Апериодические Замощения

Thomas Fernique
CNRS & Univ. Paris 13

Москва, 19/26 Апрель 2012

Символическая динамика

Определения:

- полный сдвиг $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^n}$: n-мерные слова на алфавите $\mathcal{A}$;
- расстояние: $d(x, y) = \inf\{1/2^d \mid \forall \vec{u} \in [-d, d]^n,\ x_{\vec{u}} = y_{\vec{u}}\}$;
- сдвиг: замкнутое $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^n}$ инвариант под действием $\mathbb{Z}^n$;
- запрещённые фрагменты диаметра r: $F \subset \mathcal{A}^{[-r,r]^n}$;
- сдвиг конечного типа (СКТ): сдвиг X_F без фрагмента в F;
- образ СКТ при локальном перекодировании: софический.

Примеры:

- тип сдвига $X \subset \{a, b\}^{\mathbb{Z}}$ – буквы a и b альтернируют?
- тип сдвига $X \subset \{a, b\}^{\mathbb{Z}}$ – один связный фрагмент букв a?
- тип сдвига $X \subset \{a, b\}^{\mathbb{Z}^2}$ – шахматные доски?

(А)периодичность и (не)разрешимость

Все не пустые одномерные СКТ содержат периодические слова. Существует алгоритм, разрешающий пустоту одномерного СКТ.

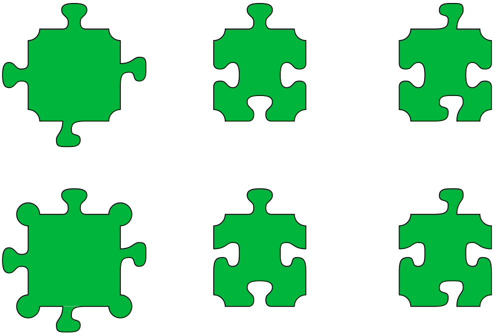
Теорема (Berger, 1964)

Нет алгоритма, разрешающего пустоту двухмерного СКТ.

Доказательство держится на *апериодических* СКТ, т.е. не пустые СКТ, содержащие только непериодические слова.

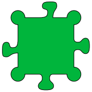
Не пустые СКТ, однако, содержат квазипериодические слова.

Замощения Робинсона (1967–1971)



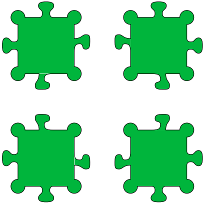
Замостят всю плоскость, но только непериодическим способом.

Замощения Робинсона (1967–1971)



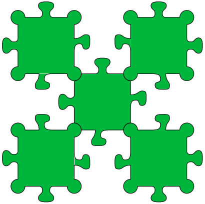
Замостят всю плоскость, но только непериодическим способом.

Замощения Робинсона (1967–1971)



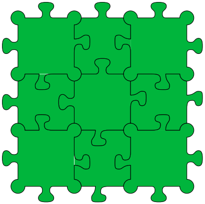
Замостят всю плоскость, но только непериодическим способом.

Замощения Робинсона (1967–1971)



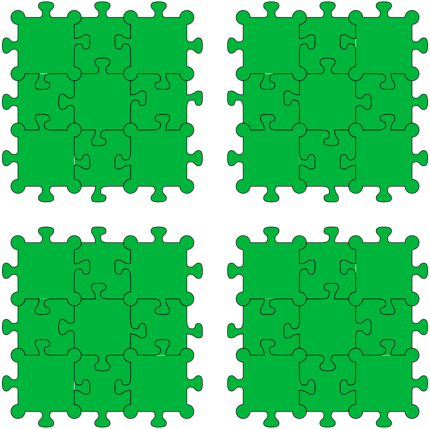
Замостят всю плоскость, но только непериодическим способом.

Замощения Робинсона (1967–1971)



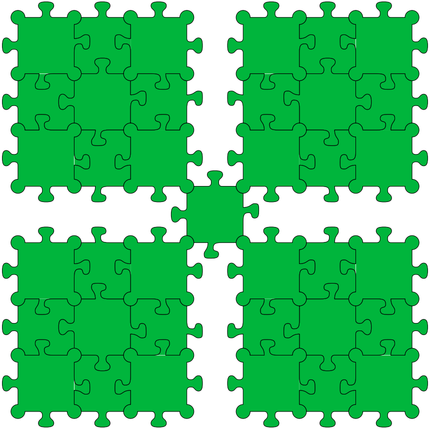
Замостят всю плоскость, но только непериодическим способом.

Замощения Робинсона (1967–1971)



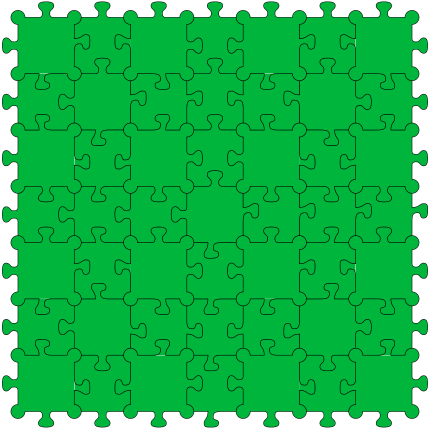
Замостят всю плоскость, но только непериодическим способом.

