

ÉQUIPE CALIN, LIPN, VILLETANEUSE

RAPPORT DE STAGE DE M2

Transition de phase
dans les pavages ~~de Penrose~~ ?

Auteur

Léo GAYRAL

Encadrants

Thomas FERNIQUE, Mathieu SABLIK

13/04/2020 – 31/07/2020

Déroulement du stage

Le but de mon stage était l'étude de pavages par dimères aléatoires, avec pour objectif à terme de généraliser les éventuels résultats au cas des pavages de Penrose. La question initiale sur les pavages de Penrose est motivée par deux articles de physique, publiés en 1990 à un mois d'intervalle, annonçant des comportements possiblement contradictoires de quasi-cristaux à basse température. Le sujet étant assez peu balisé, un des objectifs était de faire le tour de la littérature existante et de constituer une éventuelle bibliographie sur le sujet.

Ce stage est co-encadré par Mathieu Sablik, mon futur encadrant de thèse, ainsi que Thomas Fernique, un de ses collaborateurs. Le stage aurait dû se dérouler au LIPN, auprès de Thomas Fernique, mais le confinement en a voulu autrement, j'ai donc effectué l'entièreté de mon stage et rédigé la totalité de ce rapport entre les quatre murs de ma chambre.

En conséquence, ce stage a été assez pauvre en rencontres inattendues et en échanges spontanés. Sur le conseil de Mathieu Sablik, j'ai tout de même eu l'opportunité d'assister à la web-école **EJCIM** (*École de Jeunes Chercheurs en Informatique Mathématique*) initialement prévue en avril à Bordeaux, mais décalée au mois de juin en ligne. J'ai également eu la joie *sans bornes* d'apprendre à utiliser le logiciel **Inkscape**, à l'aide duquel ont été réalisées toutes les figures du rapport ci-après.

Je tiens à remercier mes encadrants Thomas Fernique et Mathieu Sablik pour leur accompagnement régulier malgré les difficultés liées au confinement, ainsi que mes deux colocataires pour leur présence tout au long du confinement.

Table des matières

1 Pavages par dimères	4
1.1 Formalisme plan	4
1.2 Fonction de hauteur	7
1.3 Pavages et surfaces échelonnées	11
1.4 Dynamique des <i>flips</i>	14
1.5 Pavages planaires	16
1.6 Règles locales	17
2 Pavages aléatoires	19
2.1 Mesure de Gibbs	19
2.2 Difficultés de simulation	21
2.3 Problème étudié	24
3 Cas $(1, 1, 1)$ sous-critique	24
3.1 Lignes de niveau	25
3.2 Correction des erreurs	29
3.3 Argument de Peierls	32
4 Modèle $O(N)$ par boucles, cas sur-critique ?	34
4.1 Modèle $O(N)$ par boucles	35
4.2 Comportement à haute température et transition de phase	36
5 Cas $(2, 2, 1)$, généralisation du cas sous-critique ?	38
5.1 Pavage $(2, 2, 1)$ et règles locales	38
5.2 Règles locales et lignes de niveau	39
5.3 Lignes de niveau géométriques et stratification de \mathbb{Z}^3	42
5.4 Tuiles colorées et règles locales	44
5.5 Rayon d'une boule sans erreurs	46

Introduction

Les cristaux ont longtemps été conceptualisés comme des matériaux très ordonnés à la structure périodique. L'étude des groupes de pavages a permis d'établir que de tels matériaux possèdent nécessairement une invariance par rotation d'ordre 2, 3, 4 ou 6. En avril 1982 [dlHK11], Dan Shechtman observa un matériau présentant en apparence une invariance d'ordre 10, ce qui est mathématiquement impossible. Il venait en fait de découvrir l'existence des quasi-cristaux, des matériaux dont la structure est très ordonnée mais apériodique. Pour étudier ces matériaux d'un point de vue plus théorique, un rapprochement a été rapidement fait avec les pavages de Penrose, des pavages apériodiques du plan qui présentent une invariance locale d'ordre 5.

En 1989, le magazine *Physical Review B* reçut deux articles sur ces pavages de Penrose, publiés en 1990 à un mois d'écart [TJ90, SD90]. Les deux équipes se sont intéressées au comportement de pavages de Penroses auxquels ils ont ajouté de l'aléatoire, pour mieux cerner les propriétés de stabilité des quasi-cristaux à basse température. Les articles sont difficiles d'accès pour des mathématiciens, et utilisent peut-être des modèles subtilement distincts pour leurs simulations numériques, mais il semblent en tirer des conclusions opposées : Strandburg et Dressel conjecturent que le comportement quasi-cristallin des pavages de Penrose n'est plus apparent dès lors qu'on ajoute des perturbations aléatoires mêmes minimales, tandis que Tang et Jarić conjecturent un régime basse température dans lequel les perturbations aléatoires sont minimales et le pavage aléatoire garde sa structure quasi-cristalline.

Notre objectif à terme serait donc de proposer un modèle clair pour les pavages de Penrose randomisés, sur lequel on peut démontrer un comportement à basse température, voire même exhiber une transition de phase entre plusieurs régimes de température.

Ces pavages sont cependant un objet complexe à étudier, de par leur apériodicité intrinsèque, et parce qu'on peut les mettre en lien avec des surfaces échelonnées de \mathbb{R}^5 . On peut ramener ces pavages à des surfaces échelonnées dans \mathbb{R}^3 , à des pavages par dimères n'utilisant qu'un seul type de tuile. C'est ainsi qu'est né ce sujet de stage, dont le but est en fait d'étudier les pavages par dimères, en espérant pouvoir transposer certains résultats et conclure sur les propriétés des pavages de Penrose.

Les pavages par dimères aléatoires ont déjà été théoriquement abordés par le passé [Ken09], mais le modèle existant nous a semblé inadapté à la motivation physique initiale. C'est pourquoi, dans un premier temps, il conviendra de proposer un modèle de pavages aléatoires adapté à cette motivation, ainsi que de formellement définir la grandeur à laquelle on s'intéressera, avant de chercher une éventuelle transition de phase pour cette grandeur.

Précisons que, dans le cas du modèle d'Ising par exemple [FV17], le terme transition de phase entre basse et haute température désigne autant une propriété d'unicité de la mesure limite qu'une propriété quantitative sur la polarisation moyenne d'un état pour cette mesure limite. Dans notre cas, on s'intéressera plus spécifiquement au second type de transition, au fait qu'une grandeur caractéristique de nos pavages reste intégrable ou non à la limite, et ce plus particulièrement dans le régime basse température, comme c'était le cas dans les articles sur les pavages de Penrose randomisés.

Dans ce qui suit, on va commencer par dérouler une partie de la bibliographie au sujet des pavages par dimères, pour formaliser l'objet déterministe étudié. On va ensuite proposer un modèle aléatoire sur ces pavages, puis établir un résultat à basse température, dans un cadre sous-critique spécifique. Après cela, on va à nouveau s'intéresser à la bibliographie sur des objets proches dans le cas des hautes températures. Finalement, on exposera plusieurs pistes de réflexion actuellement considérées afin de potentiellement étendre le résultat à un cadre sous-critique plus large.

1 Pavages par dimères

Avant d'introduire une quelconque notion d'aléatoire au sein de notre problème, commençons par introduire formellement les pavages par dimères, et les différents points de vue sur ces objets.

1.1 Formalisme plan

Formaliser la notion de pavage est une tâche délicate, en raison de la nature tantôt géométrique tantôt algébrique et combinatoire des objets. Dans le cas du modèle d'Ising par exemple, il est suffisant d'étiqueter les cases d'un réseau pour totalement décrire ses configurations. Dans le cas qui nous intéresse, celui des pavages par dimères, il existe bel et bien un réseau triangulaire sous-jacent qu'on pourrait étiqueter, mais cette approche est a priori moins adaptée pour définir notre mesure de Gibbs.

Remarque 1 (Réseau triangulaire) :

Formellement, le réseau triangulaire correspond en fait au graphe de Cayley du sous-groupe additif discret de \mathbb{C} à 3 générateurs défini par $\mathbb{Z} + e^{i\frac{\pi}{6}}\mathbb{Z} + e^{i\frac{\pi}{3}}\mathbb{Z}$, où les sommets sont les éléments du groupe, et deux sommets sont reliés lorsque leur différence est un des trois générateurs. On peut en voir une représentation tournée d'un quart de tour sur la figure 1, et on nommera par la suite ce réseau-là \mathbb{T} .

Notons qu'en n'utilisant que deux générateurs parmi les trois, on obtient le même groupe, mais pas le même *graphe*.

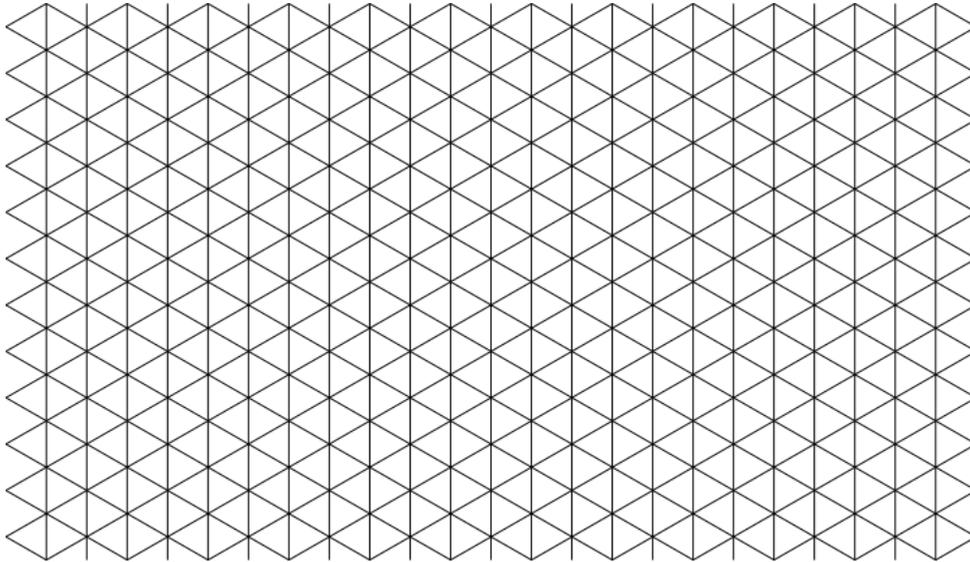


FIGURE 1 – Réseau triangulaire T .

Définition 2 (Tuiles) :

Sur ce réseau, on s'intéresse aux pavages dont les tuiles élémentaires sont les losanges fermés obtenus en recollant deux triangles équilatéraux voisins (d'où un petit angle de 60°). On obtient ainsi trois tuiles, ou plutôt une tuile avec trois rotations possibles, comme l'illustre la figure 2.

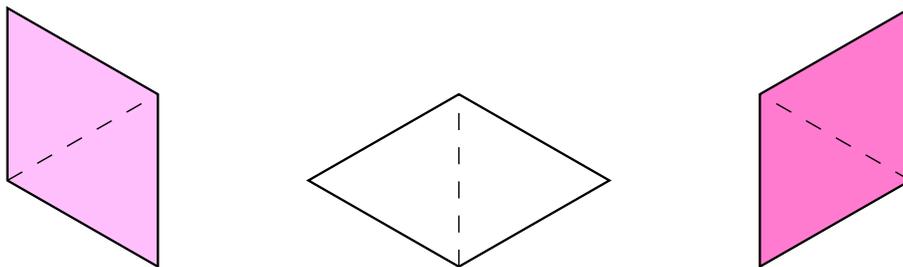


FIGURE 2 – Différents types de tuiles obtenus en collant deux triangles voisins.

Définition 3 (Pavage) :

Un pavage est un ensemble η de tuiles tel que l'intersection de deux tuiles distinctes est d'intérieur vide, autrement dit on interdit le fait qu'un triangle du réseau appartienne à plusieurs tuiles.

Deux tuiles $\tau, \tau' \in \eta$ sont alors dites voisines si elles ont une arête en commun.

Notons que tout sous-ensemble d'un pavage reste ainsi un pavage. La figure 3 illustre plusieurs pavages possibles ; on notera que sur le pavage de droite, les triangles vides, sans tuile, sont coloriés en noir pour plus de clarté.

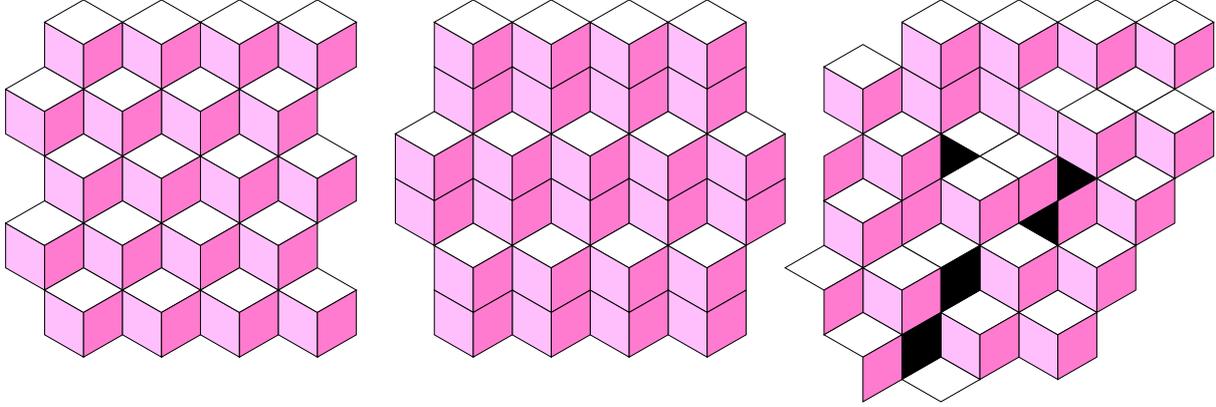


FIGURE 3 – Trois exemples de pavages connexes.

