Dominos, apériodicité et quasicritaux (1/4)

Thomas Fernique

Dubna, 19-29 juillet 2012

1 Dynamique symbolique

1.1 Shifts

Système dynamique : action d'une fonction T sur un espace X. Dynamique symbolique : une partition finie $\{X_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ de X permet de coder toute trajectoire $(T^n(x))_n$ par le mot u tel que, pour tout n, $T^n(x) \in X_{u_n}$. Lien entre les deux ?

Exemple 1 (Hedlund, 1944) *Mot sturmiens de pente $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$: codages des trajectoires de* $([0,1), x \mapsto x+\alpha \mod 1)$ *sur la partition* $\{[0,1-\alpha),[1-\alpha,1)\}$.

Autre exemple : billards (cours d'Alexeï Glutsyuk).

Définition 1 *Un* shift *est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ invariant par décalage.*

Fermé : pour la topologie induite par $d(u,v) = 2^{-\sup\{k \mid u[-k,k]=v[-k,k]\}}$ (Cantor).
Décalage : translate un mot de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ d'une lettre (c'est la fonction T du système).

Les notions classiques de dynamique se traduisent en dynamique symbolique :
- entropie ($\lim_{n\infty} \log(p_n)/n$, qui existe par sous-additivité [1]) ;
- transitivité (Si u, v sont facteurs d'un mot du shift, $\exists w$ tel que uwv aussi)
- mélange (idem mais w de la taille $n \geq N$ qu'on veut) ;
- minimalité = récurrence uniforme = quasipériodicité ;
- ergodicité (existence de fréquences pour les mots finis) ;
- equicontinuité (deux points proches le restent toujours) *vs.* expansivité ;
- ...

1. Soit $a = \inf_n \frac{u_n}{n}$, $\varepsilon > 0$, N tel que $\frac{u_N}{N} \leq a+\varepsilon$ et $u = \sup_{r<N} u_r$. Pour $k = qN + r$, $0 \leq r < N$, la sous-additivité donne $u_k \leq qu_N + u_r \leq \frac{k}{N}u_N + u_r \leq k(a+\varepsilon)+u$. Donc $\frac{u_k}{k} \leq a+\varepsilon+\frac{u}{k} \leq a+2\varepsilon$ pour k assez grand.

Ici, on s'intéresse plutôt au lien entre propriétés locales et globales des shifts. La motivation est typiquement informatique : des spécifications finies simples (plus simples qu'un programme) peuvent-elles assurer que, par exemple, un distributeur automatique (le système dynamique) marchera indéfiniment ?

1.2 Shifts de type fini

Définition 2 *Un shift X est de* type fini *s'il existe un ensemble fini F de facteurs finis tel que X est l'ensemble des mots de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ sans facteur dans F.*

Exemples dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$:

1. Golden mean shift : pas deux 1 consécutifs (SFT, entropie = nombre d'or) ;
2. even gap shift : plages finies de 0 de longueur paire (non SFT) ;
3. odd gap shift : plages finies de 0 de longueur impaire (non SFT) ;
4. uniform gap shift : plages finies de 0 de la même longueur (non SFT) ;
5. sturmiens (non SFT, cas particulier de prop. suivante).

Proposition 1 *Tout SFT non vide contient un mot périodique.*

Preuve. Soit X un SFT. Tout $u \in X$ admet un nombre fini de facteurs de la taille du plus grand facteur interdit, donc admet au moins un facteur apparaissant plus d'une fois. Il suffit alors de périodiciser entre deux occurences de ce facteur : il ne peut y avoir de facteur interdit. □

Proposition 2 *Un SFT est vide si tout mot assez grand a un facteur interdit.*

Preuve. Par l'absurde, supposons que l'ensemble W_0 des mots finis sans facteur interdit soit infini. On peut supposer que ces mots sont centrés sur 0.

- Il existe $c_0 \in \mathcal{A}$ tel que $\{w \in W \mid w[0] = c_0\} =: W_0$ soit infini.
- Il existe $c_1 \in \mathcal{A}^3$ tel que $\{w \in W_0 \mid w[-1,1] = c_1\} =: W_1$ soit infini.
- Il existe $c_k \in \mathcal{A}^{2k+1}$ tel que $\{w \in W_{k-1} \mid w[-k,k] = c_k\} =: W_k$ soit infini.

Le mot "diagonal" égal à c_k en positions $\pm k$ n'a pas de facteur interdit. □

La réciproque est triviale. Une preuve similaire montre que tout shift est *compact* pour la topologie de Cantor.

