

Empilements de pièces et variations

Thomas Fernique

Dubna, 19–29 juillet 2018

1 Une pièce

Comment disposer sans chevauchement le plus grand nombre de pièces de monnaie toutes identiques une table ? La forme de la table peut jouer un rôle, mais on s'intéresse au cas d'une table infinie.

Formellement, on appelle *empilement* un ensemble de disques de rayon unité d'intérieurs deux-à-deux disjoints. Sa *densité* est définie par

$$\delta := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{aire de } D(0, r) \text{ couverte par les disques}}{\text{aire totale de } D(0, r)},$$

où $D(0, r)$ désigne le disque de rayon r centrée en l'origine. On pourrait au lieu de disques prendre des carrés ou d'autres formes, la densité serait la même du moment que le ratio périmètre/aire des formes prises tend vers 0. On est obligé de prendre la $\lim \sup$ car la limite simple n'est pas forcément définie, certaines régions pouvant être bien plus vides que d'autres).

La question devient : quel est la densité maximale d'un empilement et, si elle est atteinte¹, quels empilements la maximisent ?

Parmi les empilements, on distingue ceux dont les disques sont centrées sur les points d'un *réseau* : ils sont dits *réguliers* et sont particulièrement simples à décrire. C'est par exemple le cas de l'empilement *carré*, où les disques sont centrés sur la grille carré de côté 2 et la densité vaut $\frac{\pi}{4} \simeq 0,785$, ou encore l'empilement *hexagonal*, où les disques sont centrés sur la grille

1. ce qui n'est pas *a priori* le cas.

triangulaire de côté 2 et la densité vaut $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \simeq 90\%$. Le Franco-italien Joseph Louis Lagrange (1736–1813) a montré

Proposition 1 (Lagrange, 1772) *La densité maximale d'un empilement régulier dans le plan est $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \simeq 90\%$.*

Preuve. Considérons un empilement régulier. Soient \vec{u} un plus court vecteur du réseau et \vec{v} un plus court parmi ceux qui ne sont pas liés à \vec{u}^2 . Alors \vec{v} est dans la bande (dessiner) :

$$\{\vec{x}, \quad |\langle \vec{x} | \vec{u} \rangle| \leq \frac{1}{2} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{x}\|\}.$$

En effet, si ce n'était pas le cas on pourrait raccourcir \vec{v} en lui ajoutant $\pm\vec{u}$. On en déduit $|\cos(\vec{v}, \vec{u})| \leq \frac{1}{2}$ (car $\|\vec{v}\| \geq \|\vec{u}\|$), *i.e.*, ces vecteurs font un angle entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$. Le volume du parallélogramme d'arêtes \vec{u} et \vec{v} vérifie donc

$$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \alpha \geq 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Comme ce parallélogramme contient exactement un disque au total (c'est un domaine fondamental du réseau), on en déduit la densité annoncée. \square

Un peu plus général que les empilements réguliers sont les empilements *périodiques*, *i.e.*, invariants par deux translations indépendantes. Leur densité peut être arbitrairement proche de celle de tout empilement :

Proposition 2 *La densité maximale des empilements périodiques est égale à celle de tous les empilements.*

Preuve. Si un empilement a une densité à ε de la densité maximale, alors pour r assez grand sa restriction à un carré $r \times r$ recopiée sur la grille carrée de côté r donne un empilement périodique avec une densité à 2ε de la densité maximale. L'égalité s'obtient en passant à la limite. \square

On peut *a priori* avoir un empilement aperiodique plus dense que tout empilement périodique. Cependant, le Norvégien Axel Thue (1863–1922) a démontré que la densité maximale était atteinte pour les empilement réguliers (donc pour l'empilement hexagonal compact) :

2. C'est une base du réseau, dite réduite, qu'on peut calculer en temps quadratique en la longueur du codage des coefficients d'une base donnée avec l'*algorithme de Lagrange*.

Théorème 1 (Thue, 1910) *La densité maximale d'un empilement dans le plan est $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \simeq 90\%$.*

La preuve originale de Thue est considérée comme incomplète, et la première preuve reconnue complète est due au Hongrois László Fejes Tóth en 1940 (voir partie 4). On suivra ici la preuve de [1], qui repose sur la *triangulation de Delaunay* - une notion due au Russe Boris Nikolaevitch Delaunay³ (1890–1980). Introduisons d'abord la notion de *diagramme de Voronoï*, formalisée par le Russe Gueorgui Feodossievitch Voronoï (1868–1908), dont Delaunay fut l'étudiant :

Définition 1 *Le diagramme de Voronoï d'un ensemble discret de points du plan est la partition du plan en régions appelés cellules, chacune contenant exactement un point appelé son centre, et formée des points du plan plus près de ce centre que de tout autre centre.*

Les cellules sont des intersections de demi-plans, donc des polyèdres convexes. On peut construire ce diagramme en ajoutant un à un les points, sa cellule étant délimitée par les médiatrices des segments reliant ce nouveau point aux anciens. Le *dual* du diagramme est le graphe obtenu en reliant par une arête les centres des cellules adjacentes (selon une arête).

Proposition 3 (Delaunay, 1924) *Le dual du diagramme de Voronoï d'un ensemble de points du plan dont 4 ne sont jamais cocycliques est une triangulation telle que le cercle circonscrit à chaque triangle ne contient aucun point de l'ensemble initial dans son intérieur.*

Preuve. Exercice. □

Une telle triangulation est appelée une *triangulation de Delaunay*. S'il y a 4 points cocycliques, le dual contient un quadrilatère qui peut être triangulé de deux façons, chacune donnant une triangulation de Delaunay. Les triangulations de Delaunay ont plein de jolies propriétés qui font qu'elles sont beaucoup utilisées, par exemple en *infographie* (maillage de surfaces) ou en *optimisation* (routage efficace).

3. En russe Делоне, dont la transcription standard est Delone, mais généralement transcrit par Delaunay en français car il s'agit du nom de ses ancêtres - lui-même préférait cette transcription.

Pour majorer la densité dans le cas général, on suppose l'empilement *saturé*, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun trou assez gros pour y ajouter un disque. Comme saturer un empilement ne fait que le densifier, il suffit bien de considérer ces empilements pour obtenir la densité maximale. Le point essentiel est que les triangles de Delaunay ne sont jamais très plats (Fig. 1) :

Lemme 1 *Dans une triangulation de Delaunay des centres d'un empilement saturé, le plus grand angle de chaque triangle est entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.*

Preuve. Soit ABC un triangle et A son plus grand angle. On a $\widehat{A} \geq \frac{\pi}{3}$ car la somme des angles vaut π . Si $\widehat{A} \geq \frac{2\pi}{3}$, alors $\widehat{B} + \widehat{C} \leq \frac{\pi}{3}$ et donc le plus petit angle - mettons \widehat{B} - est plus petit que $\frac{\pi}{6}$. Donc $\sin \widehat{B} \leq \frac{1}{2}$, et comme $\overline{AC} \geq 2$, la *loi des sinus* permet de minorer le rayon R du cercle circonscrit à ABC :

$$2R = \frac{\overline{AC}}{\sin \widehat{B}} \geq 4.$$

Mais alors on peut ajouter un disque de rayon 1 au centre du cercle circonscrit : comme ce cercle est de rayon $R \geq 2$ et qu'il ne contient aucun point, le nouveau disque n'intersectera aucun autre disque. Ceci contredit l'hypothèse que l'empilement est saturé. Donc $\widehat{A} \leq \frac{2\pi}{3}$. \square

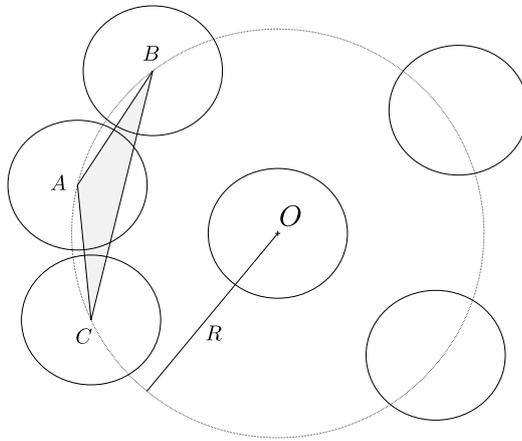


FIGURE 1 – Dans un empilement saturé, les triangles ne sont pas trop plats.