Cette notion est en tant que telle assez permissive, puisqu'on n'a pas encore spécifié de *domaine* à paver.

Définition 4 (Domaine compatible, domaine pavable) :

On dit qu'un domaine $\Lambda \subset \mathbb{C}$ est *compatible* avec un pavage η lorsque $\Lambda = \bigcup_{\tau \in \eta} \tau$ est l'union des tuiles de η . Le domaine Λ est *pavable* s'il admet un domaine compatible.

Remarque 5 :

Comme on ne considère ici que des pavages compatibles avec le réseau triangulaire, on peut également voir ces pavages comme des sous-graphes du réseau triangulaire restreint à un domaine Λ . Dans ce cas, le pavage η contient une tuile τ lorsque l'arête correspondant à la petite diagonale du losange, celle le long de laquelle on a recollé deux triangles équilatéraux, est absente du graphe η correspondant.

La pavabilité d'un domaine est une propriété subtile, qui nécessite plus que la parité du nombre de triangles dans chaque composante connexe du domaine à paver, comme l'illustre le domaine non-pavable de la figure 4. De façon combinatoire, il s'agit en fait de trouver un couplage parfait (un ensemble d'arêtes sans extrémités en commun qui recouvre tous les sommets) au sein du graphe dual biparti associé à un ensemble de triangles, où les triangles sont les sommets du graphe, et les arêtes relient deux triangles voisins.

Par la suite on s'intéressera à des domaines Λ pavables, connexes et compacts (donc pavés par un nombre fini de tuiles).

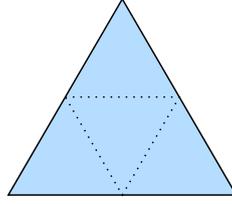


FIGURE 4 – Exemple de domaine non pavable.

1.2 Fonction de hauteur

On va maintenant s'intéresser à la notion de fonction de hauteur d'un sommet. Grossièrement, une fonction de hauteur est une fonction $H : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{Z}$ à valeurs entières sur le réseau \mathbb{T} (ou sa restriction à un domaine Λ fini) qui obéit à certaines contraintes. Ce formalisme nous offrira une description équivalente des pavages, qui nous permettra de comparer deux pavages du même domaine.

Cette construction est assez inspirée par les notes de cours de l'école d'été *Tilings and Tessellations* organisée en 2015 [BDTB⁺15].

Définition 6 (Fonction de hauteur) :

Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe non-orienté muni de poids P algébriques, définies sur les arêtes de G orientées de sorte que pour toute arête $\{u, v\} \in A$, on a $P(u \rightarrow v) + P(v \rightarrow u) = 0$.

On dit que $H : S \rightarrow \mathbb{Z}$ est une fonction de hauteur lorsque, pour toute arête $u \rightarrow v$ dans G , on a :

$$H(v) = H(u) + P(u \rightarrow v).$$

Lemme 7 (Existence et unicité) :

Sur un graphe $G = (S, A)$ connexe muni de poids P , on peut définir H si et seulement si la somme des poids sur tout cycle orienté est nulle. Auquel cas la fonction H est définie de façon unique, à une constante additive près. Il suffit en outre de vérifier cette propriété pour les cycles injectifs (pour les sommets) induits.

Démonstration. Par connexité, la construction de H peut se faire de façon inductive, en partant de la valeur en un point, puis en l'étendant à un voisin des sommets déjà étiquetés via le poids de l'arête utilisée pour le rejoindre. L'unicité de H à constante près découle alors de cette définition inductive : en prenant le même chemin

$u = u_0 \rightarrow \dots \rightarrow v = u_n$ pour deux fonctions H et H' , on vérifie

$$H(v) - H(u) = \sum_{k=0}^{n-1} P(u_k \rightarrow u_{k+1}) = H'(v) - H'(u),$$

et donc $H(v) - H'(v) = H(u) - H'(u)$, d'où l'unicité à une constante près, par connexité de G .

Supposons qu'une fonction H existe. Pour tout cycle $(u_k)_{k < n}$ de longueur n , le même raisonnement nous donne bien :

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(u_k \rightarrow u_{k+1}) = H(u_n) - H(u_0) = H(u) - H(u) = 0,$$

et c'est *a fortiori* pour tout cycle injectif induit.

Inversement, si cette propriété sur les cycles est vérifiée, on peut définir H par $H(u) = 0$ en un sommet et $H(v) = \sum_{k=0}^{n-1} P(u_k \rightarrow u_{k+1})$, où $(u_k)_{k < n}$ est un chemin de u à v quelconque. En effet, deux tels chemins donnent toujours la même somme, sans quoi on pourrait parcourir le premier puis remonter le second à l'envers et obtenir un cycle de poids total non nul.

Il nous reste à justifier qu'on peut se restreindre aux cycles injectifs induits. Par contraposée, supposons que G contient un cycle de poids non nul. Si ce cycle c n'est pas injectif (pour les sommets), on peut le décomposer en deux cycles plus courts c_1 et c_2 passant tous deux par un point multiple de c , et le poids de c est la somme des poids de c_1 et c_2 . Si le poids de c est non nul, c'est donc le cas pour c_1 ou c_2 . Si $c = (u_k)_{k < n}$ est injectif mais n'est pas un cycle induit, il admet une corde dans G , disons entre u_0 et u_m sans perte de généralité. Dans ce cas, $c_1 = (u_k)_{k \leq m}$ et $c_2 = (u_k)_{m < k \leq n}$ sont deux cycles de G dont la somme des poids est le poids de c : on retrouvera les mêmes arêtes, mais en plus $u_m \rightarrow u_0$ dans c_1 et $u_n = u_0 \rightarrow u_m$ dans c_2 , et ces deux poids se compensent. Ainsi, un des deux cycles plus courts est de poids non nul lorsque c l'est. Par induction, on finit par se ramener à un cycle injectif induit de poids non nul. Il suffit donc de vérifier le critère sur de tels cycles. \square

Remarque 8 :

On n'utilise à aucun moment de la preuve le fait que les coefficients α , β et γ sont des réels ou des entiers. On peut en fait étendre le résultat précédent au cas des fonctions de hauteur sur un groupe abélien quelconque.

Dans notre cas, les graphes considérés sont tous compatibles avec le réseau triangulaire \mathbb{T} , on peut donc distinguer trois types d'arêtes, orientées dans trois directions, et assigner

un poids à chacun des types comme illustré sur la figure 5, indépendamment du sommet duquel est issu l'arête.

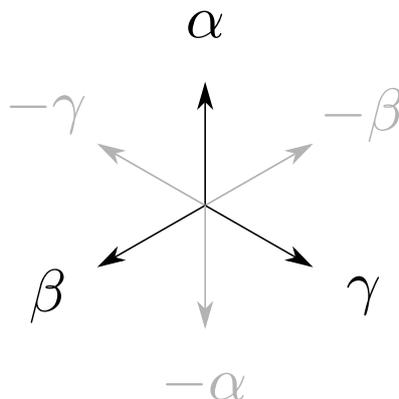


FIGURE 5 – Poids pour les pavages par dimères généraux.

Corollaire 9 :

Si le domaine pavable Λ est connexe et *simplement connexe*, alors tout pavage admet une fonction de hauteur.

Démonstration. Par un raisonnement analogue au cas général précédent, on vérifie ici que si un cycle entoure *plusieurs* tuiles du pavage, on peut le découper en deux cycles qui entourent chacun moins de tuiles. Il nous suffit donc de vérifier le critère de somme nulle sur les cycles qui n'entourent qu'une seule tuile.

Lorsque Λ est simplement connexe, on ne peut pas avoir de « trou » triangulaire non pavable comme c'est le cas dans le pavage à droite de la figure 3. Le pavage est en fait une quadrangulation de ce domaine Λ . Si un cycle entoure une seule tuile, et que le long de chacune de ses arêtes se trouve une *autre* tuile plutôt qu'un « trou, » ce cycle est forcément un 4-cycle. Pour chacun des trois types de tuiles, on constate alors sur la figure 6 que la somme des poids se compense sans soucis, et donc qu'on satisfait le critère d'existence de H . □

Pour s'affranchir des histoires de constante additive près, on peut par exemple fixer la valeur $H(0) = 0$ lorsque $0 \in \Lambda$, ou bien imposer la valeur de H sur le bord de Λ pour obtenir un bon raccord avec la fonction de hauteur définie sur la condition au bord η_0 .

À ce stade, on peut donc garantir existence et unicité (à une constante additive près) de la fonction de hauteur sur tout pavage. Il nous reste donc à justifier que la fonction de hauteur *caractérise* un pavage donné. En effet, prendre $\alpha = \beta = \gamma = 0$ nous assure certes l'existence et l'unicité de la hauteur, mais la fonction obtenue sera la même sur tout pavage.

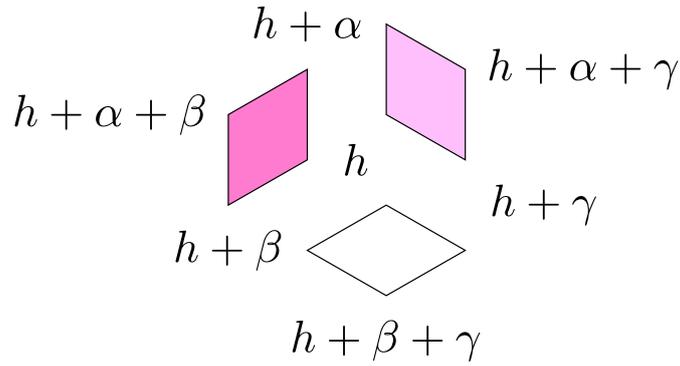


FIGURE 6 – Hauteur sur les sommets de chaque tuile.

Lemme 10 :

L'application qui à un pavage η associe une fonction de hauteur sur les sommets du graphe est injective si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Démonstration. Il nous suffit de justifier que la fonction de hauteur sur les sommets de η permet caractériser la présence ou non d'une arête entre deux sommets voisins du réseau.

Naturellement, si une arête verticale de \mathbb{T} relie deux sommets de η , la différence de hauteur sera égale à α . A contrario, dans le cas où elle n'est pas dans le pavage η (petite diagonale d'une tuile blanche), on observe sur la figure 6 une différence égale à $-\beta - \gamma$. Le raisonnement est analogue dans les deux autres directions.

Dans les trois cas, le critère permettant de distinguer la présence ou non d'une arête dans η peut se réécrire $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Lorsque la condition n'est pas vérifiée, lorsque $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on obtient en fait une fonction de hauteur compatible non seulement avec η mais avec le réseau \mathbb{T} lui-même, puisque la somme des poids sur tout cycle « élémentaire » est nulle, comme on le voit sur la figure 7. Ce réseau sous-jacent étant le même pour tous les pavages, on obtient alors la même fonction H dans tous les cas. □

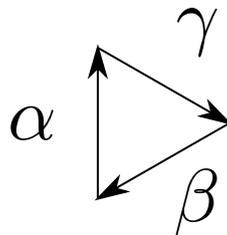


FIGURE 7 – Cycle « élémentaire » dans le réseau triangulaire.

Corollaire 11 :

Lorsque $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^*$, le critère précédent est vérifié.

En particulier, si $\alpha = \beta = \gamma = 1$, Une arête relie deux sommets voisins dans \mathbb{T} si et seulement si la différence de hauteur est impaire.

On peut se référer à la figure 8 pour un exemple de fonction de hauteur sur un pavage un peu plus complexe, dans le cas $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

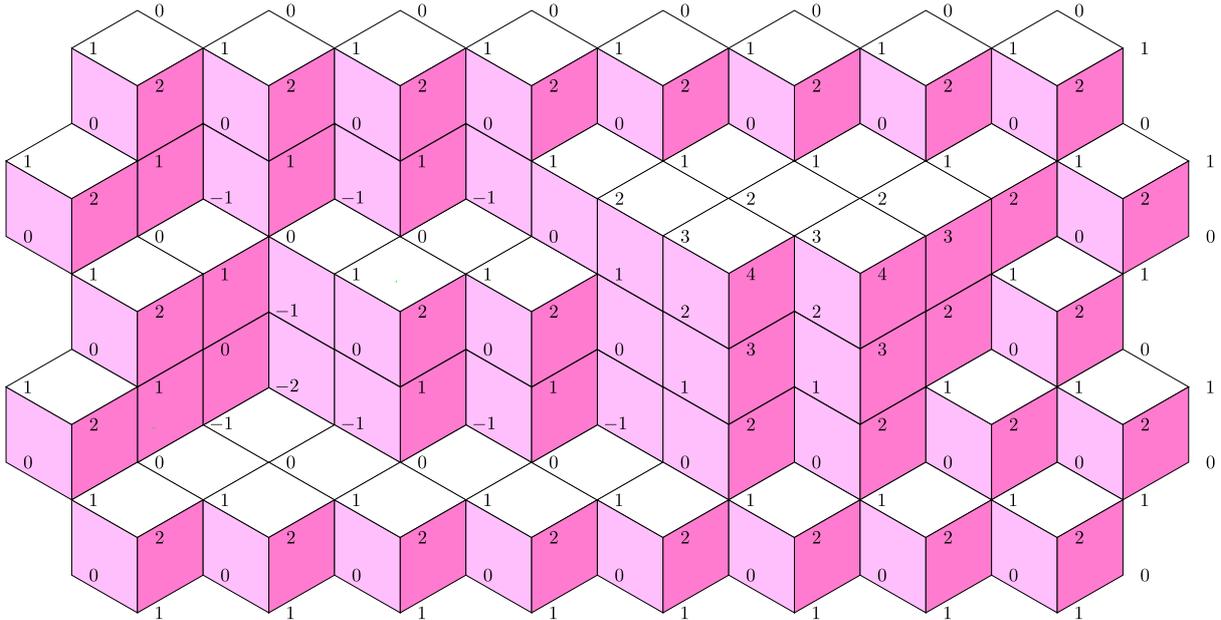


FIGURE 8 – Exemple de fonction de hauteur sur un pavage.

