TD/TP 4 : Produit de matrices à la Strassen

Q1. Combien de produits élémentaires (produit de deux coefficients) faut-il pour multiplier deux matrices $n \times n$?

Q2. Calculez le produit de matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Les coefficients peuvent-ils être eux-mêmes des matrices ? De quelles tailles ?

Q3. On pose

$$\begin{array}{lllllllll} P_1 & := & (a+d)(x+t), & P_2 & := & (c+d)x, & P_3 & := & a(y-t), \\ P_4 & := & d(z-x), & P_5 & := & (a+b)t, & P_6 & := & (c-a)(x+y), \\ P_7 & := & (b-d)(z+t). & & & & & & \end{array}$$

Calculez les quatre termes suivants

$$P_1 + P_4 - P_5 + P_7, \qquad P_3 + P_5, \qquad P_2 + P_4, \qquad P_1 - P_2 + P_3 + P_6.$$

Q3. En déduire un nouvel algorithme pour multiplier deux matrices $n \times n$

Q4. Combien de produits élémentaires fait cet algorithme ?

Q5. Programmer le produit à la Strassen en respectant la déclaration :

```
float* strassen(float* A, float* B, int n)
```

On supposera les matrices de taille $n \times b$ avec $n = 2^k$ et on écrira les fonctions auxiliaires correspondant aux déclarations suivante :

```
void dcmp(float* M, int n, float* A, float* B, float* C, float* D)
```

qui décompose une matrice M de taille $n \times n$ en 4 blocs de même taille,

```
void cmp(float* A, float* B, float* C, float* D, int n, float* M)
```

qui compose une matrice M de taille $2n \times 2n$ à partir de 4 blocs de taille $n \times n$,

```
void add(float* A, float* B, float* C, int n)
void sub(float* A, float* B, float* C, int n)
```

qui calculent $C = A + B$ et $C = A - B$, les matrices étant de taille $n \times n$.

Q6. À partir de quelle valeur de n ce programme multiplie-t-il plus vite deux matrices de Hilbert $n \times n$ que le programme de multiplication classique ?