Замощения Робинсона (1967–1971)



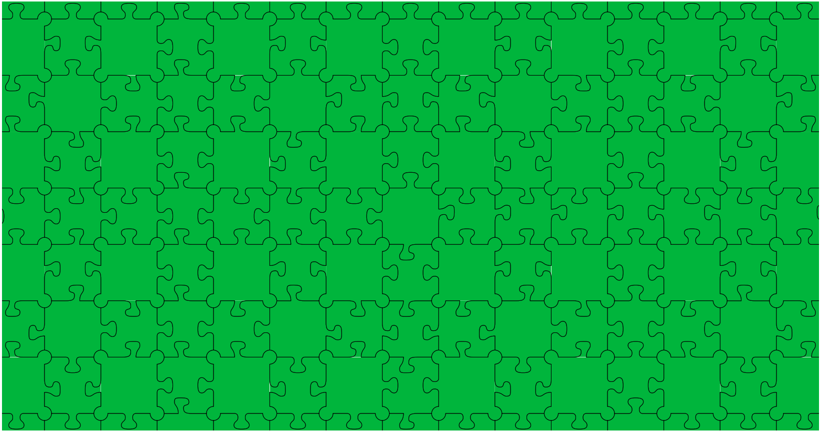
Замостят всю плоскость, но только непериодическим способом.

Замощения Робинсона (1967–1971)



Замостят всю плоскость, но только непериодическим способом.

Замощения Робинсона (1967–1971)

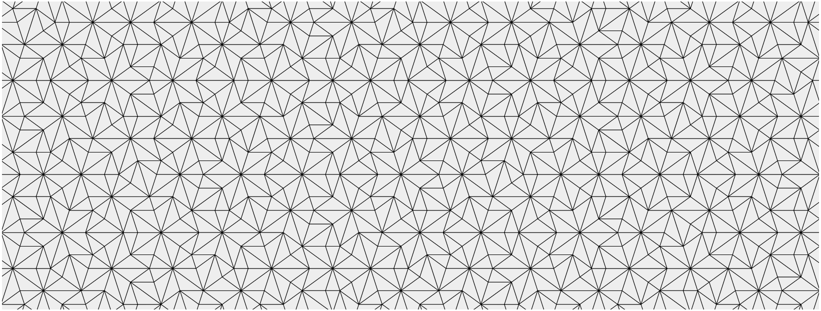


Замостят всю плоскость, но только непериодическим способом.

Самоподобные замошения

Определение

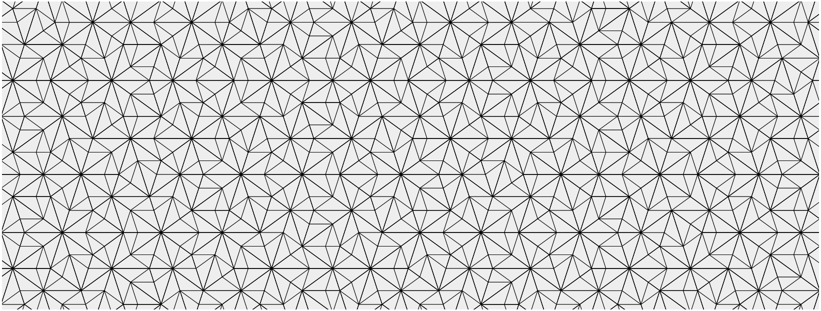
Замощение *самоподобным коэф.-ом* φ – плитки рекурсивно группирующиеся в гомотетичные коэф.-ом φ плитки.



Самоподобные замощения

Определение

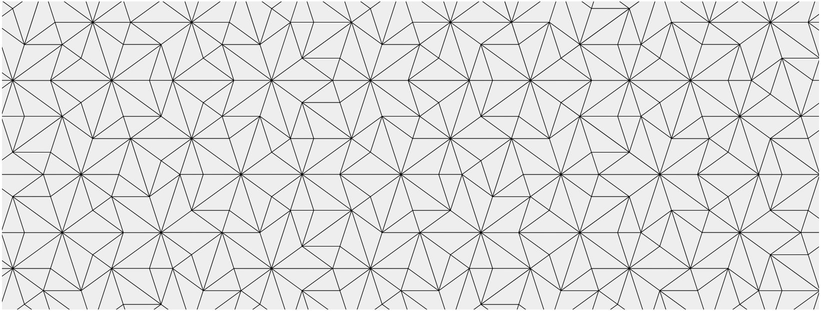
Замощение *самоподобным коэф.-ом* φ – плитки рекурсивно группирующиеся в гомотетичные коэф.-ом φ плитки.



Самоподобные замошения

Определение

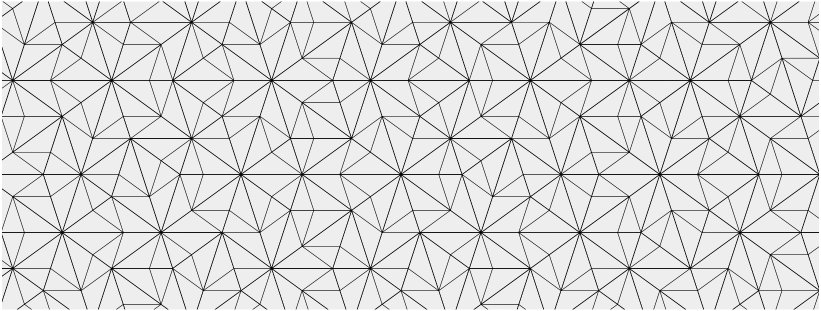
Замощение *самоподобным коэф.-ом* φ – плитки рекурсивно группирующиеся в гомотетичные коэф.-ом φ плитки.