On en reparlera par la suite, mais dans ce dernier cas, toute fonction de hauteur est en particulier une fonction 1-lipschitzienne sur le graphe associé au pavage, et 2-lipschitzienne sur \mathbb{T} (deux sommets voisins dans \mathbb{T} sont à distance au plus 2 dans tout pavage).

1.3 Pavages et surfaces échelonnées

Jusqu'ici, des arguments très algébriques et combinatoires ont été avancés. La notion de fonction de hauteur cache cependant une réalité très géométrique. L'idée générale de ce paragraphe consistera à justifier qu'un pavage correspond à la projection orthogonale d'une *surface échelonnée* de \mathbb{R}^3 sur le plan vectoriel de normale $(1, 1, 1)$. La fonction de hauteur correspond alors à l'écart effectif entre le sommet sur la surface échelonnée et sa projection sur le plan.

La construction de la fonction de hauteur, dans la partie précédente, est en fait un cas particulier d'une méthode plus générale, qu'on retrouve dans un article de Levitov [Lev88]

par exemple, et qui s'applique entre-autres au cas des pavages de Penrose, qui eux correspondent à des surfaces échelonnées dans \mathbb{R}^5 .

Définition 12 (Surface échelonnée) :

On considère ici des surfaces de \mathbb{R}^3 constituées exclusivement de faces carrées alignées selon le réseau \mathbb{Z}^3 . À translation près, on s'autorise donc les carrés délimités par $(0, e_1, e_1 + e_2, e_2)$, $(0, e_1, e_1 + e_3, e_3)$ et $(0, e_2, e_2 + e_3, e_3)$, qu'on peut voir sur la figure 9. On peut ainsi identifier une telle surface à un sous-graphe du réseau \mathbb{Z}^3 .

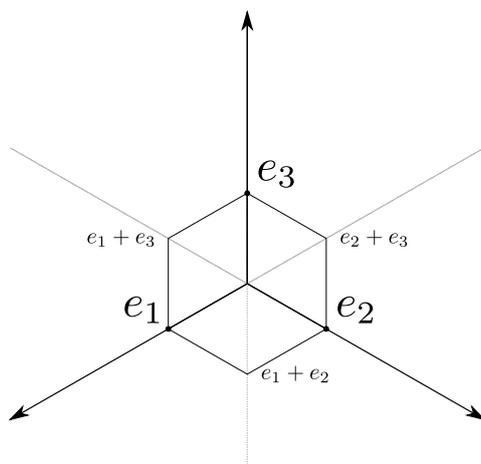


FIGURE 9 – Base canonique de \mathbb{R}^3 , générateurs du réseau \mathbb{Z}^3 .

D'après la remarque 8, on peut définir des fonctions de hauteur sur des groupes abéliens quelconques. On définit ainsi une fonction de hauteur dans \mathbb{Z}^3 , en choisissant $\alpha = e_3, \beta = e_1$ et $\gamma = e_2$ avant de dérouler à nouveau la preuve du lemme. On nomme alors $\overline{H} : S(\Lambda) \rightarrow \mathbb{Z}^3$ la fonction obtenue. La surface ainsi définie dans \mathbb{R}^3 est un *relèvement* (*lift*, en anglais) du pavage plan de $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$.

Proposition 13 :

Tout pavage par dimères d'un domaine Λ simplement connexe correspond à une surface échelonnée via la fonction \overline{H} .

La fonction de hauteur H précédemment introduite correspond alors à la distance de chaque sommet au plan vectoriel de normale $\vec{n} = (\beta, \gamma, \alpha)$.

Démonstration. Lorsque quatre sommets forment un carré dans \mathbb{Z}^3 via \overline{H} , cela correspond nécessairement à un emplacement en forme de tuile dans le pavage, donc par simple connexité de Λ les sommets entourent effectivement une tuile. On a ainsi une correspondance bijective entre les faces carrées de la surface échelonnée et les tuiles du pavage.

Considérons un triplet d'entiers (α, β, γ) . Reste à se convaincre que la hauteur H initiale correspond bien au produit scalaire de \overline{H} avec $\vec{n} = (\beta, \gamma, \alpha)$ (toujours au choix éventuel d'une constante additive près) Sans perte de généralité, quitte à translater, on suppose que $H(u) = 0$ et $\overline{H}(u) = 0$ pour un certain sommet u . Emprunter l'arête orientée vers le haut correspond à ajouter α à H d'une part, et e_3 à \overline{H} donc $\langle e_3, \vec{n} \rangle = \alpha$ à $\langle \overline{H}, \vec{n} \rangle$. Il en va de même pour chaque choix de direction. Par induction sur les voisinages, on a enfin $H = \langle \overline{H}, \vec{n} \rangle$, donc H correspond bien à la distance des sommets au plan vectoriel \vec{n}^\perp . \square

Considérer l'écart de hauteur d'un sommet dans deux configurations prend alors un sens très géométrique, puisqu'on s'intéresse à la distance entre deux points de deux surfaces distinctes.

Remarque 14 :

Notons que le graphe associé au pavage et celui induit par la surface échelonnée correspondante ont non seulement la même structure de graphe mais sont également isométriques en tant que graphes pondérés par les longueurs des arêtes.

À un changement d'échelle près, on peut obtenir le pavage par une projection orthogonale de la surface échelonnée sur le plan $(1, 1, 1)^\perp$.

Remarque 15 :

On ne peut pas obtenir toute surface échelonnée à partir d'un pavage. En effet, un cube est un exemple de surface échelonnée qui ne correspond pas à un pavage.

On peut vérifier que les surfaces échelonnées qu'on peut obtenir sont exactement les surfaces « décroissantes, » au sens où pour tous sommets (a, b, c) et (x, y, z) de la surface, si $a \leq x$ et $b \leq y$, alors nécessairement $c \geq z$.

Ce critère correspond en fait à l'interdiction de superposer deux tuiles distinctes sur un même triangle du réseau triangulaire pour le pavage.

Remarque 16 :

Dans le cas où le domaine pavable $\Lambda \subset \mathbb{C}$ n'est pas simplement connexe, il arrive qu'on ne puisse pas définir de fonction de hauteur sur les pavages, auquel cas le pavage considéré ne peut *a fortiori* pas être obtenu comme projection d'une surface échelonnée.

C'est typiquement ce qui se produit pour le pavage de droite sur la figure 3, à

cause des trous triangulaires qui délimitent des domaines non pavables.

On peut désormais comparer deux pavages, mais on n'a pour l'instant aucun moyen de les relier, on n'a aucune structure sur l'espace des pavages. C'est ce qu'on va détailler désormais.

1.4 Dynamique des *flips*

Définition 17 (*Flip*) :

On définit l'opération de *flip* sur un sommet du réseau \mathbb{T} comme l'involution qui intervertit deux pavages identiques sauf sur le voisinage direct du sommet, comme illustré sur la figure 10.

Si le voisinage du sommet contient quatre tuiles ou plus, on ne peut pas lui appliquer un *flip*, on considèrera à la rigueur que l'opérateur laisse la configuration inchangée.

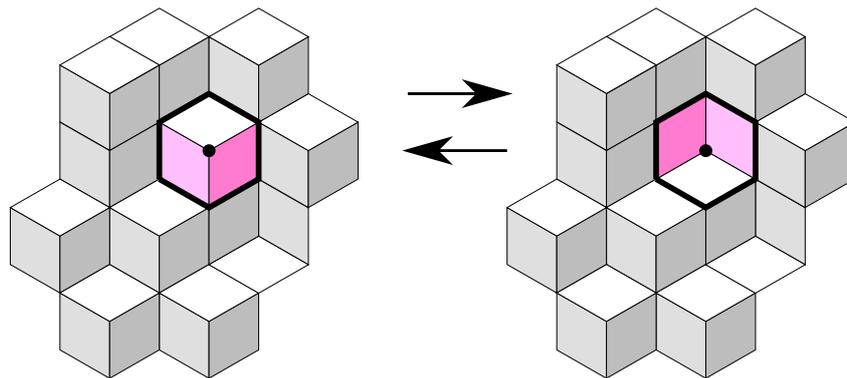


FIGURE 10 – *Flip* alternant entre le voisinage haut (gauche) et bas (droite).

Proposition 18 (*Flip-accessibilité*) :

On peut toujours relier deux pavages d'un même domaine Λ simplement connexe par une suite de *flips*.

Idée. Ce résultat est assez intuitif du point de vue des surfaces échelonnées. On peut en effet voir la surface comme une pile de cubes le long des axes e_1 et e_2 , la hauteur de chaque pile étant donnée par la fonction de hauteur associée aux paramètres $\alpha = 1$ et $\beta = \gamma = 0$, constante aux bords d'une tuile blanche, qui représente le sommet de sa colonne. Avec ce point de vue, le *flip* correspond à l'ajout/retrait d'un cube dans la colonne correspondante. En partant de tout pavage compatible avec le domaine, de toute surface avec la même hauteur au bord, on peut donc ajouter des cubes jusqu'à

obtenir la plus haute surface possible.

Plus formellement, dans l'article de Thurston sur les groupes de pavages de Conway [Thu90], on peut voir qu'il existe un ordre partiel naturel sur les fonctions de hauteur ($H \leq H'$ lorsque pour tout sommet u on a $H(u) \leq H'(u)$) qui correspond à celui induit par les *flips* entre configurations, et que dans le cas $(1, 1, 1)$ au moins, cet ordre partiel admet un minimum et un maximum globaux.

Ce principe est illustré sur la figure 11, où on voit les configurations minimale à gauche, maximale à droite, et deux intermédiaires non comparables entre elles au milieu. □

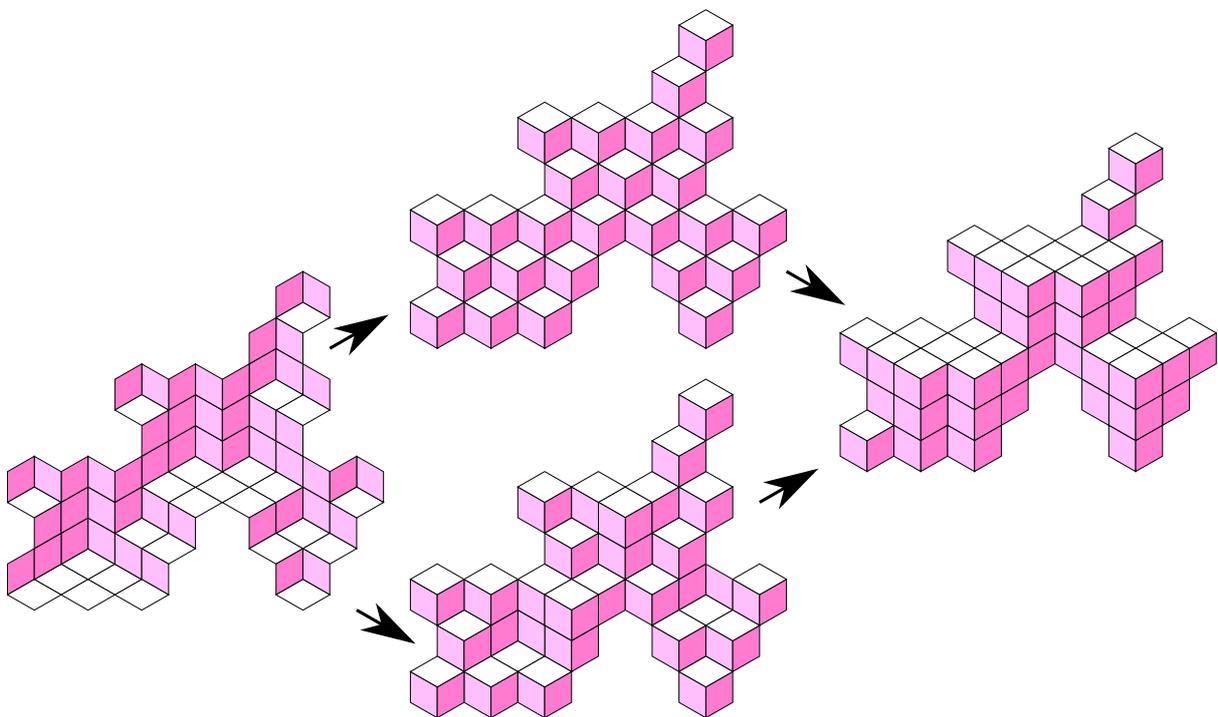


FIGURE 11 – Comparaison de plusieurs pavages du même domaine.
Les flèches sont orientées dans l'ordre croissant.

La différence de hauteur pour un même sommet entre deux configurations est alors proportionnelle au nombre minimal de fois qu'il faudra appliquer un *flip* à ce sommet pour passer d'une configuration à l'autre. On peut plus largement définir une *distance* entre les pavages via le nombre minimal de *flips* pour passer de l'un à l'autre [BDTB⁺15].

Notons au passage que l'opération de *flip* préserve le nombre de tuiles orientées dans chaque direction, donc cette quantité est intrinsèque au choix de condition au bord.

Remarque 19 (Pavages et bouliers) :

On peut également voir un pavage comme un genre de boulier, en ne retenant les positions que des tuiles blanches dans chaque colonne verticale du réseau \mathbb{T} . Le *flip* correspond alors au fait de déplacer une bille du boulier d'une coordonnée vers le haut ou le bas dans sa colonne. La structure géométrique du pavage fait qu'un tel déplacement est impossible lorsque cela implique de dépasser une boule dans une des colonnes voisines. Le domaine peut alors être vu comme une restriction sur les valeurs atteignables dans chaque colonne. Ce point de vue a notamment été étudié par Cédric Boutillier [Bou09].