On en déduit facilement que dans une telle triangulation, l'aire d'un triangle est au moins $\sqrt{3}$. En effet, si \widehat{A} désigne le plus grand angle d'un triangle

ABC, son aire \mathcal{A} vérifie :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \hat{A} \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Or chaque triangle contient *en moyenne* un demi disque, dans le sens où une part des secteurs des disques en ses sommets peut empiéter sur le triangle voisin (ou réciproquement) mais la moyenne sur tous les triangles donne bien un demi-disque par triangle. La densité est donc bien majorée par $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

2 Une orange

Les empilements de disques dans le plan sont un cas particulier, pour $n = 2$, des empilement de sphères dans \mathbb{R}^n . Pour $n = 1$, cela revient à empiler des intervalles sur la droite : la densité maximale est évidemment 100%. À partir de $n = 3$, la situation se complique.

Une façon d'empiler des oranges sur un étal de maraîcher est de former une première couche carrée (centres disposés sur une grille carrée), puis une seconde couche identique où chaque orange vient se loger dans une cavité formée par 4 oranges de la couche inférieure, et ainsi de suite (Fig. 2).

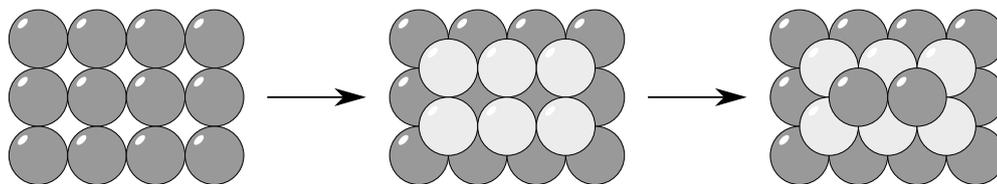


FIGURE 2 – Empiler des oranges par couches carrées.

Une autre façon est de former une première couche hexagonale compacte (centres disposés sur une grille triangulaire), puis une seconde couche identique où chaque orange vient se loger dans une cavité formée par 3 oranges de la couche inférieure, et ainsi de suite (Fig. 3). Il y a cependant un choix à faire à chaque couche, car seulement la moitié des cavités de la couche

inférieure sont occupées. On peut soit disposer la dernière couche exactement au-dessus de l'antépénultième, soit la disposer de l'unique autre façon possible (Fig. 3, droite). On peut ensuite coder les couches successives par une suite de lettres A, B ou C de sorte que deux couches exactement l'une au-dessus de l'autre correspondent à la même lettre. Toute suite de A, B et C sans lettres identiques consécutives code alors un empilement (en particulier, il y en a un nombre indénombrable).

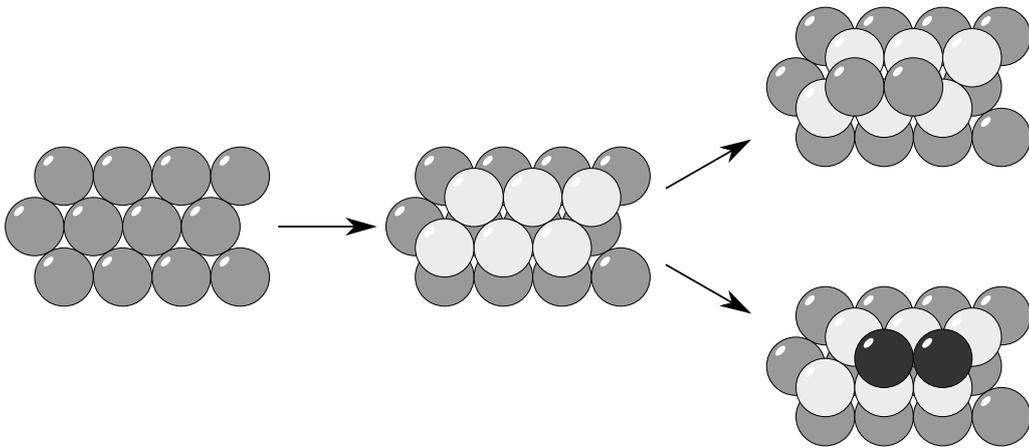


FIGURE 3 – Empiler des oranges par couches hexagonales compactes.

Parmi les empilements par couches hexagonales compactes, celui qui alterne parfaitement deux lettres (il est unique à translation près) est appelé *hexagonal compact* (Barlow, 1883). Celui qui alterne parfaitement les trois lettres n'est autre que l'empilement par couches carrées (Fig. 4), aussi appelé *cubique à faces centrées* (FCC) par les cristallographes (Fig. 5). Seul ce dernier est régulier.

Proposition 4 *Les empilements par couches hexagonales compactes sont tous de densité $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%$.*

Preuve. L'espace entre les plans contenant les centres des sphères de deux couches hexagonales compactes voisines peut être décomposé en parallélépipèdes tous identiques dont les sommets sont les centres des sphères (Fig. 6).



FIGURE 4 – L’empilement par couches carrées est un cas particulier d’empilement par couches hexagonales compactes. La coloration suit les couches hexagonales compactes à gauche et les couches carrées à droite.

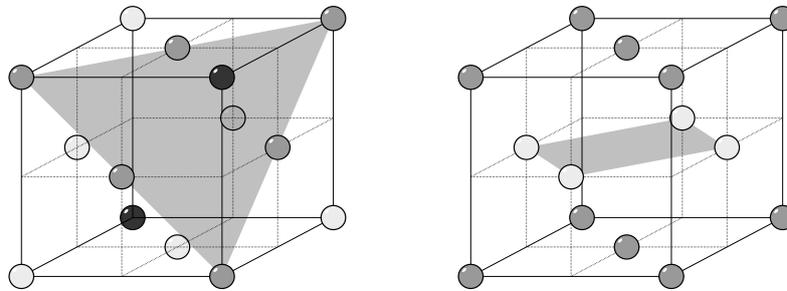


FIGURE 5 – L’empilement cubique à faces centrées. La coloration suit les couches hexagonales compactes à gauche et les couches carrées à droite.

Le volume d'un parallélépipède de côtés de longueur a , b et c et dont trois faces ont en leur sommet commun des angles α , β et γ vaut (exercice)

$$\mathcal{V} = abc\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Ici, avec $a = b = c = 2$ et $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, on trouve $\mathcal{V} = 4\sqrt{2}$. Ce parallélépipède contient exactement une sphère, de volume $\frac{4}{3}\pi$. Sa densité, qui est aussi celle de tout arrangement obtenu en superposant des couches hexagonales compactes, vaut donc $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%$. On peut aussi considérer le parallélépipède de base carrée (aire 4), la face supérieure aussi carrée avec un sommet à la verticale du centre de la base : sa hauteur est plus facile à calculer, elle vaut $\sqrt{2}$. \square

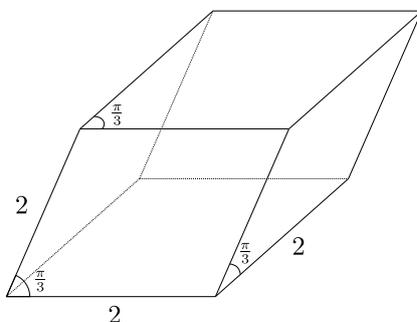


FIGURE 6 – Maille d'un empilement par couches hexagonales compactes.

Conjecture 1 (Kepler, 1611) *La densité maximale d'un empilement dans l'espace est $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%$.*

Comme en 2D, la densité maximale serait alors réalisé par des empilements réguliers (notamment le FCC comme le conjecturait Kepler). Cependant, contrairement au cas 2D, il y aurait aussi des empilements apériodiques de densité maximale : il suffit d'alterner aléatoirement les couches hexagonales compactes. À défaut de démontrer cette conjecture, le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777–1855) a démontré que c'était la densité maximale pour les empilements réguliers :

Proposition 5 (Gauss, 1831) *La densité maximale d'un empilement régulier dans l'espace est $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%$.*

Preuve. Considérons un empilement régulier. Soient \vec{u} un plus court vecteur du réseau, \vec{v} un plus court parmi ceux qui ne sont pas liés à \vec{u} , et \vec{w} un plus court parmi ceux pas dans le plan engendré par \vec{u} et \vec{v} ⁴. L'angle α fait par \vec{v} avec \vec{u} est entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ car sinon on pourrait raccourcir \vec{v} . Les angles β et γ faits par \vec{w} avec \vec{u} et \vec{v} sont aussi entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ car sinon on pourrait raccourcir \vec{w} . Soient a , b et c les longueurs de ces vecteurs. On a déjà vu que le volume du parallélépipède qu'ils engendraient était :

$$\mathcal{V} = abc\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Intuitivement, ce volume est maximal quand le parallélépipède est un cube unité ($\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$) et minimal quand il est le plus “écrasé” possible, *i.e.*, α , β et γ valent chacun $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$. On peut le montrer par une étude de fonction (exercice). Comme $a, b, c \geq 2$, on en déduit

$$\mathcal{V} \geq 8\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Le résultat suit car le parallélépipède contient une sphère, de volume $\frac{4\pi}{3}$. \square

