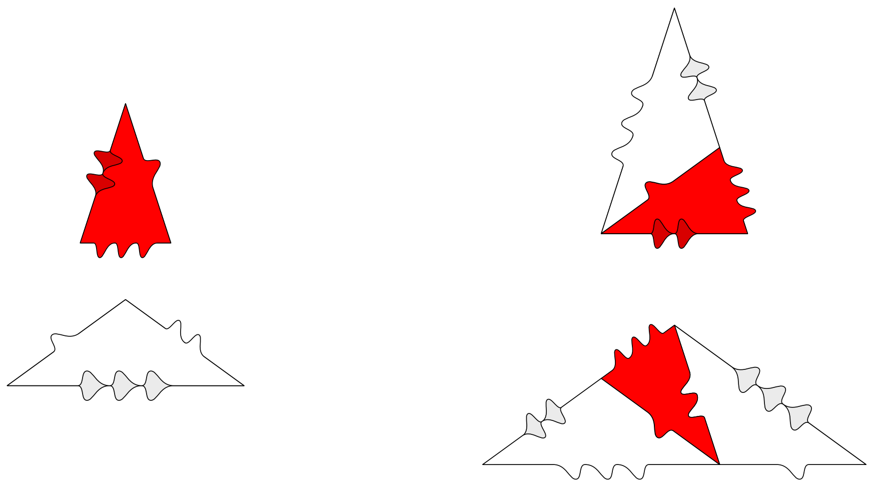


FIGURE 4 – Triangles de Penrose (à gauche) et métatriangles associés (à droite).

2.2 Soficité

Théorème 2 *L'ensemble limite d'une "bonne"[2] substitution est un shift sofique.*

Preuve. Soit une substitution combinatoire $\sigma = \{(P_i, Q_i, \gamma_i)_i\}$, où chaque P_i apparaît dans un Q_j. Soit $T_1, \ldots, T_n$ la liste de toutes les tuiles apparaissant dans les Q_i. On repère une tuile dite <u>centrale</u> dans chaque macro-tuile. On va définir un jeu τ en décorant les faces des T_i avec trois indexes (macro, voisin et parent) pris dans $\{1, \ldots, n\}$.

1. On force tout pavage à être un pavage par macro-tuiles via un *macro-index* sur chaque face de chaque tuile.
2. Le macro-index d'une face de tuile est codé par un *voisin-index* sur la macro-face de la macro-tuile qui doit la simuler.
3. Pour forcer les voisin-indices sur les macro-faces d'une macro-tuiles à venir tous d'une seule et même tuile T_i "parente", un *parent-index* i est transporté d'une macro-face à l'autre <u>sans passer</u> par la tuile centrale.
4. On code la paire voisin/parent-index d'une face de tuile sur la macro-face de la macro-tuile qui doit la simuler, plus précisément sur une face qui ne porte qu'un macro-index (pour ne pas dépasser trois indices par face).
5. On transporte "en étoile" cette paire voisin/parent-index de chaque macro-face d'une macro-tuile vers sa tuile centrale sans passer par une face transportant déjà le parent-index, mais de sorte à ce que chaque branche de l'étoile passe par une tuile qui "connaît" ce parent-index.

2. Il faut la consistence et des macro-tuiles "assez grosses" pour faire circuler l'information.

6. Sur les faces internes non croisées par les branches de l'étoile, on copie le macro-index sur le voisin-index (cette redondance sera utilisée).
7. Une tuile sur la $k^{\text{ème}}$ branche de l'étoile qui "connaît" le parent-index ne laisse passer sur cette branche qu'une paire voisin/parent qui peut exister sur la $k^{\text{ème}}$ face de la tuile parente (tout si la parente est centrale).
8. Une tuile centrale peut hériter des paires voisin/parent de n'importe quelle tuile non-centrale, dont elle est dit dérivée.

Ceci définit le jeu de tuiles τ. Une macro-tuile Q de parent-index i simule alors une tuile T qui est une T_i avec la même paire voisin/parent-index que la tuile centrale de Q. Mais T est-elle dans τ ?

1. Si la tuile parente est centrale, alors $T \in \tau$ car elle dérive d'une tuile (non centrale) de τ : celle dont dérive aussi la tuile centrale de Q !
2. Sinon, considérons la tuile non centrale $R \in \tau$ dont dérive la tuile centrale de Q. Non centrale, elle a au moins une face sur laquelle le voisin-index est une copie du macro-index (point 6), macro-index qui la caractérise. Par dérivation, ce voisin-index se retrouve sur la tuile centrale de Q, puis est transporté sur la branche correspondante de l'étoile jusqu'à une tuile qui "connaît" le parent-index i (point 5). Cette tuile assure alors que R est une tuile T_i décorée (point 7). Alors $T \in \tau$ car elle dérive de R.

Il faut pour finir montrer que tout pavage de l'ensemble limite peut-être vu comme une projection d'un pavage par τ (simple). $\square$

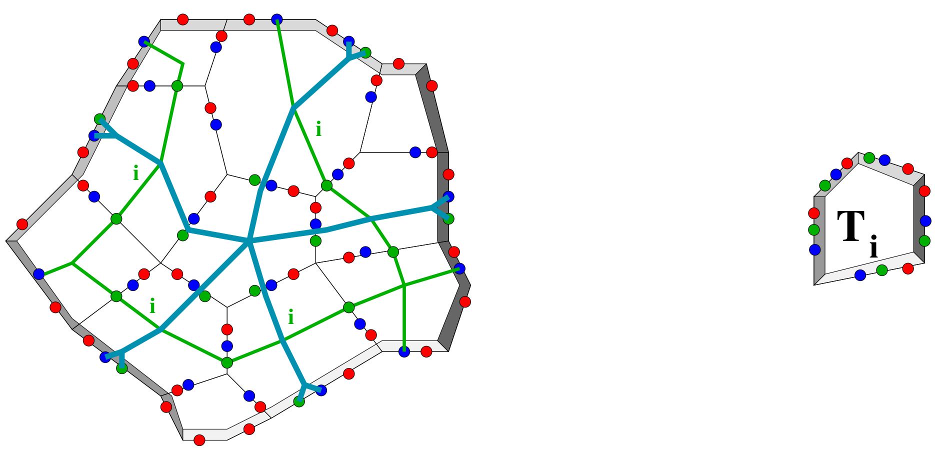


FIGURE 5 – Décorations des tuiles pour que les macro-tuiles les simulent.