Самоподобные замошения

Определение

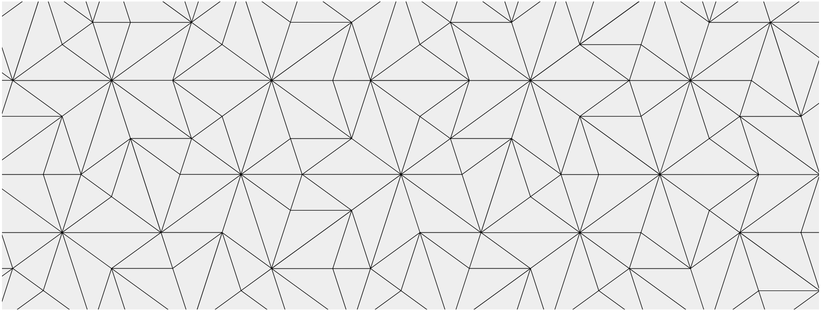
Замощение *самоподобным коэф.-ом* φ – плитки рекурсивно группирующиеся в гомотетичные коэф.-ом φ плитки.



Самоподобные замощения

Определение

Замощение *самоподобным коэф.-ом* φ – плитки рекурсивно группирующиеся в гомотетичные коэф.-ом φ плитки.



Самоподобные плитки

Определение

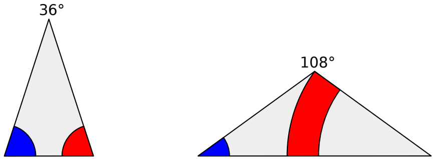
Самоподобные плитки: замостят только самоподобным способом, с точностью до локального перекодирования.

Локальное перекодирование: декорация, пазы, выпуклости...

Теорема (Mozes 1990, Goodmann-Strauss 1995, F.-Ollinger 2010)

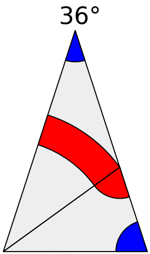
Самоподобные замощения – замощения самопод-ми плитками.

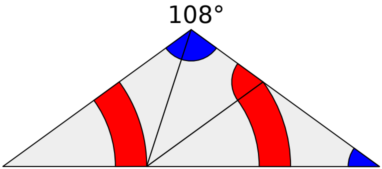
Замощения Пенроуза (1974–1978)



Плитки: два украшенных равнобедренныых треугольника.
Краски должны соответствовать на пересекающихся рёбрах.

Замощения Пенроуза (1974–1978)

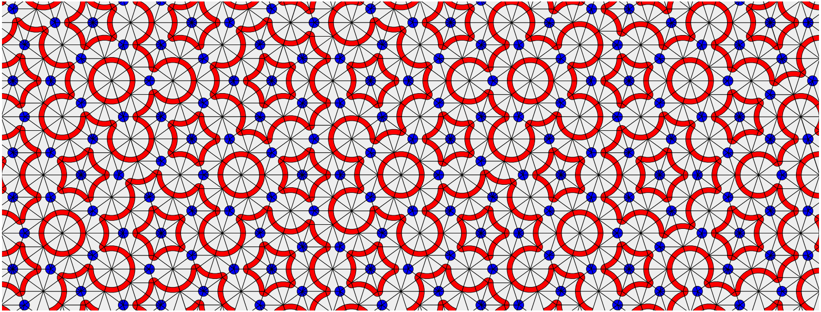




Лемма

Плитки замощения группируются единственным способом в гомотетичные плитки, которые имеют то же свойство.

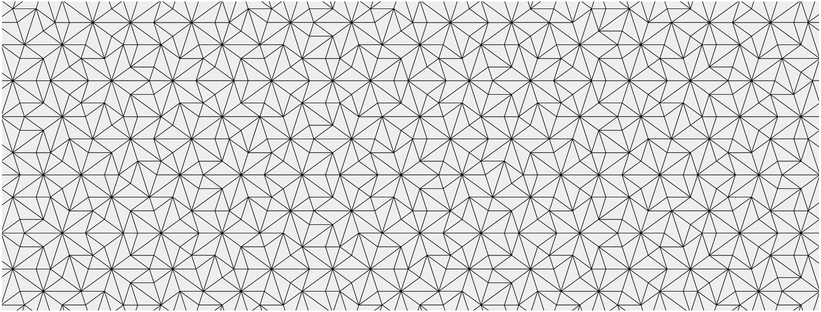
Замощения Пенроуза (1974–1978)



Теорема

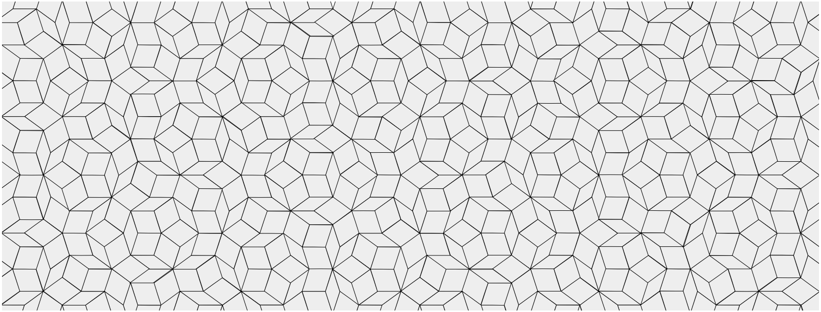
Плитки замостят самоподобным и непериодическим способом.