Sans l'hypothèse de régularité, le bon mot de l'Anglais Claude Ambrose Rogers (1920–2005) résume assez bien la situation qui perdura longtemps : “Many mathematicians believe, and all physicists know, that the density cannot exceed 0.7404”. La conjecture finit cependant par être démontrée en 1998 par l'Américain Thomas Callister Hales et son doctorant Samuel Ferguson, dans ce que certains estiment être la preuve la plus difficile qui soit à ce jour :

Théorème 2 (Hales-Ferguson, 1998) *La densité maximale d'un empilement dans l'espace est $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%$.*

C'est une preuve de plus de 300 de pages réparties en 8 articles et, surtout, avec un usage intensif de l'ordinateur non seulement pour calculer mais aussi pour *prouver*, notamment traiter (éliminer, subdiviser *etc.*) de très nombreux cas de configurations locales. La preuve a été vérifiée pendant 4 ans par une équipe d'une quinzaine d'experts internationaux reconnus (donc Gabor Fejes

4. C'est bien une base du réseau, mais ça n'est plus forcément vrai à partir de la dimension 4!

Tóth, le fils de Laszló) qui sont arrivés à la conclusion qu'elle était "très probablement juste" (modulo quelques erreurs signalées qui ont été rapidement corrigées).

De son côté, Hales a monté une équipe d'une trentaine de personnes pour établir une *preuve formelle*, achevée en 2014 (projet Flyspeck en Caml et HOL-light, environ 500000 lignes de code). Après le précédent du théorème des 4 couleurs (1974), il se pourrait bien que de telles preuves assistées par ordinateur prennent une place grandissante en mathématiques.

Soulignons d'ailleurs que le premier théorème d'incomplétude de Gödel nous assure qu'il y a des énoncés vrais mais indémontrables (dans toute théorie suffisante pour coder l'arithmétique de Peano). La longueur de la plus petite démonstration d'un théorème n'est donc pas calculable en fonction de la longueur de l'énoncé de ce théorème (sinon il suffirait d'essayer toutes les preuves de cette longueur). En particulier, la longueur de la preuve d'un théorème peut être arbitrairement plus grande que son énoncé : le Livre cher à Erdős doit avoir des pages pas très belles. . .

L'idée de la preuve sera discuté en partie 4, afin de le comparer avec le cas des empilements avec un disque (partie 1) et ceux avec deux disques (partie 3).

3 Deux pièces

Peut-on faire plus dense avec deux pièces de monnaie de rayons différents qu'avec une seule ? Utiliser chaque type sur une moitié de plan ne changera pas la densité (Fig. 7, gauche) : il faut mélanger suffisamment les pièces ! On peut, par exemple, densifier l'empilement hexagonal avec une pièce de rayon 1 en insérant dans chaque trou une nouvelle pièce de rayon $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \simeq 0.15$ (Fig. 7, centre). En prenant des pièces encore plus petites, on peut en mettre plusieurs dans chaque trou et densifier encore l'empilement (Fig. 7, droite).

Prendre des petites pièces de plus en plus petites permet de densifier toujours plus l'empilement :

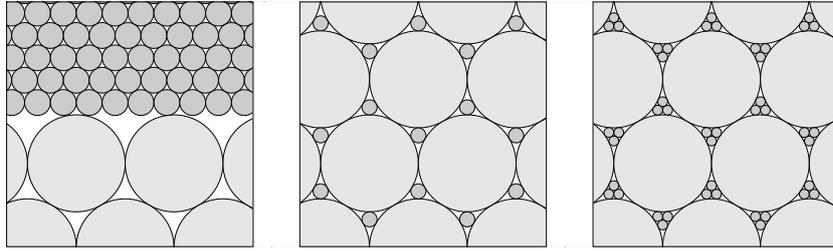


FIGURE 7 – Trois empilements de plus en plus denses avec deux disques.

Proposition 6 *Quand r tend vers 0, la densité maximale tend vers*

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(2 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) \simeq 99.13\%.$$

Preuve. Notons $\delta := \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. Fixons un empilement. Considérons un carré de côté k . Soit S_1 et S_r la surface de ce carré couverte par, respectivement, les grands et petits disques. On a

$$S_1 \leq \delta k^2 + O(k),$$

où le $O(k)$ vient du 1-voisinage du bord du carré, dans lequel l’empilement pourrait être particulièrement dense. Il reste une surface $k^2 - S_1$ à remplir avec les petits disques. On a

$$S_r \leq \delta(k^2 - S_1) + O(k^2 r),$$

où le $O(k^2 r)$ vient du r -voisinage des grands disques (il y en a $O(k^2)$), dans lequel l’empilement pourrait être particulièrement dense. La proportion du carré couverte par les disques est donc

$$\frac{S_1 + S_r}{k^2} \leq \delta + (1 - \delta)\delta + O(r).$$

Ce qui montre que la limite de la densité pour $r \rightarrow 0$ est inférieure à $\delta + (1 - \delta)\delta$ (avec une déviation $O(r)$ au voisinage, donc même si ça peut éventuellement être un peu plus dense pour quelques valeurs particulières, ça reste marginal). Pour atteindre cette borne, il suffit d’empiler les grands disques sur la grille triangulaire et de même pour les petits dans les interstices laissés. \square

Et si, au contraire, on veut de “grands” petits disques? S’ils sont trop grands, on ne pourra pas faire mieux qu’avec un seul disque :

Théorème 3 (Blind, 1969) *Si un deuxième disque permet d'empiler plus densément qu'avec un seul, le ratio des rayons de ces disques est au plus*

$$\sqrt{\frac{6 \tan \frac{\pi}{6} - 7 \tan \frac{\pi}{7}}{5 \tan \frac{\pi}{5} - 6 \tan \frac{\pi}{6}}} \simeq 0.74299$$

Quelle est le ratio maximal qui permet de faire mieux qu'avec un disque ? Existe-t-il un ratio en dessous duquel on peut toujours faire mieux ? Comment se comporte la densité maximale en fonction du ratio ? Est-elle monotone ? Continue ? A-t-elle des maxima locaux ? Autant de questions ouvertes. On connaît néanmoins une borne supérieure sur la densité réalisable :

Théorème 4 (Florian, 1960) *La densité d'un empilement à deux disques est majorée par la densité dans un triangle formé par les centres de deux petits disques et d'un grand disque, deux-à-deux tangents.*

Preuve. Tóth et Molnár (1958) ont montré que la densité d'un empilement de disques (sans restriction de nombre) est bornée par la densité maximale d'un triangle qui rejoint les centres de trois disques. Ils introduisent pour cela une extension de la triangulation de Delaunay : chaque cellule duale est l'ensemble des points du plan plus près d'un disque donné que de tout autre (si les disques sont tous identiques les deux notions coïncident). Ces triangulations ont la propriété que les secteurs des disques centrés sur les sommets d'un triangle ne sortent jamais de ce triangle. Puis ils montrent comment gonfler ou déplacer les disques sans diminuer la densité de sorte à obtenir un triangle "tight" de disques deux à deux tangents⁵ Florian utilise ça pour montrer que la densité maximale est toujours obtenue pour le triangle avec deux petits disques et un grand. \square

Pour un grand disque de rayon 1 et un petit disque de rayon r , ce triangle isocèle est d'aire $r\sqrt{1+2r}$ et la portion qui en est couverte est d'aire

$$\frac{\alpha}{2\pi} \times \pi + \frac{\pi - \alpha}{2\pi} \times \pi r^2,$$

où α est l'angle au sommet, qui vérifie $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{1+r}$. On en déduit une expression explicite de la borne de Florian, représentée Fig. 8.