1.5 Pavages planaires

Introduisons maintenant une notion qui permet de s'intéresser aux pavages sur une échelle spatiale plus large, moins locale.

Définition 20 (Pavage planaire) :

On dit qu'un pavage est *planaire* lorsqu'il existe un plan tel que la surface échelonnée correspondante reste toujours à distance finie dudit plan.

Autrement dit, il existe un choix de paramètres $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$ pour lequel la fonction de hauteur H associée reste bornée.

Bien entendu, avec cette définition, tout pavage fini est planaire. La notion de planarité n'a donc réellement de sens que pour des pavages infinis, qui recouvrent le domaine \mathbb{C} .

Lemme 21 :

Si η est un pavage de \mathbb{C} planaire, alors le triplet (α, β, γ) est unique, à un facteur multiplicatif près.

Démonstration. Si on considère un autre vecteur $(\alpha', \beta', \gamma')$ non proportionnel au premier, les plans associés vont s'éloigner arbitrairement loin l'un de l'autre en l'infini. En conséquence, si η reste à distance bornée de $(\alpha, \beta, \gamma)^\perp$, le pavage se retrouvera arbitrairement loin de $(\alpha', \beta', \gamma')^\perp$, ce qui conclut le raisonnement. \square

Remarque 22 :

Si η est un pavage de \mathbb{C} planaire, alors la normale \vec{n} est à coefficients positifs. Quitte à normaliser $\|\vec{n}\|_1 = 1$, les coefficients α , β et γ correspondent à la proportion

limite de chacun des trois types de tuiles dans le pavage.

1.6 Règles locales

Introduisons enfin la notion de règles locales au sein d'un pavage, déjà étudiée dans un cadre déterministe pour diverses raisons, mais qui ici constituera la brique élémentaire de notre modèle probabiliste.

On n'a jusqu'ici considéré aucun pavage spécifique d'un domaine Λ . Cela signifie que, pour l'instant, la seule mesure raisonnable qu'on est à même de mettre sur un ensemble de pavages est la mesure uniforme. Or le nombre total de configurations d'un domaine est possiblement exponentiel, par exemple lorsqu'on juxtapose horizontalement des hexagones, chacun pouvant adopter indépendamment une configuration haute ou basse. On souhaiterait donc introduire des *règles locales*, des motifs interdits permettant de favoriser certains types de pavages à l'échelle macroscopique.

On va ici introduire cette notion informellement, au travers d'un exemple simple.

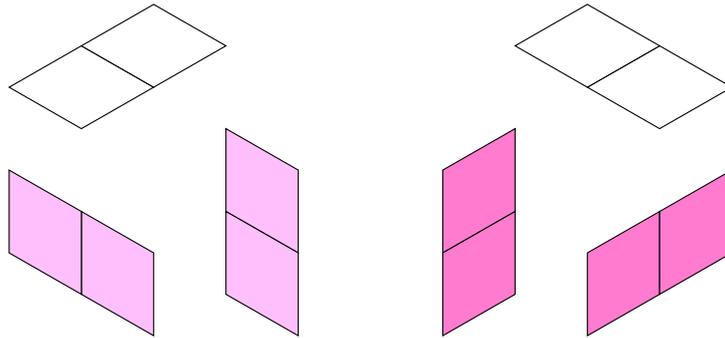


FIGURE 12 – Six motifs interdits.

Le long d'une arête, toute tuile peut être recollée à deux types de tuiles, dont le sien. Ainsi, en interdisant la juxtaposition de deux tuiles de même nature, en interdisant les six motifs de la figure 12, il ne reste qu'un voisin possible le long de chaque arête au bord d'une tuile. Si on construit un pavage en respectant ces règles, on se retrouve inévitablement avec la figure 13 ou une de ses translations, périodique sur le réseau hexagonal. Ce pavage est en fait planaire, et correspond à la meilleure approximation du plan $(1, 1, 1)^\perp$ par une surface échelonnée, dans le sens où la fonction de hauteur est positive mais minimale en tout point (avec $H(0) = 2$), le moindre *flip* résulte en une hauteur négative.

Cet ensemble de règles impose ainsi une quasi-unicité des pavages d'un domaine.

Définition 23 (Condition au bord) :

On dit qu'un pavage η infini (de domaine \mathbb{C}) constitue une condition au bord

pour un domaine Λ lorsqu'il existe un sous-pavage $\eta' \subset \eta$ de domaine Λ .

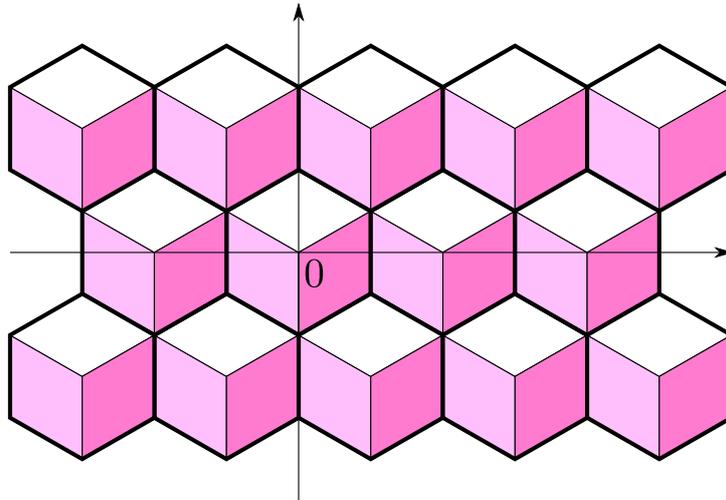


FIGURE 13 – Pavage périodique régulier η_0 .

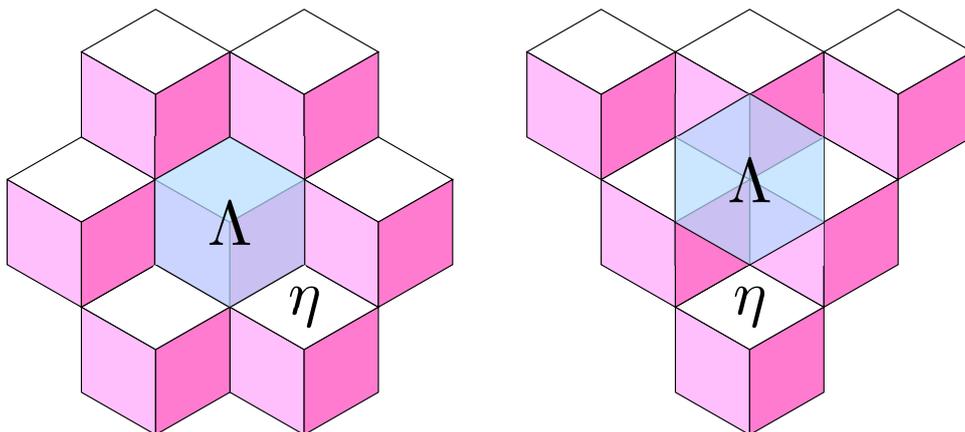


FIGURE 14 – À gauche, η est une bonne condition au bord pour Λ .
À droite, une mauvaise condition au bord car Λ contient des demi-tuiles.

On trouvera un exemple de condition au bord sur la figure 14. Par la suite, le pavage η_0 de la figure 13 jouera le rôle de condition au bord, pour notre résultat principal. L'intérêt de la condition au bord sera de faire en sorte que le pavage respecte les règles locales non seulement au milieu de Λ , mais aussi sur les bords, en regardant les motifs contenant des tuiles dans Λ et d'autres dans η_0 mais hors du domaine.

Remarque 24 :

Dans le cas des règles locales définies sur la figure 12, il nous suffirait donc d'avoir une condition au bord d'une tuile d'épaisseur pour étudier les pavages du

domaine. Cependant, pour d'autres règles locales, comme celles qu'on introduira dans la dernière section, il faudra des voisinages plus larges.

On peut trouver d'autres variantes de règles locales, ainsi que leurs liens avec les pavages planaires, dans l'article *Weak Colored Local Rules for Planar Tilings* [SF18].

On dispose maintenant de tous les outils nécessaires pour étudier ces pavages de façon déterministe. L'étape suivante consiste donc à introduire de l'aléatoire dans notre modèle, ce qu'on va faire par l'intermédiaire de ces règles locales.

2 Pavages aléatoires

Notre motivation initiale étant ici un problème de physique statistique, il est naturel de modéliser le phénomène à partir d'interactions locales, à courte distance, et d'étudier le comportement global qui en résulte. Les règles locales précédemment introduites sont un moyen de décrire ces interactions.

L'approche typique dans ce genre de situation est d'associer une énergie à chaque configuration, en fonction du nombre de règles locales brisées par exemple, et d'en déduire une mesure de Gibbs sur l'ensemble des configurations. C'est cette approche qu'on va suivre par la suite, afin d'étudier un pavage aléatoire qui en résulte.

Des pavages aléatoires ont déjà été étudiés depuis un moment, y-compris en utilisant des mesures de Gibbs [Ken09]. Cependant, le point de vue adopté est usuellement plutôt dual, en mettant des poids directement sur les dimères, sur les arêtes réseau hexagonal, ce qui ne permet pas de prendre en compte des interactions entre deux tuiles voisines. Ce modèle-là a déjà été très étudié, en particulier sur des questions formes limites et de cercle arctique.

Ce modèle-là rejoint celui proposé ici dans le cas limite où la température est infinie, correspondant à la mesure uniforme sur l'ensemble des configurations possibles, mais on n'a aucune raison de s'attendre à un comportement similaire à température finie. Pour autant que nous sachions, le présent modèle est donc inédit dans la littérature.

2.1 Mesure de Gibbs

On propose ici une construction assez générale, inspirée notamment par le très étudié modèle d'Ising [FV17].

Définition 25 (Hamiltonien) :

Soit Λ un domaine compact, avec une condition au bord η_0 , et $\beta > 0$ une température inverse. Étant donné un pavage η compatible avec Λ , on notera :

$$\mathcal{H}_{\Lambda,\beta}(\eta) = \beta \times E(\eta),$$

où $E(\eta)$ est le nombre de violations de règles locales dans le pavage, en incluant les violations au bord du domaine Λ , tant qu'au moins une des tuiles du motif interdit est dans Λ . On dit que \mathcal{H} est le Hamiltonien, l'énergie de la configuration η .

Dans le cas où les erreurs correspondent à la juxtaposition de tuiles identiques, sur la figure 15, on a $E(\eta) = 18$ erreurs, dont 5 le long du bord inférieur droit du domaine.

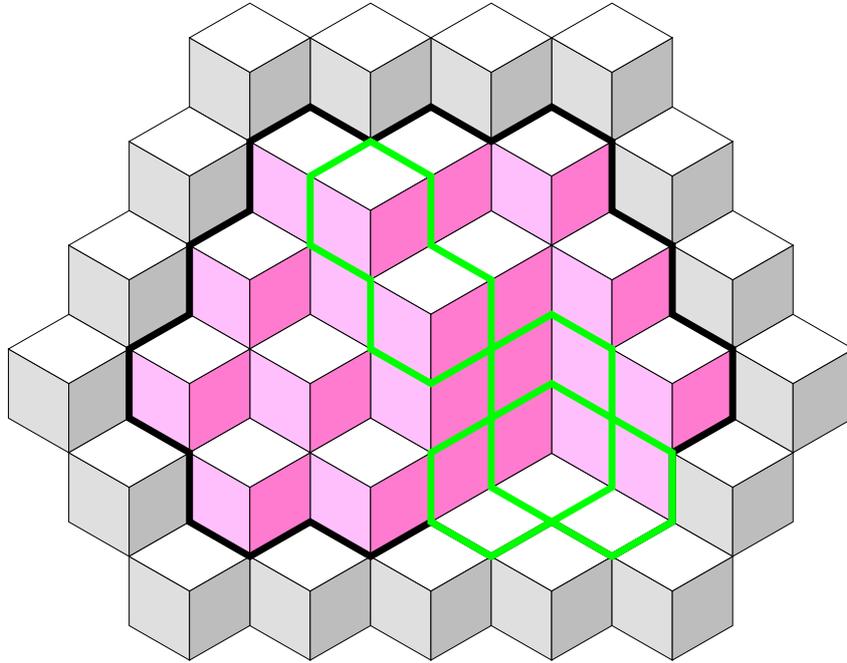


FIGURE 15 – Exemple de pavage du domaine Λ , délimité par le trait épais, avec la condition au bord η_0 en niveaux de gris.

Les lignes vertes correspondent aux violations de règles locales entre tuiles voisines.

Définition 26 (Mesure de Gibbs) :

La mesure de Gibbs associée est :

$$\mu_{\Lambda,\beta}(\eta) = \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}} \exp(-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta}(\eta)),$$

où $Z_{\Lambda,\beta} = \sum_{\eta} \exp(-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta}(\eta))$ est la fonction de partition, bien définie car le domaine Λ est compact, donc l'ensemble de pavages η adaptés sur lequel on somme est fini.

Notons que β est la température *inverse*, donc le cas à *basse* température correspond à la limite $\beta \rightarrow \infty$, dont la limite en loi est la mesure uniforme sur les pavages dont le nombre d'erreurs est minimal. Dans notre exemple, il s'agit donc d'une mesure chargeant exclusivement la restriction de η_0 à Λ . À l'inverse, dans la limite $\beta \rightarrow 0$, à *haute* température, la mesure devient uniforme sur l'ensemble des pavages de Λ .

Remarque 27 (Limite thermodynamique) :

On peut munir l'espace des pavages de \mathbb{C} d'une tribu produit de diverses façons équivalentes, que ce soit via les arêtes de \mathbb{T} présentes dans le pavage, ou via les dimères dans le réseau hexagonal dual.