Замощения Пенроуза (1974–1978)



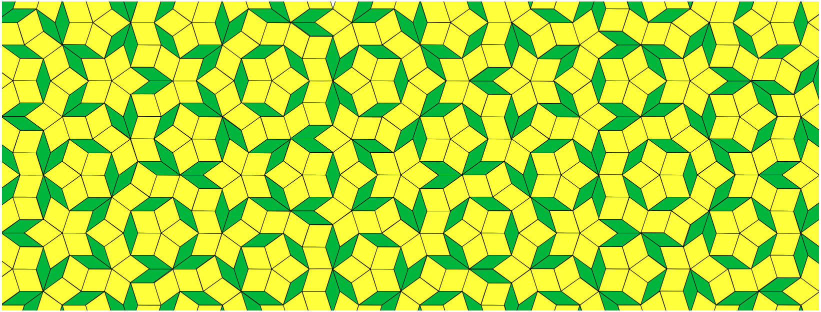
Разные виды с точностью до локального перекодирования.

Замощения Пенроуза (1974–1978)



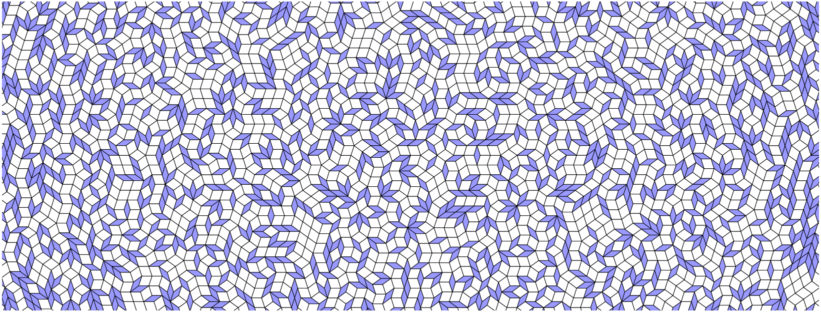
Разные виды с точностью до локального перекодирования.

Замощения Пенроуза (1974–1978)



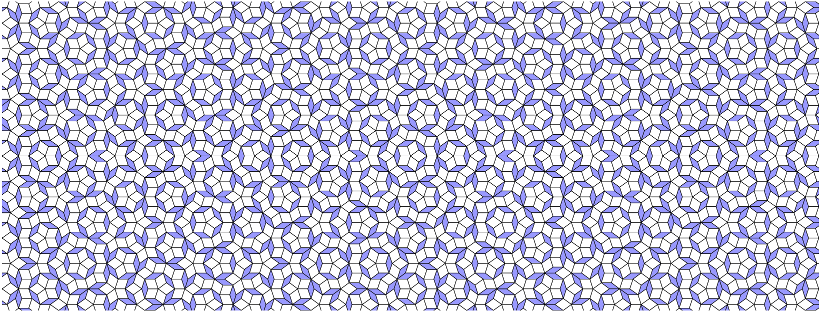
Разные виды с точностью до локального перекодирования.

Замощения ромбами



Неколлинеарные векторы плоскости $\rightsquigarrow$ ромбы $\rightsquigarrow$ замощение.
Видя векторы в качестве базиса пространства $\rightsquigarrow$ поверхность.

Замощения ромбами



Замощение наклоном E и толщиной w: влезает в $E + [0, w]^n$.
Пропорции плиток: координаты Плюккера $(G_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ наклона.

Периодические тени

ijk-тень: проекция на пространство $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle$.

ijk-подпериод: целый период ijk-тени (если есть).

Лемма

Если (p, q, r) – ijk-подпериод плоскости, то $pG_{jk} + rG_{ij} = qG_{ik}$.

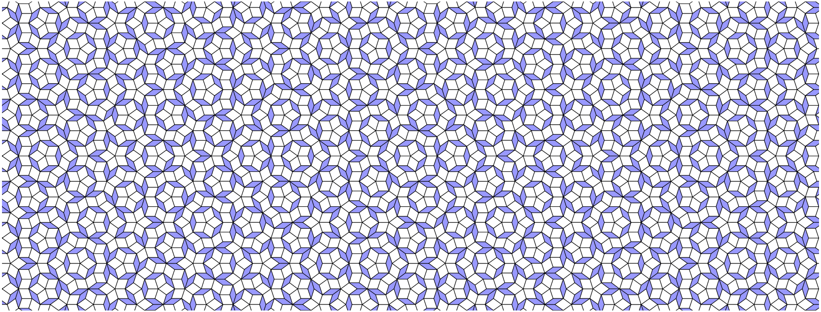
Лемма

Подпериод замощения, вынужденный запрещ-ми фрагментами.