5. Ou deux triangles "stretched" qui peuvent être recomposés en deux "tight".

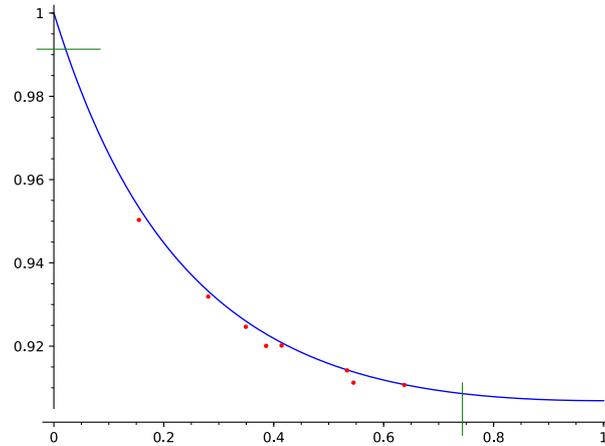


FIGURE 8 – Borne supérieure de Florian de la densité d’un empilement à deux disques en fonction du ratio des rayons. Les points rouges indiquent, pour chaque ratio permettant un empilement rigide, la densité maximale de ces empilements. Les segments verts indiquent la densité maximale (Prop. 6) et le rayon maximal qui permet de densifier l’empilement à un disque (Th. 3).

Dans les exemples Fig. 7 (centre et droit), les rayons des petits disques ont été choisis de sorte à ce que “ça s’arrange bien” (un peu comme les oranges dans les cavités). Ce sont des empilements *localement rigides* ou plus simplement *rigides* :

Définition 2 *Un empilement de disque est dit rigide si les disques tangents à un même disque forment une couronne où chacun est tangent au suivant.*

La dénomination vient du fait que dans un tel empilement les disques d’une couronne ne peuvent pas être déplacés indépendamment les uns des autres (rigidité), même sans tenir compte des autres disques de l’empilement (rigidité locale). De manière équivalente, un empilement est rigide si les trous sont tous des triangles curvilignes, ou bien encore si le graphe qui relie les centres des disques tangents est triangulé. Intuitivement ce sont de bons candidats pour maximiser la densité. L’empilement hexagonal avec un seul disque est d’ailleurs lui aussi rigide. Ils sont cependant rares :

Théorème 5 (Kennedy, 2006) *Il y a exactement 9 ratios de rayons qui permettent un empilement rigide à deux disques.*

Preuve. Autour d'un petit disque il y a au plus 6 petits disques, *a fortiori* moins s'il y a aussi des grands disques. Il y a donc un nombre fini de *petites couronnes* possibles. On les code par la suite des rayons de leurs disques. Elles ont au moins 3 disques sinon elle ne peuvent pas entourer un petit disque. On écarte 1rr, 1rrr, 1rrrr, 1r1r et 11r pour la même raison. Il reste rrrrrr, 11111 et les 9 données Tab. 1.

Une couronne correspond à une relation sur les angles entre les segments du centre du disque central à ceux de deux disques consécutifs de la couronne :

$$i \times \widehat{1r1} + j \times \widehat{1rr} + k \times \widehat{rrr} = 2\pi.$$

On en déduit une équation algébrique en r en procédant comme suit :

1. prendre le cosinus de l'équation (ou le sinus si on préfère) ;
2. développer au maximum via les formules d'additions ;
3. remplacer $\sin a$ par $\sqrt{1 - \cos^2 a}$;
4. remplacer $\cos a$ par une fraction rationnelle en r (loi des cosinus) ;
5. éliminer un à un les radicaux en multipliant $A\sqrt{X} + B$ par $A\sqrt{X} - B$.

On peut alors "résoudre" ces équations, c'est-à-dire qu'un bon logiciel de calcul formel calculera le polynôme minimal de r et qu'il saura l'utiliser pour nous donner une approximation de r à la précision voulue. Il faut aussi vérifier que chaque r est bien solution de l'équation avant l'élimination des radicaux, qui a pu ajouter des racines parasites⁶.

On trouve exactement une valeur de r dans $]0, 1[$ pour chacune des 10 équations. Chacune donne alors une borne sur la taille d'une grande couronne, qui sont donc en nombre fini : on peut les énumérer, calculer les équations associées et vérifier lesquelles sont satisfaites par la valeur de r considérée (il peut y en avoir plusieurs). La valeur donnée par la petite couronne 11111 s'avérant n'être compatible avec aucune grande couronne, elle est éliminée. Une valeur de r donnée par une petite couronne pourrait être compatible avec d'autres petites couronnes, mais ce n'est jamais le cas ici.

6. Ceci de façon *exacte*, par exemple en déterminant via la *méthode de Newton* un intervalle propre autour de chaque racine de l'équation, puis en vérifiant qu'une approximation suffisamment bonne de la valeur candidate est dans cet intervalle - c'est alors forcément la racine. Un bon logiciel de calcul formel sait le faire seul mais il peut avoir du mal...

1111r	111rr	11r1r	1111	11rrr	1r1rr	111r	111	11rr
63.76	54.52	53.33	41.42	38.61	34.92	28.08	15.47	10.10
91.07	91.12	91.42	92.02	92.01	92.46	93.19	95.03	96.24

TABLE 1 – Petite couronne et valeurs approchées (en %) du ratio et de la densité maximale des empilements rigides (ligne par ligne).

Enfin, une fois les petites et grandes couronnes déterminées, il faut encore vérifier qu’il existe bien un empilement rigide avec ces couronnes ! Dans chaque cas on trouve assez facilement un empilement rigide périodique. \square

Ces ratios sont donc tous algébriques. La table 1 donne les 9 couronnes et, pour chacune, la valeur approchée du ratio et la densité maximale atteinte par les empilement rigides (ce qui nécessite de tous les déterminer). Ils sont tous plus denses que l’empilement hexagonal avec un disque. La figure 9 représente, pour chaque ratio, un empilement rigide de densité maximal.

Le résultat suivant confirme l’intuition selon laquelle les empilements rigides sont particulièrement denses :

Théorème 6 (Heppes-Kennedy, 2000-2004) *Si un ratio permet un empilement rigide, alors la densité maximale est atteinte pour un tel empilement. De plus, c’est un maximum local de la densité en fonction du ratio.*

Heppes a d’abord montré le cas d’une petite couronne 1111 avec une méthode [4], puis ce cas et les 5 cas 1111r, 11r1r, 1111, 1r1rr, 111r, 111 avec une méthode amélioré [5]. Kennedy a classifié tous les cas [6] puis traité le cas 111rr [7]. Les cas 11rrr et 11rr n’ont en fait jamais été traités, bien que rien ne laisse *a priori* penser qu’ils ne marchent pas aussi...

4 Analyse comparée

On compare les approches pour prouver les densités maximales des empilements avec un disque (Th. 1), une sphère (Th. 2) ou deux disques (Th. 6).