Quitte à réunir le pavage aléatoire sur Λ_n et sa condition au bord, on obtient un pavage η_n de \mathbb{C} aléatoire, compatible avec ces tribus. Le passage à la limite thermodynamique consiste à prendre une suite croissante de domaines Λ_n , de sorte que $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$, et à étudier une valeur d'adhérence de (μ_n) .

Par compacité de l'espace des mesures de probabilité pour la topologie faible, une telle valeur d'adhérence existe toujours.

2.2 Difficultés de simulation

Étant donnée une mesure de probabilité explicite, il est assez naturel de vouloir faire des simulations effectives pour conjecturer des propriétés. C'est d'ailleurs l'approche suivie dans les deux articles sur Penrose [TJ90, SD90] qui motivent notre problématique.

On travaille ici sur un espace discret, muni de *flips* qui permettent de relier toutes les configurations entre-elles. En outre, notre mesure de probabilité n'est accessible qu'à un facteur multiplicatif près, au travers du Hamiltonien des configurations. L'approche naturelle dans ce genre de cas est d'utiliser une méthode de Monte-Carlo, l'algorithme de Métropolis-Hastings plus précisément [DMPS18]. Pour ce faire, on construit une chaîne de Markov comme suit.

Posons $F(\eta)$ l'ensemble des sommets d'un pavage η auxquels on peut appliquer un *flip*. À moins de considérer un domaine n'admettant qu'un seul pavage, auquel cas les simulations n'ont de toute façon pas lieu d'être, cet ensemble est toujours non vide. Sur des domaines compacts, cet ensemble est en outre toujours fini.

On définit le coefficient $\alpha(\eta, \eta') = \min\left(\exp(\beta(E(\eta) - E(\eta'))) \times \frac{|F(\eta')|}{|F(\eta)|}, 1\right)$.

En partant d'une configuration $X_t = \eta$, on commence par choisir un nouveau sommet uniformément au hasard dans $F(\eta)$, et on pose $Y_{t+1} = \eta'$ la configuration obtenue après avoir appliqué le *flip* en question à η . Indépendamment de ce tirage, on choisit alors

$X_{t+1} = Y_{t+1}$ avec probabilité $\alpha(X_t, Y_{t+1})$ et $X_{t+1} = X_t$ sinon, avec probabilité $1 - \alpha(\eta, \eta')$.

Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ainsi défini est clairement une chaîne de Markov. Les transitions se font entre pavages à un *flip* de distance, toujours avec une probabilité strictement positive. Par *flip*-accessibilité, cette chaîne est donc irréductible. En outre, notamment sur les états dont le nombre d'erreurs est minimal, la probabilité de rester sur le même état est strictement positive. Cette chaîne est donc apériodique, elle admet une unique mesure invariante.

On vérifie par un calcul direct que la mesure $\mu_{\Lambda, \beta}$ est réversible pour ce noyau de transition markovien, c'est donc son unique mesure invariante.

Notons qu'on peut alternativement choisir un sommet uniformément au hasard sur $S(\Lambda)$ à chaque étape, appliquer le *flip* en question pour passer de $X_t = \eta$ à $Y_{t+1} = \eta'$ (si on ne peut appliquer de *flip* au sommet, rappelons que $\eta = \eta'$), auquel cas la probabilité d'avoir $X_{t+1} = Y_{t+1}$ devient $\alpha(\eta, \eta') = \min(\exp(\beta(E(\eta) - E(\eta'))), 1)$. La convergence vers la mesure limite risque d'être légèrement plus lente en théorie, puisqu'on va « stagner » plus longtemps sur chaque état avant de faire une transition. Ceci dit, en pratique, elle demande moins d'opérations à chaque étape, puisqu'on ne doit pas calculer $|F(\eta)|$, on peut donc s'attendre à des performances assez équivalentes.

Remarque 28 (Temps de convergence) :

Un des défauts de cette approche est que, en partant d'une mesure quelconque, on ne peut approcher la mesure $\mu_{\Lambda, \beta}$ asymptotiquement.

S'arrêter en temps fini peut certes donner de bons résultats, mais encore faut-il savoir quand s'arrêter.

Dans le cas uniforme, à température infinie, Benoît Laslier a montré pendant sa thèse [Las14] que sur un domaine Λ hexagonal de côté n , le temps de mélange est un $O(n^{2+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il es conjecturé que le temps de mélange est en fait en $\Theta(n^2 \ln(n))$.

Dans un cadre légèrement différent [Wil04], mais toujours à propos de pavages par dimères aléatoires obtenus via une chaîne de Markov effectuant des *flips*, sur un domaine Λ hexagonal de côté n , un temps de mélange en $\Theta(n^2 \ln(n))$ a été démontré.

Ainsi, de façon assez informelle, on peut ici s'attendre à ce que sur un domaine Λ de « diamètre » n , un nombre quadratique d'étapes soit nécessaire pour commencer à approcher la mesure limite. Ce temps sera en outre difficilement améliorable puisque pour un tel domaine il faut un nombre de *flips* quadratique pour relier les configurations maximale et minimale.

Remarque 29 (Échantillonnage parfait) :

Une méthode permettant d'échantillonner exactement la mesure limite en temps fini consiste à faire un couplage par le passé, avec une suite de fonctions de transition aléatoires qui vont réunir des trajectoires au fil du temps.

Dans le cas général, il faut garder une trace de ce qu'il arrive à *chaque* point de départ possible de la chaîne, ce qui n'est ici pas envisageable. Dans le cas d'espaces d'états munis d'un ordre naturel, on peut parfois ne considérer que les états extrémaux pour réaliser le couplage. Il faut alors que la chaîne de Markov soit *monotone*, ce qui n'est malheureusement pas le cas ici.

En effet, notre ordre partiel admettant un minimum et un maximum globaux, il pourrait être adapté. Cependant, la nature des *flips* fait qu'on peut partir de deux configurations $\eta \leq \eta'$ et arriver en deux états pour lesquels cet ordre n'est pas préservé.

Pour s'en convaincre, on peut par exemple considérer le cas minimal où Λ est un hexagone compatible avec η_0 , comme sur la figure 13, où un seul *flip* est possible, qui alterne entre le *flip* haut (qui minimise l'énergie) et le bas. Ainsi, en position basse, on va *toujours* faire un *flip* vers le haut, tandis qu'en position haute, on va *parfois* faire un *flip* vers le bas. On peut donc se retrouver à échanger les deux configurations, et *aucun* couplage ne pourra changer ça.

En outre, même en ayant un contrôle sur le temps de convergence, même en faisant de l'échantillonnage parfait, encore faut-il que la variable considérée ait une variance raisonnable, sans quoi il faudra de toute façon faire beaucoup de simulations avant d'espérer approcher son espérance par une moyenne empirique.

En mettant de côté ces difficultés théoriques, l'algorithme sus-mentionné est assez simple à mettre en œuvre, sur le papier. Le choix des structures de données à mettre en œuvre n'est cependant pas évident. On peut par exemple stocker tant bien que mal les pavages dans des tableaux 2D, et mémoriser les sommets auxquels on peut appliquer un *flip* dans un dictionnaire, mais rien ne garantit que ce choix est particulièrement efficace non plus.

Toutes ces difficultés expliquent pourquoi, avec un seul et même modèle théorique, on peut aboutir à des conjectures différentes selon les paramètres exacts considérés, selon le temps attendu etc. Il n'est donc pas *si* surprenant qu'avec des machines datant de 1990, les deux articles sur Penrose aient publié des résultats en apparence opposés.

On va donc désormais délaissier cette approche, et soulever une problématique précise à laquelle on essaiera de répondre dans la suite du rapport.

2.3 Problème étudié

À température nulle, avec la condition au bord η_0 et les règles locales précédentes, la mesure $\mu_{\Lambda, \infty}$ ne charge *que* la restriction de η_0 au domaine Λ . Les variations de hauteur pour $(1, 1, 1)$ sont donc restreintes. En outre, l'unique limite thermodynamique possible est le pavage η_0 lui-même, une mesure à support dans les pavages planaires.

On va par la suite s'intéresser à cette problématique pour des températures non-nulles. Plus précisément, quel contrôle peut-on avoir sur $\mathbb{E}_{\Lambda, \beta}[|H(0)|]$ lorsque $0 \in \Lambda$? Ce contrôle peut-il passer à la limite thermodynamique lorsque $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{C}$?

Remarque 30 :

Notons que cette dernière question a lieu d'être car, *a priori*, ces deux passages à la limite $\beta \rightarrow \infty$ et $\Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ ne commutent pas.

Ainsi, même si on observe une « transition » de phase sur un domaine Λ compact, entre le cas $\beta \rightarrow \infty$ très contrôlé et le cas $\beta = 0$ uniforme, rien ne garantit que c'est encore le cas lorsque $\Lambda = \mathbb{C}$.

Par analogie, on pourrait penser à la suite de fonctions $f_n : x \mapsto n(x - n)^+$ (où $x^+ = \max(0, x)$ désigne la partie positive), qui sont toutes continues sur \mathbb{R}^+ , et tendent vers l'infini de plus en plus vite, mais dont la seule fonction limite raisonnable est $f_\infty = 0$.

Toutes ces considérations sont valables dans un cadre général, et pas seulement pour les règles locales précises utilisées comme exemple. On va désormais prouver un résultat spécifique à ce choix de règles locales, dans le cas sous-critique.

3 Cas $(1, 1, 1)$ sous-critique

Dans cette section on trouvera le résultat principal de ce rapport. On va introduire des propriétés assez spécifique au cas $(1, 1, 1)$ déjà présenté, qui nous permettront de répondre à la question précédente dans le cas des basses températures, indépendamment du domaine Λ .

On pourrait voir le modèle d'Ising comme un pavage sur le réseau carré \mathbb{Z}^2 , à deux types de tuiles (carrés mais de couleurs différentes), dont les motifs interdits sont la juxtaposition de deux tuiles *différentes*. En cela, notre modèle diffère d'Ising puisqu'il interdit la juxtaposition de tuiles de *même* nature, avec les règles locales considérées ici. Au contraire d'Ising où on observe des agrégats à basse température, on s'attend ici *a*

priori à observer une alternance de tuiles, assez uniformément réparties dans l'espace, dans ce régime (le nombre de tuiles de chaque type, lui, reste constant, imposé par la géométrie du bord). Cette répartition homogène devrait cela dit avoir pour effet d'aplatir la fonction de hauteur.

3.1 Lignes de niveau

Introduisons maintenant un point de vue alternatif sur les brisures de règles locales, qui nous servira pour conclure le raisonnement : les lignes de niveau.

De façon informelle, en ne regardant que les arêtes associées à des erreurs, on va obtenir un ensemble de cycles, qu'on appellera des lignes de niveau. Ces lignes permettent de délimiter des domaines bien pavés, pour lesquels les seules erreurs sont au bord. Notons qu'on parle de lignes de *niveau* par abus de langage, puisqu'il s'agira plutôt de lignes marquant la *frontière* entre deux niveaux, géométriquement parlant.

Lemme 31 (Parité des sommets) :

Tout sommet est au bord d'un nombre *pair* d'erreurs.

Démonstration. Le nombre de voisinages possibles d'un sommet du réseau étant ici fini, il suffit de procéder par énumération. S'il n'y a aucune erreur, le lemme est vérifié. S'il existe une erreur, on peut compléter le voisinage de trois façons distinctes, chacune donnant lieu à un nombre pair d'erreurs. On peut ainsi voir les trois voisinages possibles avec une erreur rose-rose (clair) sur la moitié gauche dans la figure 16, avec les erreurs en vert. □

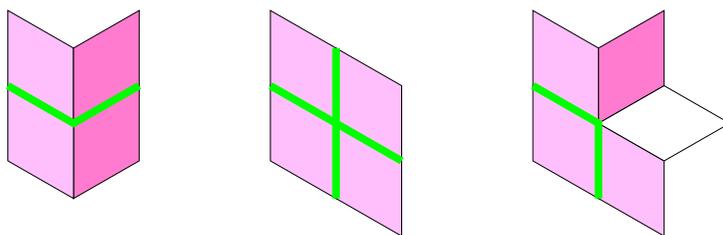


FIGURE 16 – Exemples de voisinages d'un sommet, avec un nombre pair d'erreurs.

Ainsi, on considère un graphe dont tous les sommets de degré pair, donc on peut partitionner ces arêtes-là en une famille de cycles sans arêtes en commun. Cependant, comme l'illustre la figure 17, où chaque cycle utilise une couleur différente, il n'y a pas unicité de cette décomposition.

Pour trancher sur la *bonne* façon de choisir les cycles, il convient de revenir au point de vue géométrique.

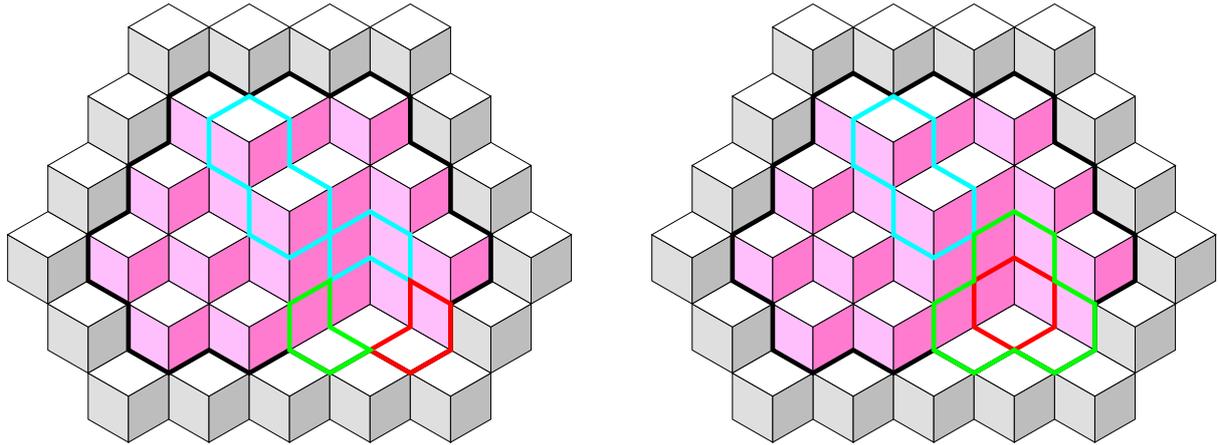


FIGURE 17 – Exemples de décompositions en cycles.