Теорема (Левитов 1988, Bédaride-F. 2013)

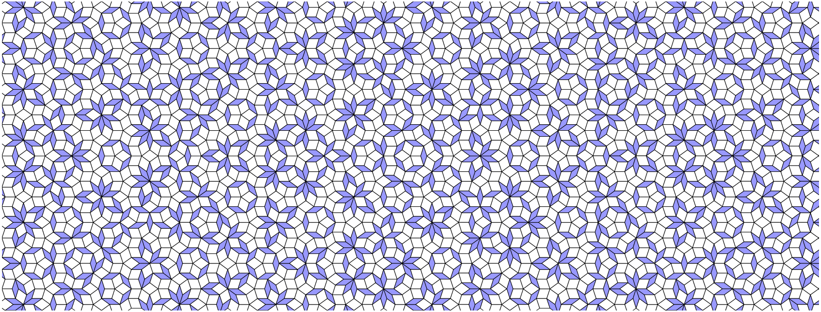
Если наклон характеризуется подпериодами, то существует СКТ содержавший только плоские замощения этим наклоном.

Общие замощения Пенроуза (1981–1987)



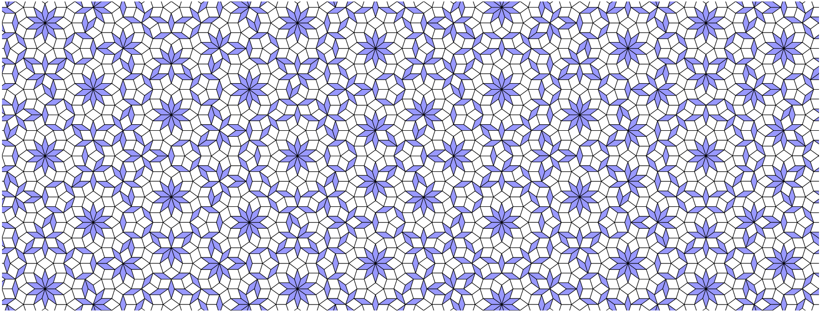
Замощения наклоном $(\varphi, 1, -1, -\varphi, \varphi, 1, -1, \varphi, 1, \varphi)$ толщиной 1.

Общие замощения Пенроуза (1981–1987)



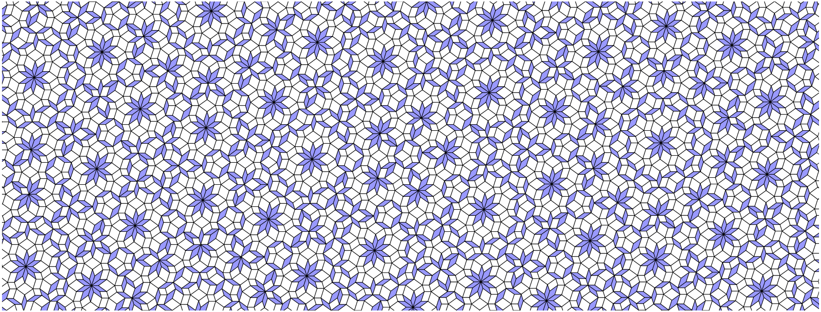
Замощения наклоном $(\varphi, 1, -1, -\varphi, \varphi, 1, -1, \varphi, 1, \varphi)$ толщиной 1.

Общие замощения Пенроуза (1981–1987)

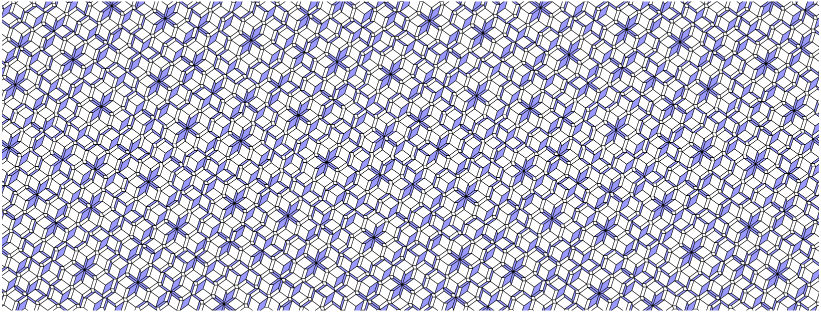


Замощения наклоном $(\varphi, 1, -1, -\varphi, \varphi, 1, -1, \varphi, 1, \varphi)$ толщиной 1.

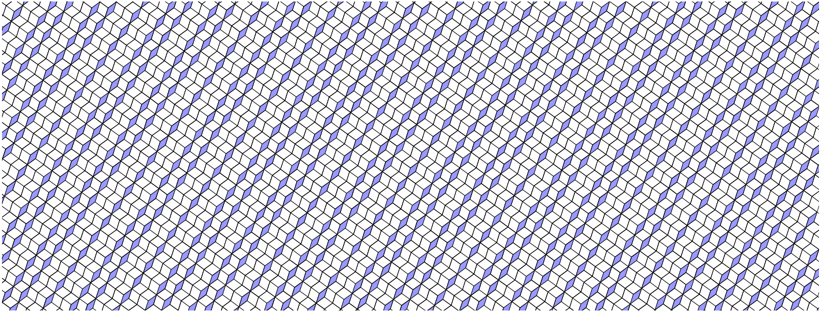
Общие замощения Пенроуза (1981–1987)