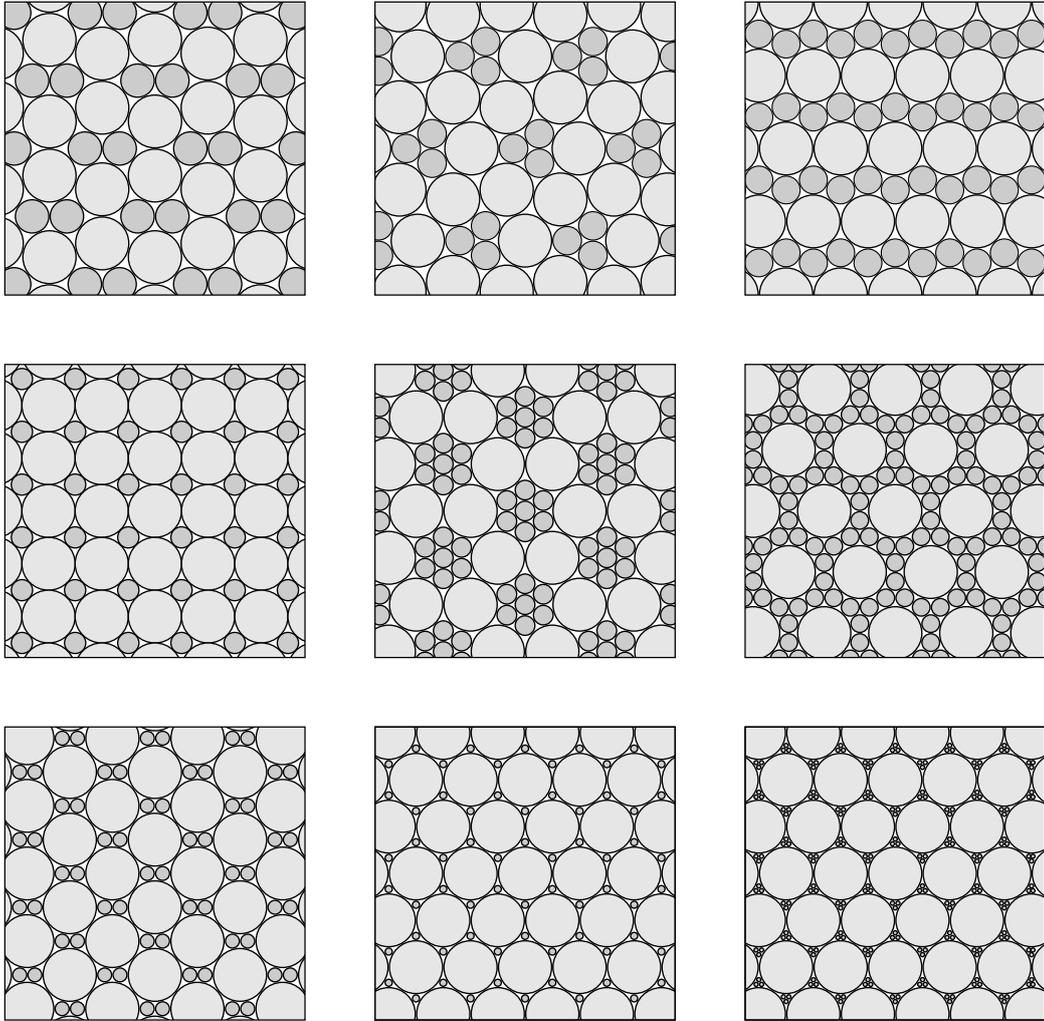


FIGURE 9 – Empilement rigide de densité maximale pour chacun des 9 ratios permettant un empilement rigide (dans le sens de la lecture).

4.1 Un disque

Le cas des empilements avec un disque a été prouvé en partie 1 grâce aux triangulations de Delaunay. La preuve originale reposait cependant sur les diagrammes de Voronoï. En effet, toute borne inférieure v sur l'aire d'une cellule de Voronoï donne la borne supérieure $\frac{4\pi}{3v}$ sur la densité maximale. La densité maximale $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ résulte donc du résultat suivant :

Théorème 7 (Tóth, 1943) *L'aire de la cellule de Voronoï d'un disque dans un empilement est minoré par $2\sqrt{3}$, avec égalité pour 6 voisins centrés sur les sommets d'un hexagone régulier.*

La preuve se ramène à un problème d'optimisation d'une fonction (l'aire de la cellule de Voronoï) sur une partie compacte d'un espace vectoriel de dimension finie. En effet :

Lemme 2 *Dans un empilement saturé, la cellule de Voronoï d'un disque ne dépend que des disques à distance (centre à centre) au plus 4.*

Preuve. Si la cellule d'un centre P dépend d'un centre Q tel que $\overline{PQ} \geq 4$, alors le diamètre des cercles circonscrits aux deux triangles de Delaunay qui contiennent l'arête PQ est plus grand que 4. Donc ces cercles ont un rayon supérieur à 2 : on peut loger un disque supplémentaire centré sur leurs centres, ce qui contredit la saturation de l'empilement. \square

Comme il y a au plus 25 disques (d'aire π) centrés dans le disque de rayon 5 (d'aire 25π), la cellule a au plus 24 faces⁷. Il faut donc optimiser sur les coordonnées dans $[-4, 4]$ des 12 points définissant les faces de la cellule. Évidemment en dimension 12 c'est un peu pénible et la preuve de Tóth ruse un peu pour être faisable à la main (exercice), mais ça reste une étude de fonction.

4.2 Une sphère

Pour les empilements de sphère, Tóth a conjecturé (toujours en 43) que les cellules de Voronoï étaient de volume au moins

$$v = 10\sqrt{130 - 58\sqrt{5}} \simeq 5.55,$$

7. On peut être un peu plus fin grâce au lemme 1, qui assure que les angles d'un triangle de Delaunay valent au moins $\pi/6$, donc qu'au plus 12 se rencontrent en un point, et donc qu'il y a au plus 12 faces. Le maximum semble en fait être 11 (exercice).

ce qui correspond à un dodécaèdre régulier, *i.e.*, dans l'empilement, à des sphères centrés sur les sommets d'un icosaèdre régulier. Comme en dimension 2, la cellule ne dépend que de ses voisins à distance au plus 4 qui sont en nombre fini : c'est encore un problème d'optimisation sur une partie compacte d'un espace vectoriel de dimension finie. Tóth a démontré sa conjecture sous l'hypothèse d'une cellule à 12 faces. Mais elle peut en fait en avoir 44 faces et peut-être même jusqu'à 49, ce qui fait un espace de dimension 3×49 . .

Il a fallu attendre des moyens informatiques conséquents pour que cette conjecture (dite du dodécaèdre) soit prouvée par Hales et le mathématicien américain Jack Mc Laughlin en 1998 :

Théorème 8 (Hales-Mc Laughlin, 1998) *Le volume de la cellule de Voronoï d'une sphère dans un empilement est minoré par $10\sqrt{130 - 58\sqrt{5}}$, avec égalité pour 12 voisines centrées sur les sommets d'un icosaèdre régulier.*

On déduit de cette borne inférieure v sur le volume d'une cellule de Voronoï la borne supérieure $\frac{4\pi}{3v}$ sur la densité maximale de l'empilement, mais on obtient 0.7547 ce qui ne suffit pas à prouver la conjecture de Kepler (mais donna néanmoins la meilleure borne à l'époque).

Ce n'est pas très étonnant : dans un empilement par couches compactes, les sphères tangente à une sphère donnée sont centrées sur un *cuboctaèdre* et le volume de la cellule de Voronoï associée est un dodécaèdre rhombique, de volume $4\sqrt{2} \simeq 5.66$. L'empilement globalement optimal n'est donc pas localement optimal : les physiciens parlent de *frustration*⁸.

4.3 Deux disques

Il y a aussi frustration dans le cas des empilements rigides à deux disques. En effet, la preuve de la borne de Florian (Th. 4) montre qu'un des 4 triangles possibles est plus dense que les autres. Un empilement global non frustré serait ainsi fait uniquement de tels triangles, ce qui n'est possible pour aucun des 9 ratios de disques.

8. L'exemple type est le modèle d'Ising antiferromagnétique sur une grille triangulaire.

Notons δ_r la densité maximale conjecturée des empilements rigides avec des disques de taille 1 et r . Considérons un tel empilement dans un carré de taille k . Fixons une triangulation de Delaunay \mathcal{T} des centres des disques. Notons $A(T)$ l'aire d'un triangle T et $D(T)$ l'aire qui en est couverte par les disques. La densité de l'empilement est donc (aux effets de bord près) :

$$\frac{\sum_{T \in \mathcal{T}} D(T)}{\sum_{T \in \mathcal{T}} A(T)}.$$

Majorer cette densité par δ_r revient à prouver l'inégalité *globale* :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \underbrace{\delta_r A(T) - D(T)}_{E(T)} \geq 0,$$

où $E(T)$ mesure l'écart entre l'aire de T qui serait couverte avec un densité δ_r et celle effectivement couverte.

On suit ici la preuve du cas [7] du théorème 6. Elle repose sur un *potentiel de localisation*, qui est une fonction F sur les triangles de \mathcal{T} vérifiant deux inégalités, une *globale* et une *locale* :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} F(T) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall T \in \mathcal{T}, \quad E(T) \geq F(T).$$

Le résultat voulu s'en déduit, puisqu'on a alors

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} E(T) \geq \sum_{T \in \mathcal{T}} (E(T) - F(T)) \geq 0.$$

Un tel potentiel ramène ainsi l'inégalité globale sur E à deux inégalités sur F , une globale et une locale. Tout l'art est de trouver une fonction F qui simplifie la preuve de l'inégalité globale et concentre la difficulté sur l'inégalité locale. Cette fonction F est définie la somme de potentiels définis sur chaque sommets et sur chaque arêtes du triangle considéré.

Le potentiel d'un sommet est défini de sorte à ce que la somme sur les trois sommets d'un triangle de l'empilement rigide cible (triangle "tight") soit égale à E , et de sorte à augmenter de façon proportionnelle à la variation des angles en chaque sommet quand le triangle est modifié. Le facteur m de proportionalité doit être assez grand pour que la somme des potentiels

sur une triangulation soit positive (inégalité globale pour la partie "sommet" du potentiel F). Le potentiel est de plus "plafonné" aussi bas que possible de sorte à toujours garantir l'inégalité globale tout en rendant *a priori* plus facile par la suite la satisfaction de l'inégalité locale.