Proposition 3 *Il existe un algorithme qui décide si un SFT est vide on non.*

Preuve. Algorithme : examiner tous les mots finis par ordre lexicographique. Si on en trouve un qu'on peut périodiciser, s'arrêter et répondre "non vide". Si tous les mots d'une certaine taille contiennent un motif interdit, s'arrêter et répondre "vide". Terminaison et correction découlent des propositions 1 et 2. □

Définition 3 *Un* ω-automate *est un graphe fini dont les arêtes sont étiquetées. Les concaténations des étiquettes de ses chemins bi-infinis forment son* langage*.*

Proposition 4 *Tout SFT est le langage d'un* ω*-automate.*

Preuve. Soit m la taille maximale des mots interdits. Soit l'ω-automate :
- à chaque mot u de taille m non interdit correspond un état q_u ;
- il y a une transition $q_u \xrightarrow{a \in \mathcal{A}} q_v$ si on peut écrire $u = aw$ et $v = wb$.

Un mot interdit ne peut être lu qu'en partant d'un état… qui n'existe pas. Réciproquement, tout mot sans facteur interdit correspond bien à un chemin bi-infini de l'automate. Le SFT est donc le langage de cet ω-automate. □

Donner un ω-automate pour le golden mean shift. Remarquer que odd/even gap shifts, bien que pas de type fini, sont des langages d'ω-automates.

1.3 Shifts sofiques

Définition 4 *Le langage d'un* ω*-automate est un shift, dit* sofique*.*

Exemples dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$:

1. Golden mean shift (SFT donc sofique) ;
2. even gap shift (sofique, donner ω-automate) ;
3. odd gap shift (sofique, donner ω-automate) ;
4. uniform gap shift (non sofique, via lemme de l'étoile) ;
5. sturmiens (non sofique comme tout non-periodique, idem SFT).

On voudrait une définition plus combinatoire, dans l'esprit des mots interdits.

Définition 5 *Une application* ϕ *sur les mots bi-infinis est un* facteur *s'il existe* $w \geq 0$ *tel que, pour tout* u *et tout* n*,* $\phi(u)[n]$ *ne dépend que de* $u[n-w, n+w]$*.*

On parle aussi de *code à fenêtre glissante* (*sliding block code*), de *dérivation locale* ou d'*automate cellulaire* (uni-dimensionnel). Ce sont exactement les fonctions invariantes par décalage et continue pour la topologie de Cantor.

Proposition 5 *Tout shift sofique est la factorisation d'un SFT.*

Preuve. Considérons un shift sofique X et un ω-automate dont c'est le langage. Individualisons chaque transition : $q_i \xrightarrow{a} q_j$ devient $q_i \xrightarrow{a_{ij}} q_j$. Le shift sur l'alphabet des transitions dont les facteurs interdits sont tous les mots $a_{ij}b_{kl}$ tels que $j \neq k$ (*i.e.*, on garantit que les transitions peuvent s'enchaîner) se projette alors sur X via le facteur $\phi : a_{ij} \mapsto a$ (désindividualisation). □

Faire la construction (non optimale) de la preuve pour les odd et even gap shift.

Deux shifts qui se factorisent l'un sur l'autre sont dits *(topologiquement) conjugués* ou *mutuellement localement dérivables*. Par exemple, odd/even gap shifts sont conjugués via les automates cellulaires 252 et 12 ($10x \mapsto 1/11x \mapsto 0$).

Les propositions 1, 2 et 3 s'étendent sans problème au shifts sofiques.

2 Dimensions supérieures

2.1 Shifts d-dimensionnels

La notion de shift s'étend naturellement en dimensions supérieures. Un mot d-dimensionnel est une application d'un domaine $D \subset \mathbb{Z}^d$ dans un alphabet $\mathcal{A}$. Il est dit complet si $D = \mathbb{Z}^d$, fini si D est fini. Un mot u est un facteur d'un mot v, noté $u \prec v$, s'il apparaît dans v (à translation près). Une application ϕ sur les mots complets est un facteur si l'image de chaque lettre de chaque mot ne dépend que d'un voisinage uniformément borné. La distance $d(u,v) = 2^{-\sup\{k \mid ||x||_\infty \leq k \Rightarrow u[x]=v[x]\}}$ permet d'étendre la topologie de Cantor aux mots complets d-dimensionnels. Le décalage translate un mot complet dans une des directions de la base canonique de $\mathbb{Z}^d$.

Définition 6 *Un shift d-dimensionnel X est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ invariant par décalage. Il est de type fini s'il existe un ensemble fini F de mots finis tels que X est l'ensemble des mots complets sans facteur dans F. Il est sofique si c'est une factorisation d'un shift de type fini.*

Exemples dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$:

1. Damiers infinis (SFT, avec 2 motifs interdits en dim. 2) ;
2. even gap shift : trous finis de taille paire (sofique[2]) ;

2. repousser preuve à pavages, car plus visuel

3. odd gap shift (non sofique pour $d \geq 3$ (dur). $d = 2$?).