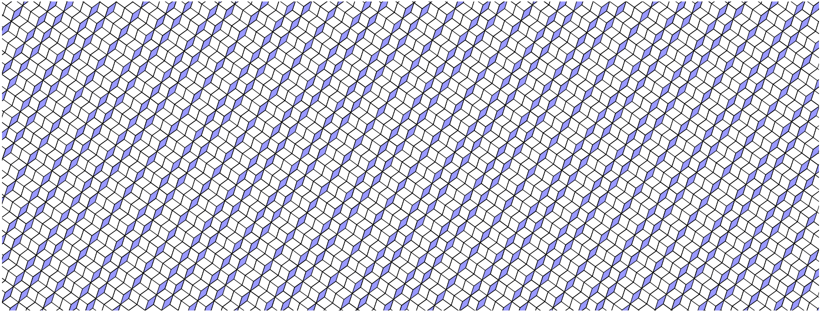
Общие замощения Пенроуза (1981–1987)



Общие замощения Пенроуза (1981–1987)

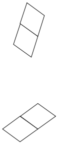


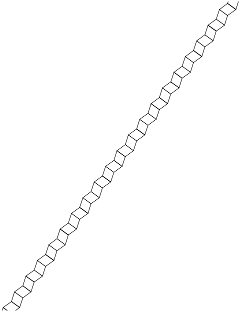
Общие замощения Пенроуза (1981–1987)



Все тени периодические. Периоды тени дают, $\forall i, j,\ G_{i,j} = G_{2i-j,i}$. Вместе с соотношениями Плюккера, это характеризует наклон.

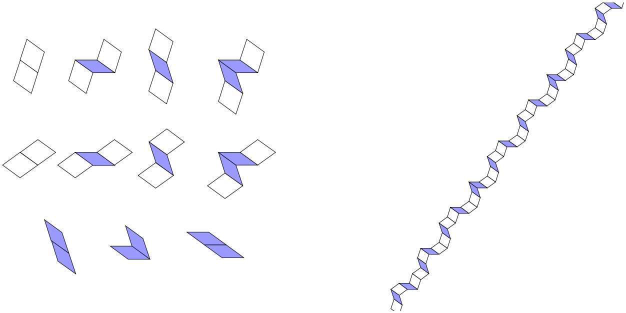
Общие замощения Пенроуза (1981–1987)





Периоды теней, вынужденные запрещёнными фрагментами...

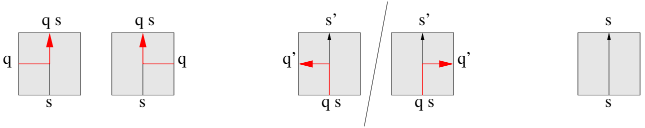
Общие замощения Пенроуза (1981–1987)



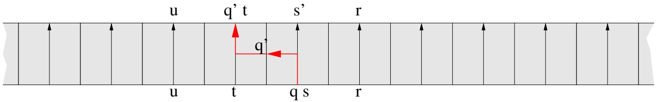
как подпериоды замощения за счёт *ограниченного возврата*.

Плитки Тюринга (и теорема Бергера)

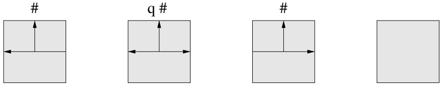
Три плитки для правила $(q, s, s', \leftrightharpoons, q')$, одна для буквы s:



Строки замощении симулируют динамику ленты машины:



Плитки инициализации (апериодичность здесь коренная!):



Вычисляемые наклоны

Вычисляемый сдвиг: перечисляемые конечные фрагменты.

Теорема (Aubrun-Sablik 2011)

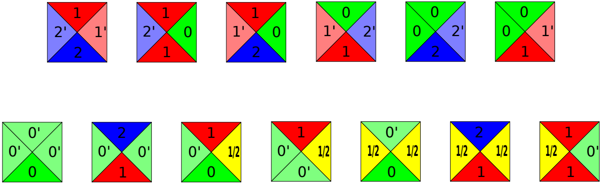
$X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ вычисляемый $\Rightarrow \{y \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2},\ \forall j,\ y_j = y_0 \in X\}$ софический.

Вычисляемый наклон: вычисляемые координаты Плюккера.

Теорема (F.-Sablik 2012)

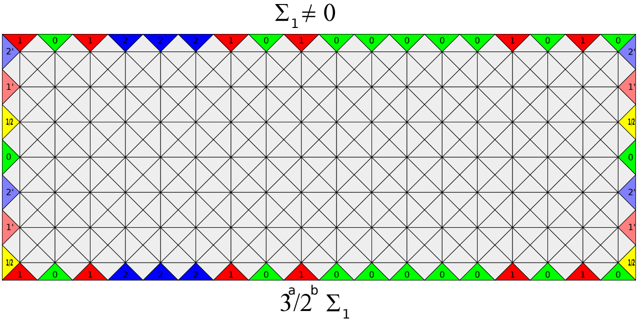
Существует не пустой софический сдвиг замощений наклоном E и равномерной ограниченной толщиной $\Leftrightarrow$ E вычисляемое.

Замощения Кари-Чулика (1996)



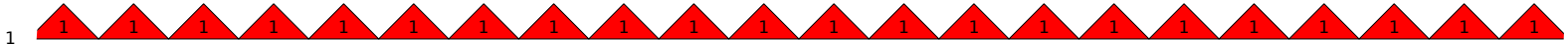
Плитки: $3\text{С} + \text{З} = \text{Ю} + \text{В}$ (вверху), $\frac{1}{2}\text{С} + \text{З} = \text{Ю} + \text{В}$ (внизу).