Le potentiel d'une arête repose sur le fait que si un triangle de Delaunay est relativement plat, alors son voisin dans la triangulation doit en quelque sorte "compenser". On arrive ainsi à garantir que la somme de ces potentiels est positive sur toute triangulation (inégalité globale pour la partie "arête" du potentiel F).

Pour l'inégalité locale $E(T) \geq F(T)$:

- Pour T proche d'un triangle "tight" : le potentiel arête est nul et c'est le potentiel sommet qui joue. Le facteur m doit être assez petit que la variation de F dans un voisinage d'un triangle "tight" soit inférieure à la variation de E .
- Pour T loin d'être "tight" : l'excès peut devenir négatif pour un triangle trop plat, et c'est le potentiel arête qui va alors jouer. En gros, on le fait intervenir sur les arêtes dont l'angle opposé est obtus : le centre du cercle circonscrit au triangle est alors hors de ce triangle et permet d'avoir un potentiel négatif.

La preuve du premier point repose sur une analyse de fonction (inégalité des accroissements finis). La preuve du second point se fait par *arithmétique d'intervalle*. On montre qu'une arête d'un triangle d'une triangulation de Delaunay d'un empilement saturé de disques de rayon 1 et r est de longueur au plus $2r + 2$. On part alors du compact $[2r, 2r + 2]^3$, qui représente tous les triangles possibles, et on le subdivise (en 8) récursivement jusqu'à ne plus avoir que des produits d'intervalles tels que tout triangle T dont les longueurs d'arêtes sont dans ces intervalles

- soit vérifie $E(T) \geq F(T)$ par un calcul en arithmétique d'intervalle ;
- soit est suffisamment "tight" pour que le premier point s'applique.

Si jamais il existe a un triangle T qui ne vérifie pas $E(T) \geq F(T)$, ce processus ne s'arrêtera jamais (on raffinera indéfiniment un produit intervalles qui contient ce triangle). En tatonnant un peu (facteur m et plafonnement du potentiel sommet, potentiel arête qui pénalise assez les triangles plats) on trouve cependant un potentiel pour lequel le processus termine. Le résultat est alors prouvé.

Au final, la preuve de [7] est assez complexe, mais la partie “humaine” reste néanmoins raisonnable et la partie “machine” est cantonnée à une routine assez simple.

4.4 Une sphère encore

Le principe de la preuve par Hales du cas d’une sphère passe par une fonction “score” qui est l’équivalent du potentiel de localisation F de la preuve du cas avec deux disques : elle doit aussi satisfaire une contrainte globale et une locale. La preuve est cependant compliquée par la dimension supérieure, et surtout par le fait qu’il n’y a pas de candidats “naturels” comme les triangles T_i pour minimiser le potentiel F . Même si les T_i n’ont pas tous la même densité, chacun maximise localement la densité parmi les triangles avec les mêmes disques aux sommets. *A contrario*, une décomposition de Delaunay des centres des sphères d’un empilement par couches compactes donne des tétraèdres qui ne maximisent pas localement la densité. Ceci à cause du manque de *rigidité locale* : on peut bouger continûment les sphères voisines d’une sphère pour varier les volumes de ces tétraèdres (si on oublie le reste de l’empilement).

La fonction “score” définie par Hales & Ferguson est ainsi beaucoup plus compliquée. Elle fait intervenir des *classes* de tétraèdres (à comparer aux quatre T_i), par exemple, les *QR-tétraèdres* dont les arêtes sont plus courtes que $\frac{251}{100}$, ou bien les *QL-tétraèdres* qui ont cinq arêtes comme ça et la dernière qui peut aller jusqu’à $2\sqrt{2}$ (sans compter que des portions “tips” de ces tétraèdres peuvent être réattribuées à des voisins). Le score d’un tétraèdre ne dépend pas non plus simplement de sa forme (c’est le cas pour le potentiel de localisation F sur les triangles dans le cas de deux disques, même si on ne l’a pas mentionné) mais aussi de la combinatoire des tétraèdres voisins (introduction de “cartes combinatoires”). Bref, la preuve n’est pas simple !

Terminons par une propriété amusante illustrant le manque de rigidité locale, une sorte de Rubik’s cube sphérique :

Proposition 7 *Toute permutation de 12 sphères touchant une même sphère peut être achevée par un mouvement continu qui ne rompt jamais le contact.*

Preuve. Prenons une sphère (le “soleil”) et ses 12 voisines (les “planètes”) dans l’empilement FCC. Les centres des planètes forment un cuboctaèdre

dont les arêtes, de longueur 2, relient les centres des planètes en contact (Fig. 10, gauche). Une rotation autour d'une face carrée le laisse invariant. Par exemple, la rotation autour de la face (1, 2, 3, 4) réalise la permutation

$$r := (1, 2, 3, 4)(5, 6, 8, 9)(7, 12, 10, 11).$$

On peut diviser chacune des 6 faces carrées de sorte à ce que les sommets deviennent tous de degré 5 : on a obtenu un icosaèdre irrégulier (Fig. 10, centre).

On le régularise en diminuant continûment la longueur a des nouvelles arêtes tout en gardant les planètes au contact du soleil. On vérifie (à coups de Pythagore) que cela contraint la longueur b des anciennes arêtes à valoir

$$b = \sqrt{8 - a\sqrt{4 - \frac{a^2}{4}}}.$$

L'icosaèdre est régulier quand $a = b$ (Fig. 10, droite). On calcule alors $a = \sqrt{8 - \frac{8}{\sqrt{5}}} \simeq 2,102$. Comme b croît quand a décroît, a et b restent plus grands que 2 pendant toute la transformation : les planètes ne s'interpénètrent jamais (elles ne se touchent même pas, à part au début).

Choisissons maintenant une planète (le "pôle nord") et ramenons vers elle, jusqu'au contact, les 5 planètes qui lui sont voisines dans l'icosaèdre. C'est possible car l'angle dièdre d'un tétraèdre régulier vaut $\arccos \frac{1}{3} \leq \frac{2\pi}{5}$ (comme l'inégalité est en fait stricte, il y a des interstices entre les 5 planètes). Faisons de même autour du pôle sud. Alors le plan équatorial sépare les 5 voisines du pôle nord des 5 voisines du pôle sud, de sorte qu'on peut tourner indépendamment les deux hémisphères autour de l'axe des pôles. Par exemple, prendre la planète 2 comme pôle et tourner de $\frac{2\pi}{5}$ ses 5 voisines autour de l'axe qui relie les planètes 2 à 10 réalise la permutation

$$p := (1, 3, 8, 7, 6).$$

Or on a (relation trouvée par une rapide recherche sous SageMath) :

$$(r \cdot p)^5 = (3, 4).$$

On peut donc ainsi permuter les planètes 3 et 4, voisines dans l'icosaèdre. Étant données les symétries du problème, on peut similairement permuter

toute paire de planètes voisines dans l'icosaèdre. On peut ensuite permuer toute paire de planètes en procédant de proche en proche sur un chemin les reliant. Comme les transpositions engendrent les permutations, on peut donc bien achever toute permutation des planètes. \square

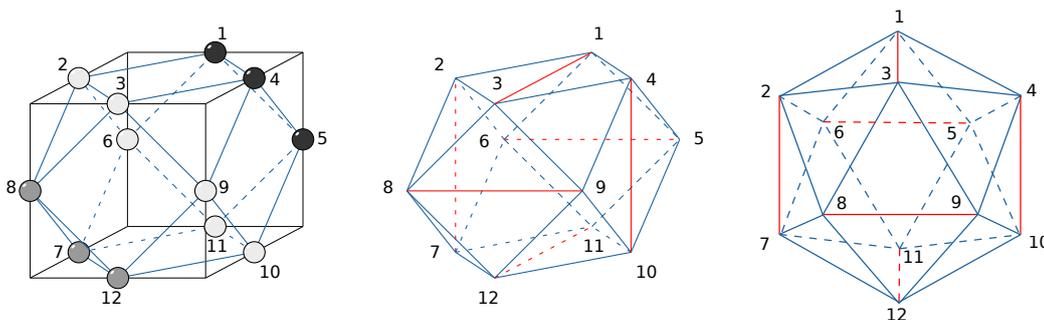


FIGURE 10 – Un Rubik's cube à 12 sphères.