Formellement, l'obstruction à l'unicité est la compatibilité des cycles en question avec la grille hexagonale, qui correspond à l'idée qu'on veut englober des cubes entiers avec nos lignes, pas seulement certaines de leurs faces. On peut faire ceci en imposant le raccord pour les sommets de degré quatre comme sur la figure 18. On a ainsi virtuellement séparé ce sommet de degré 4 en deux sommets de degré deux. On se retrouve donc virtuellement avec un graphe dont tous les sommets sont de degré 0 ou 2, où la décomposition en cycles est unique, qui correspond par exemple à la décomposition de droite dans la figure 17.

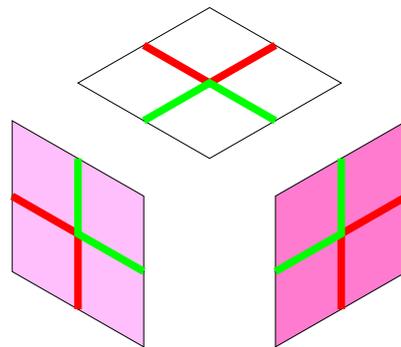


FIGURE 18 – Choix d'appariement des arêtes sur les sommets de degré 4.

Lemme 32 :

Ce critère impose de fait des cycles injectifs (pour les sommets).

Démonstration. On peut décomposer le réseau \mathbb{T} comme une superposition de trois grilles hexagonales, comme l'illustre la figure 19. Tant que deux arêtes font un angle de 120, elles restent de fait sur la même grille hexagonale.

Lorsqu'un sommet est de degré 2 on constate un angle de 120, donc le cycle en question ne peut changer de grille hexagonale. Lorsqu'un sommet est de degré 4,

notre règle de décomposition *impose* des angles de 120, mais aussi un écart angulaire de 60 entre les deux « coudes » qui ne peuvent donc pas appartenir à la même grille hexagonale.

On en déduit que les cycles construits se déplacent chacun au sein d'une seule grille hexagonale. En particulier, sur un sommet de degré 4, on observe donc deux cycles distincts qui ont un sommet en commun. □

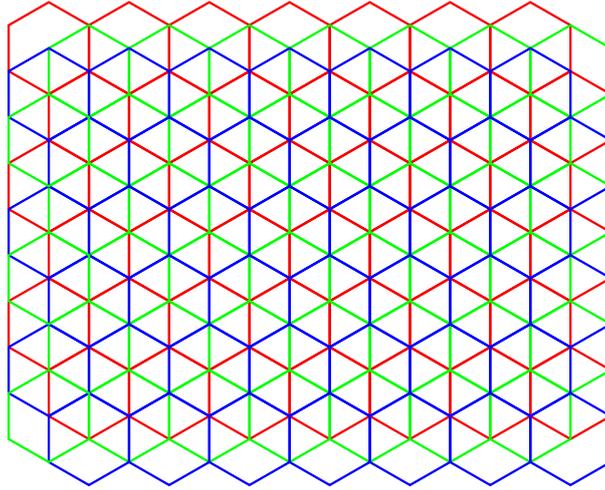


FIGURE 19 – Superposition de trois grilles hexagonales.

Ainsi défini, cet ensemble de cycles nous donne encore une description alternative équivalente d'un pavage η , puisque la donnée des cycles équivaut à celle des erreurs, et que savoir si une arête correspond ou non à une erreur indique lequel des deux types de tuiles y recollent.

Ces cycles vont délimiter des domaines au sein desquels la fonction de hauteur est, à une constante et translation près, celle qu'on s'attend à obtenir pour η_0 . Reste à justifier l'amplitude de cette constante additive, pour établir un lien entre H et le *nombre* de cycles qui entourent chaque point.

Proposition 33 :

Notons H la hauteur sur le pavage aléatoire, H_0 la hauteur dans le pavage η_0 (avec les mêmes valeurs au bord), et T le nombre de cycles qui *entourent* chaque sommet dans le pavage aléatoire. On a l'inégalité :

$$|H - H_0| \leq 3T .$$

Démonstration. Commençons par le cas où *un seul* cycle est présent sur le pavage η . Comme le cycle entoure un nombre fini d'hexagones, on peut passer de la restriction

de η_0 à la configuration η en question en appliquant un *flip* au sommet au centre de chacun de ces hexagones.

Posons H_1 la fonction de hauteur obtenue en prolongeant le pavage à l'intérieur du cycle sur le domaine \mathbb{C} , en une translation de η_0 . La hauteur H est égale à H_0 hors du cycle et à H_1 en dedans. Les hauteurs H_0 et H_1 coïncident en particulier le long du cycle.

En outre, comme un *flip* change la hauteur de 3 unités, on en déduit que si le sommet u est à l'intérieur du cycle, on a :

$$|H(u) - H_0(u)| = |H_1(u) - H_0(u)| \leq 3 = 3 \times T(u),$$

avec un cas d'égalité lorsque le sommet u est au centre d'un des hexagones sur lesquels on a fait un *flip*. Le raisonnement reste le même si plusieurs cycles sont présents mais qu'un seul entoure le sommet u .

Si désormais au moins deux cycles entourent u , on considère le cycle C le plus extérieur, qui induit la hauteur H_1 comme précédemment. On considère en outre le domaine simplement connexe $\Lambda' \subset \Lambda$ (avec égalité éventuelle) dont le bord est le cycle C en question. On a naturellement :

$$|H(u) - H_0(u)| \leq |H(u) - H_1(u)| + |H_1(u) - H_0(u)| \leq |H(u) - H_1(u)| + 3.$$

On peut en outre considérer H_1 et le pavage η_1 associé comme une nouvelle condition au bord sur le domaine Λ' . Dans ce nouveau pavage avec condition au bord, la hauteur est une restriction de la fonction H initiale, et le nombre de cycles qui entourent u est diminué de 1. Ainsi, par induction sur le nombre de cycles $T(u)$, on en déduit $|H(u) - H_0(u)| \leq 3T(u)$, le résultat annoncé. \square

Remarque 34 :

Si deux cycles imbriqués consécutifs sont alignés sur la même grille hexagonale, ils affectent la hauteur des mêmes sommets mais en se compensant, de sorte que la hauteur dans le petit cycle corresponde à celle en dehors du grand.

Au contraire, si deux cycles consécutifs sont alignés sur des grilles différentes, ils n'agissent pas sur les mêmes sommets. Notons qu'on n'a pas le choix sur la grille si on souhaite continuer à changer la hauteur dans la direction déjà prise, la troisième grille correspondant aux hexagones dont les centres ont un voisinage « en étoile » auxquels on ne peut appliquer un *flip*.

Pour reprendre la figure 19, si on commence par faire des *flips* au centre des hexagones pour obtenir un grand cycle aligné sur la grille rouge, on pourra alors refaire des *flips* associés à la grille rouge pour annuler l'effet, ou faire des *flips* sur la grille verte pour continuer. Les centres des hexagones bleus seront eux des sommets en étoile. Ensuite, dans cette zone verte, on pourra soit annuler les changements via des *flips* verts, soit la continuer par des *flips* bleus, et les centres rouges sont à nouveau en étoile.

On décale ainsi la grille d'un cran vers le haut ou le bas, et trois décalages successifs dans la même direction sont nécessaires pour retomber sur la grille initiale, en changeant la hauteur de tous les sommets à l'intérieur du petit cycle de 3. On peut donc obtenir une majoration du type :

$$|H - H_0| \leq 3 \left\lceil \frac{T}{3} \right\rceil \leq T + 2.$$

Ce faisant, grâce à ces bornes, plutôt que d'étudier la fonction $H(u)$ elle-même, on va plutôt majorer l'espérance de $T(u)$ par la suite pour conclure.

3.2 Correction des erreurs

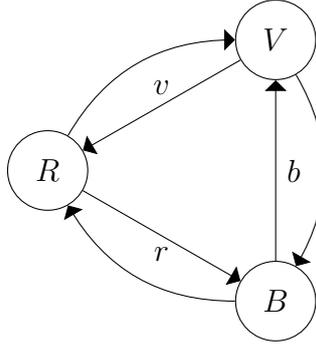
On va désormais expliquer comment *corriger* un cycle d'erreurs, afin de se ramener à un autre pavage plus probable, en effaçant le cycle en question au passage. Cette propriété se révélera essentielle dans le théorème principal ci-après.

La figure 19 nous permet d'associer à chaque cycle une couleur dans $\{r, v, b\}$ selon la grille hexagonale sur laquelle un cycle est aligné. De la même façon, on peut associer à chaque zone sans violation de règles locales une couleur parmi $\{R, V, B\}$ selon la grille hexagonale sur laquelle les cubes avec la face blanche en haut sont alignés (typiquement la grille en gras sur la figure 13).

On a déjà souligné le fait que tout enchaînement de cycles, et donc de couleurs, n'est pas possible. On va désormais introduire un automate dont le langage, sur l'alphabet $\{r, v, b\}$ est exactement celui des successions de cycles (ou plutôt des couleurs associées) qui correspondent bien à des pavages par dimères.

Définition 35 (Automate des couleurs) :

On considère l'automate \mathcal{A} de sommets $\{R, V, B\}$, avec des transitions dans l'alphabet $\{r, v, b\}$, comme indiqué sur la figure ci-après.



On ne s'intéresse ici qu'aux mots qu'on peut obtenir avec cet automate, tous les états sont donc implicitement initiaux et finaux sans contexte précis. Le choix d'une condition au bord, d'un alignement pour η_0 sur une des trois grilles hexagonales, revient à choisir un état initial parmi $\{R, V, B\}$.

La couleur dans $\{r, v, b\}$ associée à un cycle γ est intrinsèque, et ne dépend pas de l'alignement du pavage dans $\{R, V, B\}$.

Notons que, de par les symétries géométriques de l'automate en question, son langage est invariant par permutations circulaires. Du point de vue géométrique, appliquer la même permutation circulaire à plusieurs cycles revient à tous les décaler d'un cran vers le haut ou le bas sur la grille.

Proposition 36 :

Soit $\eta = (\gamma_i, c_i)_{i \leq L}$ une famille de L cycles alignés sur les grilles hexagonales, avec des couleurs $c_i \in \{r, v, b\}$, sans croisements entre deux cycles.

On note $\gamma \triangleleft \gamma'$ lorsque le cycle γ est inclus dans le cycle γ' . On dit en particulier que les cycles γ et γ' sont *consécutifs* lorsqu'il n'existe pas de cycle γ'' qui s'intercale entre les deux, tel que $\gamma \triangleleft \gamma'' \triangleleft \gamma'$. Par abus de notation, on aura toujours $\gamma \triangleleft \infty$, et on dira que γ et ∞ sont consécutifs lorsqu'aucun cycle n'entoure γ .

La famille η est associée à un pavage si et seulement si, pour toute suite de cycles consécutifs décroissante $\infty \triangleright \gamma_{\sigma(1)} \triangleright \dots \triangleright \gamma_{\sigma(k)}$, le mot $(c_{\sigma(j)})_{1 \leq j \leq k}$ est accepté par l'automate des couleurs, avec l'état initial correspondant à la condition au bord η_0 .

Démonstration. Il suffit de vérifier que c'est bien le cas pour un seul cycle, lors d'une interface entre deux domaines bien pavés, pour conclure dans le cas général par induction structurelle.

Supposons par exemple que η_0 est aligné sur la grille rouge, donc que l'état initial est R . Dans ce cas, les *flips* descendants correspondent aux centres des hexagones de

la grille rouge, donc forment des cycles étiquetés r , et après ces *flips* on se retrouve bien avec des cubes alignés sur la grille bleue, donc dans l'état B de l'automate. Alternativement, les *flips* montants sont associés aux cycles verts v , et la configuration obtenue est elle aussi alignée sur la grille verte V .

Quitte à translater d'un cran vers le haut ou le bas, à appliquer une permutation circulaire sur les trois grilles, le même raisonnement nous donne les transitions partant de V et B . □

Pour pouvoir corriger un cycle γ spécifique, il ne sera donc pas suffisant de noter sa couleur, il faudra en fait identifier la *transition* qu'il réalise dans l'automate, qui dépend donc non seulement de γ mais aussi de tous les cycles qui l'entourent dans le pavage η .

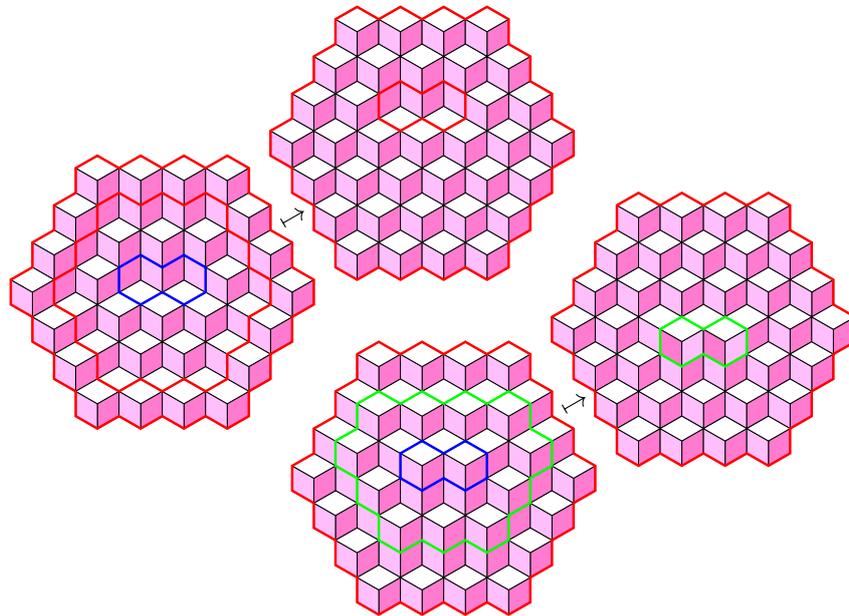


FIGURE 20 – Exemples de corrections de cycles.