Замощения Кари-Чулика (1996)



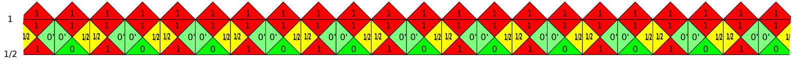
$\exists$ периодическое замощение $\Rightarrow$ $\exists$ двухпериодическое замощение.
В одной строке, плитки умножают либо все на 3, либо все на $\frac{1}{2}$.
Строка не содержает одни 0 и $0'$ на горизонталной стороне.

Замощения Кари-Чулика (1996)



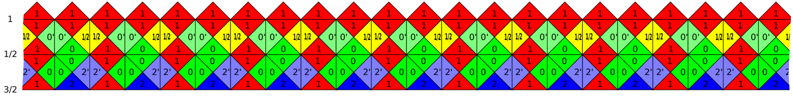
$\alpha \in \mathbb{R} \rightsquigarrow B(\alpha) \in \{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor\alpha\rfloor + 1\}^{\mathbb{Z}}$, где $B(\alpha)_i = \lfloor(i+1)\alpha\rfloor - \lfloor i\alpha\rfloor$.
Умножаем строкой α на 3 если $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, на $\frac{1}{2}$ если $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2)$.
$\rightsquigarrow$ 2-куска кусочно-линейный гомеоморфизм окружности.

Замощения Кари-Чулика (1996)



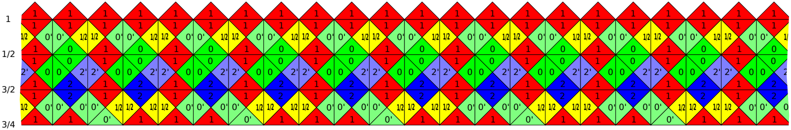
$\alpha \in \mathbb{R} \rightsquigarrow B(\alpha) \in \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor \alpha \rfloor + 1\}^{\mathbb{Z}}$, где $B(\alpha)_i = \lfloor (i+1)\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$.
Умножаем строкой α на 3 если $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, на $\frac{1}{2}$ если $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2)$.
$\rightsquigarrow$ 2-куска кусочно-линейный гомеоморфизм окружности.

Замощения Кари-Чулика (1996)



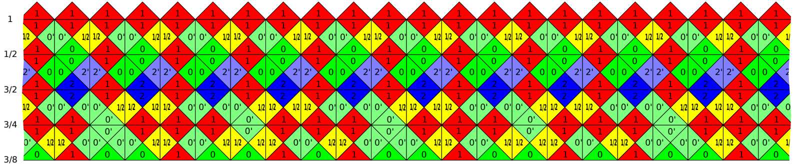
$\alpha \in \mathbb{R} \rightsquigarrow B(\alpha) \in \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor \alpha \rfloor + 1\}^{\mathbb{Z}}$, где $B(\alpha)_i = \lfloor (i+1)\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$.
Умножаем строкой α на 3 если $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, на $\frac{1}{2}$ если $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2)$.
$\rightsquigarrow$ 2-куска кусочно-линейный гомеоморфизм окружности.

Замощения Кари-Чулика (1996)



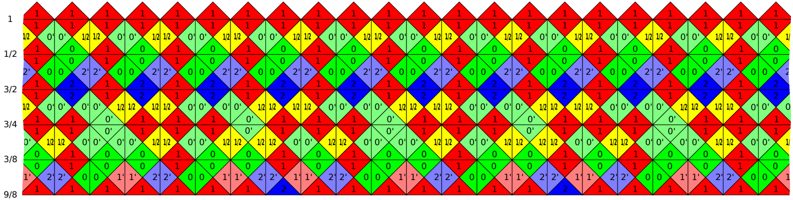
$\alpha \in \mathbb{R} \rightsquigarrow B(\alpha) \in \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor \alpha \rfloor + 1\}^{\mathbb{Z}}$, где $B(\alpha)_i = \lfloor (i+1)\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$.
Умножаем строкой α на 3 если $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, на $\frac{1}{2}$ если $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2)$.
$\rightsquigarrow$ 2-куска кусочно-линейный гомеоморфизм окружности.

Замощения Кари-Чулика (1996)



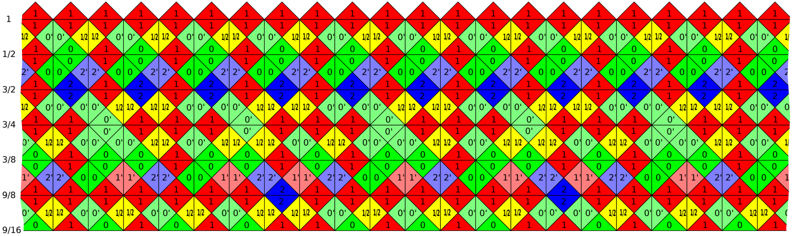
$\alpha \in \mathbb{R} \rightsquigarrow B(\alpha) \in \{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor\alpha\rfloor + 1\}^{\mathbb{Z}}$, где $B(\alpha)_i = \lfloor(i+1)\alpha\rfloor - \lfloor i\alpha\rfloor$.
Умножаем строкой α на 3 если $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, на $\frac{1}{2}$ если $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2)$.
$\rightsquigarrow$ 2-куска кусочно-линейный гомеоморфизм окружности.