La proposition 2 (extraction diagonale) s'étend naturellement, mais pas la proposition 1 (existence d'un point périodique). Peut-on néanmoins toujours trouver un mot périodique (vecteurs de périodicité engendrant tout l'espace) dans un shift multidimensionnel ? Si c'est le cas, la proposition 3 (décidabilité) s'étend naturellement. Elle pourrait *a priori* aussi s'étendre même s'il n'y avait pas toujours de mot périodique (avec une autre preuve).

2.2 Quasipériodicité

Pour alléger la présentation, les domaines des mots finis ici considérés sont des hypercubes. La taille d'un tel mot est alors le côté de cet hypercube (ce qui correspond, en dimension 1, à la définition usuelle).

Définition 7 *Un mot u est* quasipériodique *si, pour tout facteur fini c de u, la taille des facteurs de u ne contenant pas c est uniformément bornée.*

En d'autres termes, tout facteur d'un mot quasipériodique réapparaît à distance uniformément bornée de n'importe quelle position. En particulier, tout mot périodique est quasipériodique (la période offrant une borne, qui ne dépend d'ailleurs pas du facteur considéré). Les mots sturmiens donnent un exemple de mots quasipériodiques non périodiques.

Proposition 6 *Tout shift non vide contient un mot quasipériodique.*

Preuve. Soit X un shift non vide.
- Si $u_0 \in X$ n'est pas quasipériodique, il admet un facteur c_0, dit *critique*, et des facteurs de taille non uniformément bornée dont c_0 n'est pas facteur. On déduit de la proposition 2 l'existence de $u_1 \in X$ tel que $c_0 \not\prec u_1 \prec u_0$.
- On construit une suite $u_0 \succ u_1 \succ \ldots$ avec c_n facteur critique de u_n. Comme c_n est aussi critique pour $u_{k<n}$, $|c_n|$ n'est pas uniformément bornée. On choisit de plus c_n de taille minimale parmi les facteurs critiques de u_n.
- On déduit de la proposition 2 l'existence d'un minorant $u_\infty \in X$ de $(u_n)_n$. Si u_∞ admet un facteur critique c, alors c est facteur critique de tout u_n, ce qui, dès que $|c_n| > |c|$, contredit la façon dont c_n a été choisi.

Le shift X contient donc le mot quasipériodique u_∞. $\square$

Ce résultat permet-il d'adapter la preuve de la proposition 3 ?

2.3 Le problème des dominos

En 1961, motivé par des problèmes de logique, Hao Wang se pose la question suivante, connue sous le nom de *problème des dominos*. Étant donné un nombre fini de carrés unité dont on a colorié les arêtes, qu'il appelle dominos, peut-on décider si le plan peut être recouvert par des copies translatés de ces dominos qui ne s'intersectent que sur des arêtes de la même couleur (comme au jeu de dominos) – on parle de *pavage* du plan.

Cette question revient exactement à se demander si l'on peut décider si un shift de type fini est vide ou non. Wang conjecture que si un jeu de dominos permet de paver le plan, alors il permet de le faire périodiquement, et il en déduit comme on l'a fait la décidabilité du problème des dominos.

On peut généraliser avec des dominos ayant diverses formes (par exemple, des polygones) – on parle alors de *tuiles* – et en autorisant d'autre isométries en plus des translations. Toutes les notions ou résultats passant du cas des shifts unidimensionnels au shifts multidimensionnels passent ici aussi (avec la restriction que ces tuiles ne peuvent couvrir une boule que d'un nombre fini de façons différentes – on parle de *complexité locale finie*). L'interprétation en terme de système dynamique symbolique devient cependant plus lointaine...

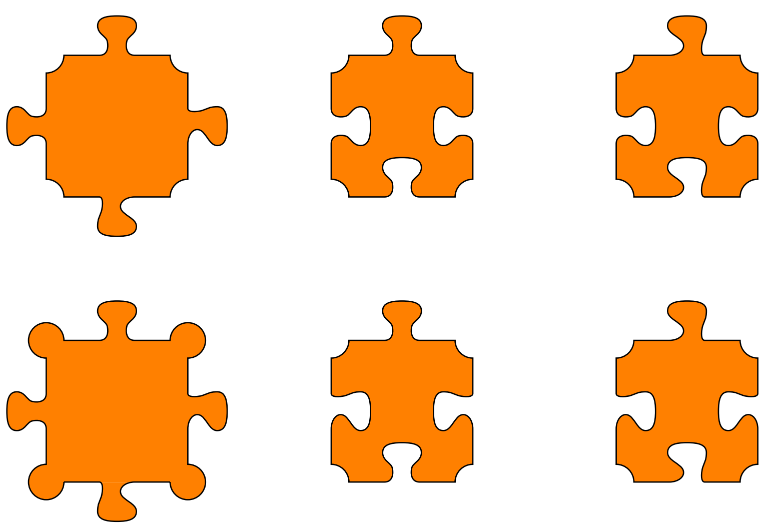

FIGURE 1 – Comment paver le plan avec des copies isométriques de ces tuiles ?