Considérons la figure 20. Supposons par exemple qu'on souhaite corriger le cycle γ rouge intérieur du pavage η en haut à gauche. Ce cycle réalise une transition $R \xrightarrow{r} B$, donc on va translater le cycle bleu à l'intérieur d'un cran vers le *haut*, pour que la transition $B \xrightarrow{v} V$ qu'il réalisait devienne $R \xrightarrow{r} B$ et reste compatible avec les cycles qui l'entourent. De la même façon, dans l'exemple en bas à droite, si on souhaite corriger le cycle vert, qui réalise la transition $R \xrightarrow{v} V$, alors le cycle bleu à l'intérieur devra être décalé d'un cran vers le *bas* pour réaliser cette transition à son tour. Le cycle bleu est différemment translaté dans les deux cas mais le pavage qu'il délimite reste, lui, le même.

Lemme 37 :

L'opération $\eta \mapsto \eta'$ ainsi décrite est injective.

Démonstration. Soient deux pavages $\eta_1 \neq \eta_2$ qui contiennent tous deux le même cycle γ qu'on cherche à corriger.

Supposons qu'il existe un cycle $\gamma' \in \eta_1$ non-inclus dans γ , et qui n'est *pas* dans η_2 . Dans ce cas, on aura aussi $\gamma' \in \eta'_1$ et $\gamma' \notin \eta'_2$, puisque l'opération $\eta \mapsto \eta'$ n'agit qu'à l'intérieur du cycle γ , d'où $\eta'_1 \neq \eta'_2$.

Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, même en permutant les deux pavages, c'est que γ est entouré par les *mêmes* cycles dans η_1 et η_2 . En particulier, on obtient η'_1 et η'_2 en appliquant la même translation aux cycles dans γ . Comme $\eta_1 \neq \eta_2$, il existe tout de même un cycle $\sigma \triangleleft \gamma$ qui est dans η_1 et pas η_2 (ou le contraire). Après translation de σ , on a donc bien un cycle σ' dans η'_1 et pas η'_2 , ce qui conclut la preuve. \square

Si on souhaite corriger deux cycles sans inclusions l'un dans l'autre, on n'a pas à se soucier de l'ordre, les opérations agissent sur des domaines simplement connexes disjoints et donc commutent. En revanche, si on souhaite corriger deux cycles $\gamma \triangleleft \gamma'$, il convient de commencer par γ . En effet, si on corrige d'abord γ' , non seulement γ n'existera plus en tant que tel, mais il pourra se retrouver translaté *différemment* selon le pavage η dans lequel on a corrigé γ' . Au contraire, si on commence par corriger η , η' restera inchangé.

Notons enfin que, si on obtient une configuration η' en corrigeant un cycle γ d'un pavage η , en notant $|\gamma|$ la longueur du cycle, on a :

$$\mathcal{H}(\eta) = \beta|\gamma| + \mathcal{H}(\eta').$$

3.3 Argument de Peierls

On dispose désormais de tous les outils nécessaire pour transposer l'argument de Peierls, utilisé par exemple pour montrer une polarisation dans le cas sous-critique pour Ising [FV17].

Théorème 38 (Argument de Peierls) :

Soient Λ un domaine quelconque et $u \in \Lambda$ un sommet. Si $\beta > \ln(2)$, alors :

$$\mathbb{E}_{\Lambda, \beta}[T(u)] \leq \exp\left(\frac{9e^{2\beta}}{2(e^\beta + 2)^2} \times \frac{1}{(e^\beta - 2)^2}\right) < \infty.$$

Démonstration. On utilise ici la relation $\mathbb{E}[T] = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(T \geq k)$. C'est donc en fait $\mathbb{P}_{\Lambda, \beta}(T(u) \geq k)$ qu'on va d'abord majorer.

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Si $T(u) \geq k$ dans le pavage η , il contient en particulier k cycles

$(\gamma_i)_{1 \leq i \leq k}$ concentriques autour de u , ce qu'on notera $u \triangleleft \gamma_1 \triangleleft \dots \triangleleft \gamma_k$. Quitte à compter certains pavages η en double on a donc :

$$\mathbb{P}(T(u) \geq k) \leq \frac{1}{Z_{\Lambda, \beta}} \sum_{u \triangleleft \gamma_1 \triangleleft \dots \triangleleft \gamma_k} \sum_{\eta \text{ compatible}} e^{-\mathcal{H}(\eta)}.$$

Lorsque η est compatibles avec les k cycles concentriques $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq k}$, on peut corriger ces cycles et se ramener à une configuration η' , de sorte que :

$$\exp(-\mathcal{H}(\eta)) = \prod_{i=1}^k e^{-\beta|\gamma_i|} \times \exp(-\mathcal{H}(\eta')),$$

comme expliqué dans la sous-section précédente. En passant à la somme on a donc :

$$\mathbb{P}(T(u) \geq k) \leq \sum_{u \triangleleft \gamma_1 \triangleleft \dots \triangleleft \gamma_k} \prod_{i=1}^k e^{-\beta|\gamma_i|} \times \left(\frac{1}{Z_{\beta}} \sum_{\eta \text{ compatible}} e^{-\mathcal{H}(\eta')} \right).$$

Par injectivité de la transformation $\eta \mapsto \eta'$, on se retrouve à droite avec une somme sur *un sous-ensemble* de pavages, qu'on peut trivialement majorer par $Z_{\Lambda, \beta}$, la même somme mais sur *tous les pavages*. On peut donc majorer toute la parenthèse par 1. En ce qui concerne la somme de gauche, On peut commencer par oublier l'ordre des k cycles disjoints, ce qui fait apparaître un facteur de normalisation $k!$, puis « décorréler » les cycles en oubliant le fait qu'ils sont disjoints :

$$\mathbb{P}(T(u) \geq k) \leq \frac{1}{k!} \sum_{u \triangleleft \gamma_1} e^{-\beta|\gamma_1|} \sum_{u \triangleleft \gamma_2} \dots \sum_{u \triangleleft \gamma_k} e^{-\beta|\gamma_k|} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{u \triangleleft \gamma} e^{-\beta|\gamma|} \right)^k.$$

En réinjectant cette majoration dans l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}[T(u)] \leq \exp \left(\sum_{u \triangleleft \gamma} e^{-\beta|\gamma|} \right).$$

Sans perte de généralité, quitte à traduire, supposons $u = 0$. On peut associer à chaque tel cycle γ (au moins) un sommet $id \in i\mathbb{N}$ sur la demi-droite imaginaire positive, sans quoi le cycle n'entoure pas réellement 0. Si le cycle est de longueur k , on peut établir l'inégalité $8d + 10 \leq 3k$. Cette inégalité est optimale, car si par exemple 0 est au centre d'un hexagone, on a $d = 1$ et $k = 6$. A fortiori, on a la majoration $d \leq \frac{3}{8}k - 1$, donc en incluant 0, la longueur du cycle k étant fixée, on peut choisir au plus $\frac{3}{8}k$ positions de départ le long de $i\mathbb{N}$.

Une fois ce point de départ fixé, γ est en particulier un chemin auto-évitant sur une grille hexagonale (3-régulière) de longueur k , et on dénombre $3 \times 2^{k-1}$ tels

chemins. En réinjectant ces données, on obtient la majoration :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \ll \gamma} e^{-\beta|\gamma|} &\leq \sum_{\substack{k \geq 6 \\ k \in 2\mathbb{N}}} \frac{3}{8}k \times 3 \times 2^{k-1} \times e^{-\beta k} \\ &= \frac{9}{8} \sum_{l \geq 3} l \left(\frac{4}{e^{2\beta}} \right)^l. \end{aligned}$$

Ainsi, dès que $x = \frac{4}{e^{2\beta}} < 1$, dès que $\beta > \ln(2)$, cette série en l est sommable, et sa somme pour $l \in \mathbb{N}$ est égale à $\frac{x}{(x-1)^2}$. En réinjectant cette majoration-là, par croissance de l'exponentielle :

$$\mathbb{E}_{\Lambda, \beta}[T(u)] \leq \exp\left(\frac{9e^{2\beta}}{2(e^\beta + 2)^2} \times \frac{1}{(e^\beta - 2)^2}\right).$$

□

Corollaire 39 (Limite thermodynamique) :

Cette majoration reste vraie si on considère l'espérance contre une mesure limite, associée à des pavages aléatoires sur le domaine $\Lambda = \mathbb{C}$.

Remarque 40 (Planarité des pavages) :

Une conséquence du théorème est que, dans le pavages limite, on a toujours un contrôle local sur $|H - H_0|$.

Cependant, si on se place loin d'un sommet u , plus spécifiquement loin du plus grand cycle qui entoure u (qui existe car $T(u) < \infty$), on peut considérer un autre sommet v dont la hauteur est « indépendante » de celle de u .

Or, sur un domaine Λ compact arbitrairement grand contenant u , $H(u)$ peut malgré tout prendre des valeurs arbitrairement grandes.

De façon informelle, un raisonnement de type Borel-Cantelli nous laisse ainsi penser que la surface limite n'est presque-sûrement *pas* plane, et que la hauteur prendra des valeurs arbitrairement grandes.

4 Modèle $O(N)$ par boucles, cas sur-critique ?

Dans la partie précédente, on s'est intéressé à l'étude du cas sous-critique. L'argument de Peierls était là un outil assez souple, qu'on a su adapter à notre cas. L'étude du cas sur-critique est généralement beaucoup plus spécifique à chaque modèle, et doit souvent se traiter au cas par cas.

J'ai ainsi exploré la bibliographie existante sur les fonctions lipschitziennes aléatoires et les familles de cycles aléatoires. C'est ainsi que j'ai découvert le modèle $O(N)$ par boucles, sur lequel des recherches sont menées assez activement par la communauté des modèles de percolations.

Le peu de résultats disponibles sur ce modèle dans le cas sur-critique nous ont incités à mettre cet aspect du problème de côté pour se concentrer sur la recherche de généralisations du cas sous-critique, ce sur quoi nous reviendrons dans la dernière section.

Dans cette section, nous allons tout de même introduire ce modèle $O(N)$ par boucles et énoncer quelques propriétés montrées ou conjecturées, afin de mieux situer ce modèle-là par rapport à nos pavages aléatoires.

4.1 Modèle $O(N)$ par boucles

Pour avoir une vue d'ensemble sur les modèles $O(N)$ par boucles (et par *spin*), on pourra se référer à la très complète synthèse de Peled et Spinka [PS17], qui sera notre référence pour presque tout ce qui suit dans la section.

Définition 41 (Modèle $O(N)$ par boucles) :

Posons \mathbb{H} le réseau hexagonal, et considérons $G \subset \mathbb{H}$ un sous-graphe induit fini et connexe.

Une configuration ω est ici un sous-graphe $\omega \subset G$ dont tous les sommets sont de degré pair (donc égal à 0 ou 2), qui se décompose donc de façon unique en une famille $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq L(\omega)}$ de $L(\omega)$ cycles. On pose également $o(\omega) = \sum_{i=1}^{L(\omega)} |\gamma_i|$ la longueur cumulée des cycles de ω .

Étant donnés $x > 0$ et $N > 0$, on définit le poids de ω par $x^{o(\omega)} \times N^{L(\omega)}$. Quitte à normaliser, on obtient une mesure de probabilité sur les familles de cycles dans G .

Lorsque $x < 1$, ce modèle favorise les ensembles de cycles courts. Lorsque $x > 1$, ce modèle favorise les ensembles de cycles longs. À la limite $x \rightarrow \infty$, on ne charge que les ensembles de cycles de densité maximale, tels que le nombre d'arêtes de ω est maximal.

Lorsque $N < 1$, ce modèle favorise les graphes à peu de cycles. Lorsque $N > 1$, ce modèle favorise les graphes à beaucoup de cycles. Lorsque $N = 1$, le modèle est en fait équivalent au modèle de Ising sur le réseau \mathbb{T} .

Remarque 42 (Cas N entier) :

Lorsque $N \in \mathbb{N}^*$ est entier, on peut alternativement voir le modèle précédent comme une mesure de Gibbs sur des ensembles de cycles *colorés*.

Plus précisément, avec ce point de vue, une configuration est une famille de cycles N -colorés $\omega = (\gamma_i, c_i)_{1 \leq i \leq L(\omega)}$ avec $c_i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, de Hamiltonien $\mathcal{H}(\omega) = -\beta L(\omega)$, avec la température inverse $\beta = -\ln(x)$.

Remarque 43 (Simplification du modèle des pavages par dimères) :

Rappelons que dans notre modèle, un pavage s'identifie à une famille de cycles, chacun aligné sur *une* grille hexagonale (parmi trois), avec des règles précises régissant quel type de cycle on peut inclure dans quel autre. Plus précisément, on peut inclure deux types de cycles parmi trois dans un type, correspondant à une « montée » ou une « descente » de niveau pour la fonction de hauteur. En outre, le poids d'une famille de cycles est proportionnel à la longueur totale de ses cycles.

Il peut alors sembler naturel de simplifier légèrement le modèle, en ne considérant que des cycles sur *une seule* grille hexagonale, pouvant être de type montant ou descendant. On se ramène ainsi au modèle $O(2)$ par boucles.