Замощения Кари-Чулика (1996)



$\alpha \in \mathbb{R} \rightsquigarrow B(\alpha) \in \{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor\alpha\rfloor + 1\}^{\mathbb{Z}}$, где $B(\alpha)_i = \lfloor (i+1)\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$.
Умножаем строкой α на 3 если $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, на $\frac{1}{2}$ если $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2)$.
$\rightsquigarrow$ 2-куска кусочно-линейный гомеоморфизм окружности.

Замощения Кари-Чулика (1996)

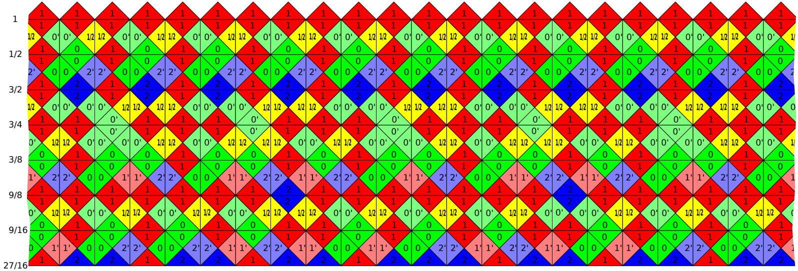


$\alpha \in \mathbb{R} \rightsquigarrow B(\alpha) \in \{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor\alpha\rfloor + 1\}^{\mathbb{Z}}$, где $B(\alpha)_i = \lfloor(i+1)\alpha\rfloor - \lfloor i\alpha\rfloor$.

Умножаем строкой α на 3 если $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, на $\frac{1}{2}$ если $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2)$.

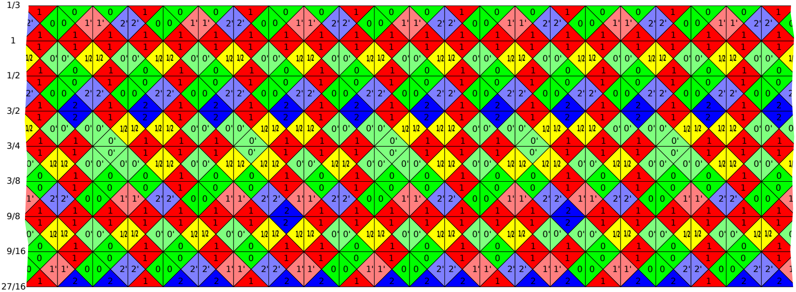
$\rightsquigarrow$ 2-куска кусочно-линейный гомеоморфизм окружности.

Замощения Кари-Чулика (1996)



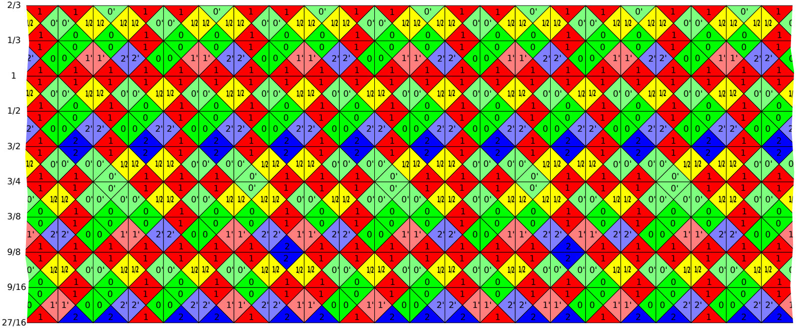
$\alpha \in \mathbb{R} \rightsquigarrow B(\alpha) \in \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor \alpha \rfloor + 1\}^{\mathbb{Z}}$, где $B(\alpha)_i = \lfloor (i+1)\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$.
Умножаем строкой α на 3 если $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, на $\frac{1}{2}$ если $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2)$.
$\rightsquigarrow$ 2-куска кусочно-линейный гомеоморфизм окружности.

Замощения Кари-Чулика (1996)



$\alpha \in \mathbb{R} \rightsquigarrow B(\alpha) \in \{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor\alpha\rfloor+1\}^{\mathbb{Z}}$, где $B(\alpha)_i = \lfloor(i+1)\alpha\rfloor - \lfloor i\alpha\rfloor$.
Умножаем строкой α на 3 если $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, на $\frac{1}{2}$ если $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2)$.
$\rightsquigarrow$ 2-куска кусочно-линейный гомеоморфизм окружности.

Замощения Кари-Чулика (1996)



$\alpha \in \mathbb{R} \rightsquigarrow B(\alpha) \in \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor \alpha \rfloor + 1\}^{\mathbb{Z}}$, где $B(\alpha)_i = \lfloor (i+1)\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$.
Умножаем строкой α на 3 если $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, на $\frac{1}{2}$ если $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2)$.
$\rightsquigarrow$ 2-куска кусочно-линейный гомеоморфизм окружности.

Краткая библиография

- Raphael Robinson, *Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane*, Inventiones Mathematicae **12** (1971).
- Thomas Fernique, Nicolas Ollinger, *Combinatorial substitutions and sofic tilings*, in proc. JAC'10 (2010).
- Thang Tu Quoc Le, *Local rules for quasiperiodic tilings*, in: The Mathematics of long-range aperiodic order, 1995.
- Jarkko Kari, *A Small aperiodic set of Wang tiles*, Disc. Math. **160** (1996).