Il y a donc, même dans les empilements les plus denses, beaucoup d'espace libre entre les voisines d'une sphère! À tel point qu'on peut se demander si on ne pourrait pas caser une 13^{ème} sphère, ce que soutenait le mathématicien écossais David Gregory (1661–1708) contre le scientifique anglais Isaac Newton (1642–1726) en 1694. L'Histoire donna finalement raison au second, dans une preuve non triviale qui allie optimisation (minimisation de surfaces de polygones sur la sphère) et combinatoire (carte planaire sur la sphère et caractéristique d'Euler) :

Théorème 9 (Schütte-van der Waerden, 1953) *Le nombre maximal de sphères qui peuvent simultanément toucher une même sphère est 12.*

5 Pour aller plus loin

5.1 Plus de rayons

Que se passe-t-il si on considère trois disques au lieu de deux? Quelle est la densité maximale à rayons fixés? Quelles rayons permettent des empilements particulièrement denses (maxima locaux de la densité)? Ces questions sont notamment motivés par la réalisation expérimentale d'empilements monocouche de sphères de deux ou trois rayons différents (à la précision

expérimentales près). Les sphères sont des cristaux nanométriques dont on contrôle assez bien la dispersion, et ces structures sont appelés *supercristaux* (Fig. 11). Les applications incluent, par exemple, des filtres pour laisser passer le visible mais bloquer l'infrarouge, ce qui permettrait de stocker l'énergie solaire dans une boîte !

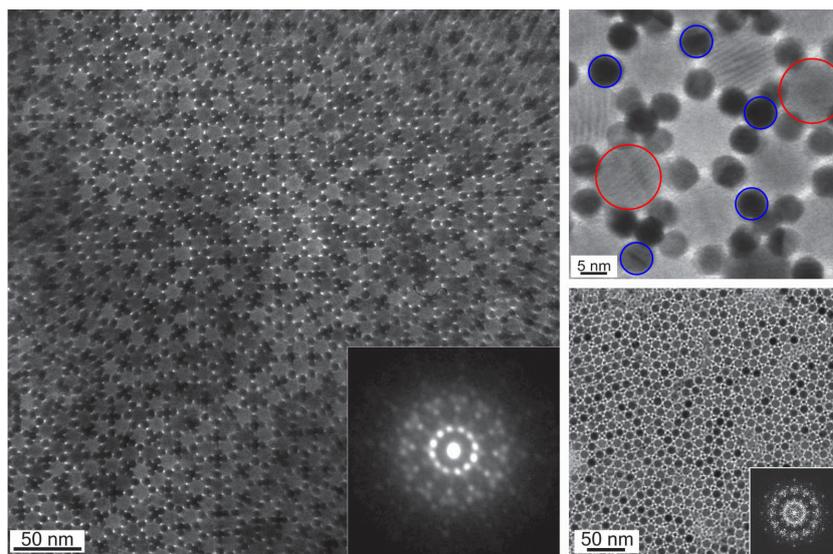


FIGURE 11 – Un empilement réel de deux disques.

La notion d'empilement rigide s'étend naturellement. On montre

Théorème 10 ([3]) *Il y a 164 couples (r, s) tels que les disques de rayon $1 > r > s$ admettent un empilement rigide.*

Preuve. (sketch) Considérons un tel empilement qui, par hypothèse, contient des disques de toutes les tailles. Il contient donc une petite couronne codée par séquence différente de ssssss. Remplaçons tous les 1 par des r (sans changer les autres lettres) dans cette séquence. On vérifie alors (à partir de la liste des petites couronnes) que cette nouvelle séquence code encore une petite couronne. Dans cette nouvelle petite couronne, le ratio s/r est plus petit que dans la couronne originale. En effet, les gros disques ayant été “dégonflés” en moyens, le périmètre de la couronne a diminué, donc la taille du disque qu'elle entoure aussi. Or il y a un nombre fini de ratios s/r possibles pour une

couronne de disques de tailles $r > s$ autour d'un disque de taille s : ce sont ceux du théorème 5. Le ratio s/r est donc minoré (par $5 - 2\sqrt{6}$). La taille d'une moyenne couronne est donc bornée (il y a au plus 35 petits disques). On a donc un nombre fini de couronnes petites et moyennes. Les équations associées (comme dans le cas de deux disques) caractérisent donc un nombre fini de couples (r, s) . En théorie il suffit de tout résoudre puis de vérifier qu'il existe bien un empilement... en pratique c'est difficile (limitations de la puissance de calcul), il faut ruser. \square

Ces valeurs maximisent-elles localement la densité comme dans le cas de deux disques ? Et s'il y a plus de trois disques ?

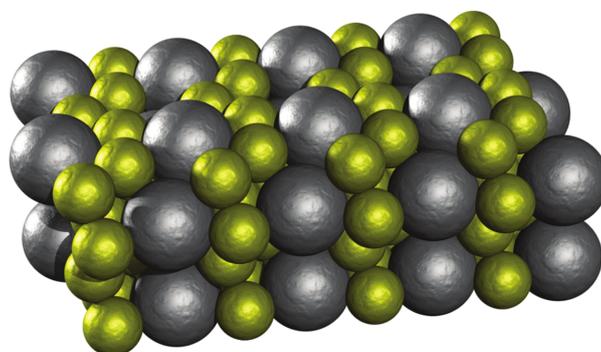


FIGURE 12 – Un empilement avec deux sphères plus dense qu'avec une seule.

Les mêmes questions se posent avec deux sphères ou plus, les applications incluant la réalisation de matériaux particulièrement denses (Fig. 12). La notion d'empilement rigide s'étend aussi naturellement dans ce cadre : le graphe de contact des sphères doit être simplicial. Si pour trouver un empilement rigide avec deux disques on pouvait ajouter des disques dans les trous de l'empilement hexagonal (tous ne peuvent cependant pas s'obtenir ainsi), ce n'est plus aussi simple avec des sphères. Peut-on trouver ne serait-ce qu'un exemple ? Existe-t-il un nombre fini de ratio ? Maximisent-ils localement la densité ?

Une autre question ouverte est de savoir s'il existe des disques ou des sphères tels que la densité soit maximisée pour des empilements tous *apériodique*. Un tel exemple permettrait de "démystifier" la formation des *quasicristaux*

en montrant que des règles on ne peut plus simples (atomes de rayons adaptés et densité maximale) permettent de forcer une structure apériodique. . .

L'exemple des pavages de Beenker montre que ça n'est pas si improbable : un carré et un losange avec des règles locales très simples et une règle de densité maximale des losanges forcent une structure apériodique (pavages d'Ammann-Beenker).

5.2 Plus de dimension

Motivation. Empiler des sphères dans \mathbb{R}^n peut sembler une idée étrange, mais elle a pourtant une application importante : les *codes correcteurs*. Dans ce cadre, les centres des sphères codent l'information, qui est transmise avec un certain bruitage. Si le bruitage ne fait pas sortir des sphères, de l'empilement, on sait quel centre code l'information.

Une borne inférieure.

Proposition 8 *La densité d'un empilement saturé de \mathbb{R}^n est au moins $\frac{1}{2^n}$.*

Preuve. Considérons un empilement saturé par des sphères de rayon r . Aucun point de l'espace n'est à distance plus que $2r$ d'un centre de sphère. Doubler le rayons des sphères couvre donc tous l'espace. Or doubler le rayon d'une sphère de \mathbb{R}^n multiplie son volume par 2^n . Donc si V désigne le volume occupé par les sphères dans une certaine région, alors $2^n V$ majore le volume de cette région, et donc $\frac{1}{2^n}$ minore la densité de l'empilement dans cette région. \square

Même si cette borne semble très mauvaise, on ne sait pas *explicitement* (pour tout n) d'empilement faisant mieux ! Par exemple, l'empilement régulier formé des sphères unités centrées sur $(2\mathbb{Z})^n$ a la densité bien plus faible :

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)! 2^n}.$$

En effet, le volume du cube n -dim. de côté 2 est 2^n et il contient une sphère, mais le volume V_n d'une sphère n -dim. décroît rapidement avec la dimension :

$$V_1 = 2, \quad V_2 = \pi, \quad V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}.$$

Peut-on faire mieux ? On cherche généralement des empilements réguliers (plus simple à décrire), bien qu'en certaines dimensions (10, 11 et 13, par exemple) les meilleurs connus soient apériodiques. Le livre de référence pour ces questions est [2].

Échiquiers. Une famille de réseaux intéressants sont les *échiquiers* :

$$D_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 + \dots + x_n \text{ pair}\}.$$

La distance minimale entre deux points est $\sqrt{2}$, dont le rayon des sphères de l'empilement est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

- D_2 est le réseau carré (tourné de 45°), de densité $\frac{\pi}{4} \simeq 78\%$ inférieure à la densité $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \simeq 90\%$ du réseau hexagonal ;
- D_3 correspond exactement à l'empilement par couches carrées, de densité $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%$ supérieure à la densité $\frac{\pi}{6} \simeq 52\%$ de \mathbb{Z}^3 ;
- D_4 et D_5 maximisent la densité des empilements réguliers (Korkine-Zolotareff, 1872 & 1877) et sans doute de tous les empilements.

Trous et E_8 . Un *trou* d'un réseau est un point de l'espace qui maximise localement la distance au réseau. Par exemple, le point $T := (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ est un trou de D_n . Il est à distance $\sqrt{\frac{n}{4}}$ de D_n : il grandit avec la dimension ! En particulier, il est à distance $\sqrt{2}$ de D_8 : il y a pile la place pour insérer une autre sphère dans chaque trou, ce qui donne un nouvel empilement sur

$$E_8 := D_8 \cup (D_8 + T).$$

C'est un réseau (exercice) qu'on retrouve dans beaucoup de domaines des mathématiques. Il maximise la densité parmi les réseaux (Blichfeldt, 1935). Il a récemment été montré optimal parmi tous les empilements par l'ukrainienne Maryna Viazovska :

Théorème 11 (Viazovska, 2016) *L'empilement sur E_8 maximise la densité des empilements dans \mathbb{R}^8 .*

La preuve n'est pas facile mais bien plus raisonnable que dans \mathbb{R}^3 (22 pages contre plus de 300). Elle utilise aussi l'ordinateur, mais dans une bien moindre mesure. Le fait que l'empilement sur E_8 est rigide (comme en dimension 2) n'y est peut-être pas pour rien. En effet, chaque sphère a exactement

240 voisines, et il y a dans \mathbb{R}^8 une unique façon de placer 240 sphères tangentes à une même autre.

Pour information, les meilleurs empilements réguliers en dimension 6 et 7 sont sur des coupes de E_8 :

$$\begin{aligned} E_7 &:= \{(x_1, \dots, x_8) \in E_8 \mid x_7 = x_8\}, \\ E_6 &:= \{(x_1, \dots, x_8) \in E_8 \mid x_6 = x_7 = x_8\}. \end{aligned}$$

Réseaux laminés. Une autre famille intéressante sont les *réseaux laminés*. Ils sont définis inductivement à partir de $\Lambda_0 = \{0\}$ comme suit : Λ_n est, parmi les réseaux admettant un sous-réseau Λ_{n-1} et correspondent à un empilement de sphères unités (points à distance au moins 2), celui qui maximise la densité de l'empilement.

- $\Lambda_1 \simeq \mathbb{Z} \simeq D_1$;
- Λ_2 est la grille triangulaire ;
- $\Lambda_3 \simeq D_3$ (empilement par couches carrées) ;
- On montre $\Lambda_4 \simeq D_4$, $\Lambda_5 \simeq D_5$, $\Lambda_6 \simeq E_6$, $\Lambda_7 \simeq E_7$ et $\Lambda_8 \simeq E_8$.

Il n'y a *a priori* pas unicité à n donné. On montre que c'est néanmoins le cas jusqu'à $n = 24$, sauf pour $n = 11$ (2 réseaux), $n = 12$ (3) et $n = 13$ (3). Il y a par contre 23 réseaux laminés pour $n = 25$, encore plus pour $n = 26$ et on ne les connaît pas tous ensuite (on en connaît au moins un jusqu'à $n = 48$).

Le réseau Λ_{24} , unique réseau laminé de \mathbb{R}^4 , est appelé *réseau de Leech*, découvert en 1967 par l'Anglais John Leech. Il peut être défini de nombreuses autres façons (voir, *e.g.*, [2], où on en trouve entre autres une base explicite). Surtout, il a récemment été prouvé maximiser la densité de tous les empilements en dimension 24 :

Théorème 12 (Vyazovska & al., 2016) *L'empilement sur Λ_{24} maximise la densité des empilements dans \mathbb{R}^{24} .*

La preuve reprend les techniques utilisées pour E_8 (le résultat a été obtenu dans la foulée). Et comme pour E_8 , c'est un empilement rigide : chaque sphère a exactement 196560 voisines, et il y a dans \mathbb{R}^{24} une unique façon de placer 196560 sphères tangentes à une même autre.

5.3 Problèmes proches

Les problèmes d'empilement et ceux ci-dessous relèvent de la “discrete, combinatorial and computational geometry”. Quelques livres de référence : [9, 10, 11].

Autres empilements. La question des empilements de densité maximale peut se poser pour n'importe quelle figure. Par exemple des pentagones réguliers dans le plan, ou bien des tétraèdres réguliers dans l'espace.

Couverture. Une *couverture* est un ensemble de disques ou sphères qui couvrent totalement le plan ou l'espace. Le but est de minimiser la densité de *recouvrement* (régions couvertes par au moins 2 disques ou sphères). Exemple d'application : couverture par un réseau téléphonique.

Pavage. Entre les empilements et les couvertures : les objets (usuellement en nombre fini à isométrie près) doivent recouvrir le plan ou l'espace sans jamais se superposer. C'est évidemment impossible avec des disques ou des sphères... On en a cependant déjà vus : les empilements rigides avec deux disques peuvent être vus comme des pavages par quatre triangles !

Problème de Tammes. Introduit en 1930 par le botaniste Tammes qui étudiait la distribution des pores sur les grains de pollen. Comment disposer N points sur une sphère de sorte à maximiser la distance minimale entre deux points ? Résolu jusqu'à 14 points (dernier cas en 2014 grâce à l'ordinateur) et aussi 24 points. Exemple d'application : cavités à la surface d'une balle de golf pour en réduire la traînée.

Problème de Thomson. Introduit en 1904 par le physicien Joseph John Thomson. Comment disposer N électrons sur une sphère de sorte à minimiser leur potentiel d'interaction (force de Coulomb, répulsive inversement proportionnellement au carré de la distance) ?

Conjecture du nid d'abeille. Comment partitioner le plan en régions d'aire identiques en minimisant la longueur des séparations ?

Théorème 13 (Hales, 1999) *Si C est une partition du plan en régions toutes d'aire unité (mais possiblement différentes), alors*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{périmètre}(C \cap B(0, r))}{\text{aire}(C \cap B(0, r))} \geq \sqrt[4]{12},$$

avec égalité pour la partition en hexagones réguliers.

L'analogie dans l'espace (régions de volumes égaux), connu sous le nom de *conjecture de Kelvin*, est toujours ouverte (la conjecture de Kelvin proposait des octaèdres tronqués légèrement bombés, mais des contre-exemples ont récemment été trouvés par recherche sur ordinateur, sans qu'une forme optimale alternative ne semble émerger).

Références

- [1] H.-Ch. Chang et L.-Ch. Wang, *A Simple proof of Thue's theorem on circle packing*, arXiv :1009.4322 (2010).
- [2] J. H. Conway et N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Springer, 1988.
- [3] Th. Fernique, A. Hashemi, O. Sizova, *Compact packings of the plane with three sizes of discs*, preprint, 2018
- [4] A. Heppes, *On the Densest packing of discs of radius 1 and $\sqrt{2} - 1$* , *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **36** (2000), pp. 433–454.
- [5] A. Heppes, *Some densest two-size disc packings in the plane*, *Discrete & Computational Geometry* **30** (2003), pp. 241–262.
- [6] T. Kennedy, *Compact packings of the plane with two sizes of discs*, *Discrete & Computational Geometry* **35** (2006), pp. 255–267.
- [7] T. Kennedy, *A Densest compact planar packing with two sizes of discs*, preprint arxiv :0412418v1 (2004).
- [8] Joseph Oesterlé, *Densité maximale des empilements de sphères en dimension 3*, *Séminaire Bourbaki* **863** (1999).
- [9] P. Brass, W. O. J. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, 2005.

- [10] J. Pach, P. K. Agarwal, *Combinatorial geometry*, Wiley-Intersciences, 1995.
- [11] J. E. Goodman, J. Pach, E. Welzl, *Combinatorial and Computational Geometry*, Cambridge University Press, 2005.