Dans notre modèle de pavages aléatoires, le type associé à un cycle (montant ou descendant) est en fait une conséquence directe de sa position sur le réseau \mathbb{T} et par rapport aux autres cycles. On pourrait donc vouloir considérer le cas $N = 1$, sous prétexte que ce n'est que le réseau qui change entre les deux modèles, mais qu'il n'y a qu'un seul type de lignes, ou même une valeur intermédiaire $1 < N < 2$. Le souci est que dans ce cas on perd l'analogie avec les fonctions lipschitziennes, qui était notre objet d'étude initial, les lignes de niveau n'étant qu'un outil de démonstration.

En partant de ce constat, il est naturel de se demander si une transition de phase a déjà été démontrée dans le cadre du modèle $O(2)$, voire plus généralement $O(N)$.

4.2 Comportement à haute température et transition de phase

Sans plus de suspense, annonçons le résultat à température infinie. On ne s'intéressera pas aux détails de la preuve, qui est longue et compliquée, et utilise par exemple un couplage entre *deux* modèles $O(1)$ sans intersections, associés aux deux types de cycles du modèle $O(2)$.

Théorème 44 (Glazman, Manolescu [GM18]) :

On se place dans le cas $N = 2$, et $x = 1$ (donc à température infinie). Notons ici Λ_k le domaine de \mathbb{H} dont les sommets sont à distance au plus k de 0.

Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout domaine G contenant Λ_{2k} (éventuellement $G = \mathbb{H}$ avec une mesure limite), on a :

$$\mathbb{P}_G(\text{un cycle est inclus dans } \Lambda_{2k} \text{ et entoure } \Lambda_k) \geq c > 0.$$

Ainsi, ce modèle contient des cycles à toute échelle. Conditionnellement à un ensemble de cycles fixé, les choix de couleurs sont alors uniformes et indépendants, et induisent une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} du point de vue des valeurs prises par la fonction lipschitzienne d'une zone à l'autre.

Par analogie, pour les mesures limites de nos pavages, on s'attend à ce que la variable aléatoire T soit infinie en tout point. C'est rassurant, dans le sens où on s'attend d'autant plus à observer de très fortes variations de la fonction de hauteur, au contraire de notre cas sous-critique où $\beta > \ln(2)$. Cependant, la démonstration de ce théorème est très spécifique non seulement au modèle $O(2)$ mais aussi au choix de la température infinie ($x = 1$), ce qui concrètement ne nous avance pas sur l'étude de notre cas sur-critique.

Un diagramme de phase a été conjecturé par Nienhuis pour le modèle $O(N)$ avec $N \in [0, 2]$, avec une transition au seuil $x_c(N) = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2-N}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ entre le cas basse température (décroissance exponentielle du nombre de boucles) et le cas haute température (boucles macroscopiques).

En utilisant d'autres arguments que pour le cas $(N, x) = (2, 1)$, la présence de cycles macroscopiques a été démontrée pour des paramètres $N \in [1, 2]$ et $x = x_c(N)$ précisément [DCGPS17], ce qui établit un comportement au seuil critique conjecturé. Cependant, l'absence de monotonie intrinsèque au modèle $O(N)$, au contraire d'un modèle de percolations aléatoires de \mathbb{Z}^d par exemple, fait que ce résultat ne se propage pas de $x_c(N)$ aux paramètres $x > x_c$. Il n'existe donc pour l'instant aucun résultat théorique dans le régime haute température $x \xrightarrow{<} 1$, même si le diagramme de phase conjecturé semble corroborée par les simulations numériques.

Face à la difficulté de l'étude du cas sur-critique pour ce modèle *en apparence* plus simple, il nous a semblé plus pertinent de concentrer nos efforts sur la généralisation du cas sous-critique : c'est là le sujet de la prochaine et dernière partie.

5 Cas $(2, 2, 1)$, généralisation du cas sous-critique ?

En contractant un pavage de Penrose selon certaines des cinq directions, on peut obtenir un pavage par dimères apériodique, associé à un plan de pente irrationnelle. Obtenir des bornes sur la hauteur dans les pavages par dimères apériodiques permettrait donc peut-être d'en déduire des propriétés dans le cas Penrose.

On souhaiterait désormais étendre la borne précédemment obtenue sur l'espérance de la hauteur absolue à basse température dans un cadre plus général, idéalement à l'aide d'un argument de Peierls similaire à celui utilisé dans le théorème 38.

Commençons donc par décrire la structure de cette démonstration. Il nous faut une bonne notion de *ligne de niveau*, qui vérifie des propriétés du type :

- On peut quantifier à quel point la ligne de niveau affecte H , de sorte qu'on se ramène de l'étude de H à celle de T , le nombre de cycles qui entourent chaque point.
- On peut corriger une ligne de niveau présente dans η , pour se ramener à une configuration η' de façon injective.
- On doit avoir en outre $\mathcal{H}(\eta) \geq \mathcal{H}(\eta') + O(\beta|\gamma|)$.

En admettant qu'on dispose de ces propriétés, alors on peut peu ou prou dérouler la même démonstration pour obtenir une borne sur $\mathbb{E}[T]$ puis sur la hauteur.

La notion de ligne de niveau précédemment introduite était très spécifique au cas $(1, 1, 1)$. Si une généralisation de cette notion ne semble pas impossible à atteindre, nous nous sommes heurtés à plusieurs difficultés, même dans d'autres cas périodiques simples. Dans cette dernière partie, nous allons donc exposer nos tâtonnements dans le cas du pavage périodique discrétisant le plan de normale $\vec{n} = (2, 2, 1)$, au travers de plusieurs pistes de réflexion.

5.1 Pavage $(2, 2, 1)$ et règles locales

Considérons le pavage montré sur la figure 21. Avec les paramètres $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 2)$, on obtient une fonction de hauteur H positive minimale (avec $H(0) = 4$) périodique.

Notons que la grille hexagonale associée, en gras sur la figure 21, doit ici être translatée 5 fois au lieu de 3 pour obtenir tout \mathbb{T} , et que certaines arêtes verticales se superposent d'une grille à l'autre.

Pour pouvoir mettre de l'aléatoire sur cette surface, il nous faut désormais un ensemble de règles locales qui la décrit. Le voisinage d'une tuile blanche est identique au cas $(1, 1, 1)$, on peut donc garder ces règles locales. De même, horizontalement, le voisinage des tuiles

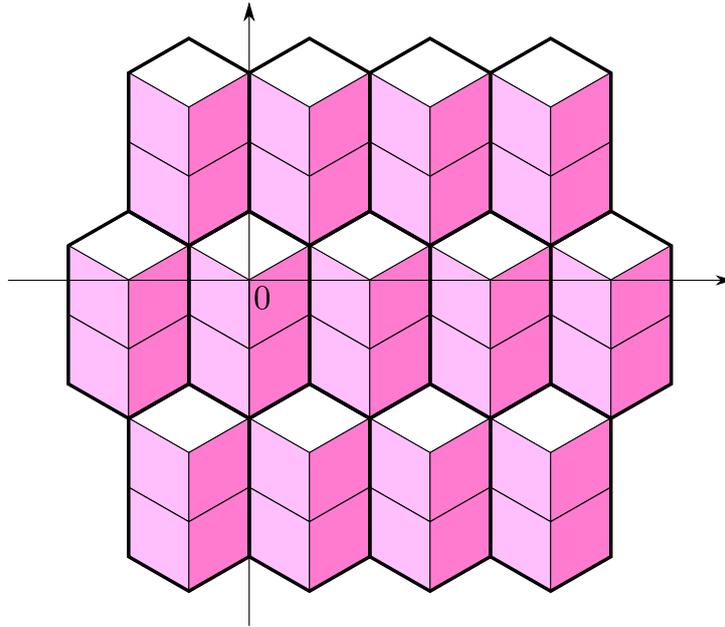


FIGURE 21 – Discrétisation du plan $(2, 2, 1)^\perp$.

roses reste le même, avec une alternance clair-foncé entre les deux types de tuiles. En ce qui concerne la juxtaposition verticale, on retrouve deux tuiles roses identiques accolées, on ne peut donc pas interdire ce motif. Sans plus de règles, on autoriserait cependant un zigzag entre les deux tuiles roses, empilé à l'infini verticalement, sans aucune tuile blanche. Pour éviter cette possibilité, on va donc interdire les piles verticales de *trois* tuiles roses de même nature. Avec ces règles-là, on a encore la possibilité d'obtenir le pavage $(1, 1, 1)$, il nous faut donc interdire que les tuiles roses soient prises en sandwich entre deux tuiles blanches, pour qu'il y ait toujours *au moins* deux couches de zigzag rose superposées verticalement. On obtient ainsi l'ensemble de motifs interdits représenté sur la figure 22. Le pavage $(2, 2, 1)$ de la figure 21 est alors, à translation près, l'unique pavage respectant ces règles. Insistons sur la nature non canonique du choix des règles induisant le pavage, qui peut être obtenu d'une infinité de manières différentes.

5.2 Règles locales et lignes de niveau

Dans le cas $(1, 1, 1)$, les lignes de niveau étaient directement données par les arêtes à l'intérieur d'un motif interdit. On va ici décortiquer un exemple pour voir en quoi il n'est pas évident de généraliser cette notion pour un ensemble de règles différent.

Commençons par expliquer précisément ce qui est représenté sur la figure 23. Le pavage considéré est symétrique, ce qu'on voit de part et d'autre de l'axe en gras correspond simplement à deux représentations des erreurs. Le code couleur consiste à représenter

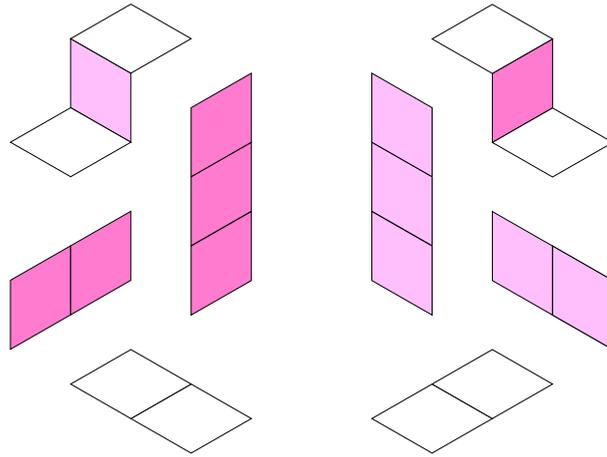


FIGURE 22 – Motifs interdits pour le pavage $(2, 2, 1)$.

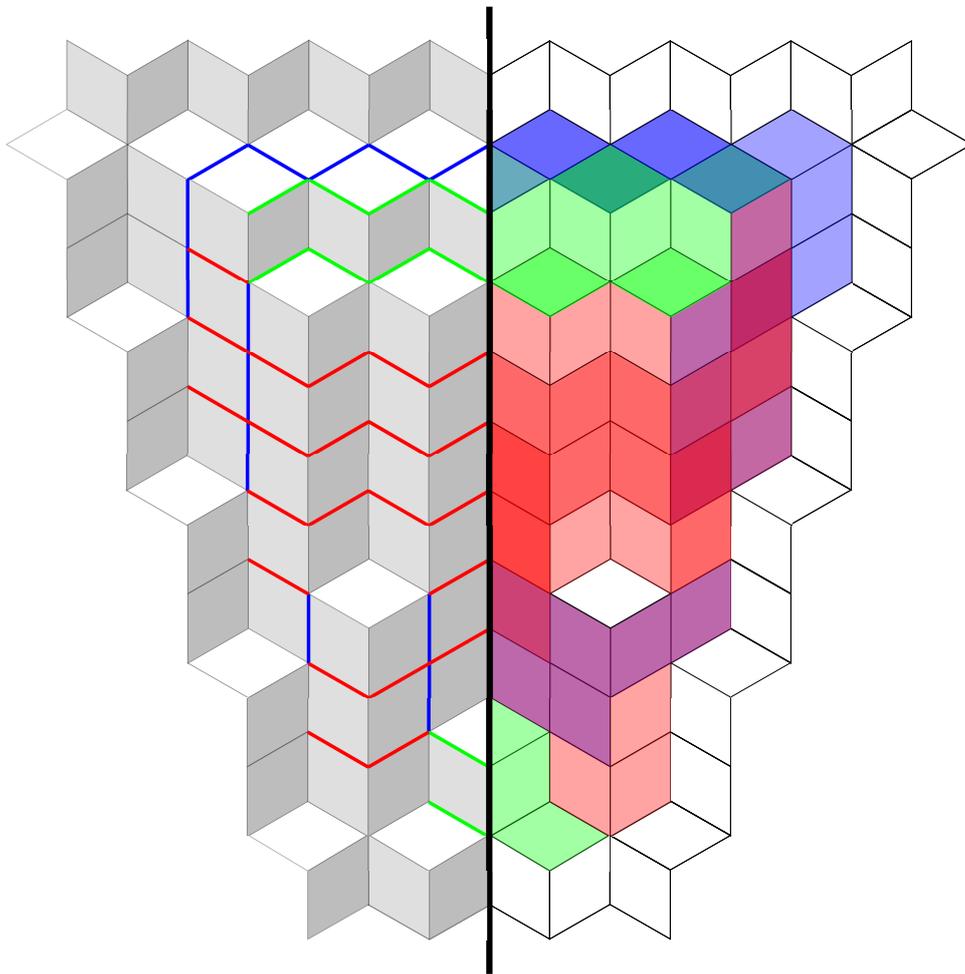


FIGURE 23 – Représentation graphique des motifs interdits sur un exemple.

les erreurs à deux tuiles en bleu, celles à trois tuiles verticales en rouge, et celles à trois tuiles en escalier en vert. À gauche, on représente les arêtes à l'intérieur des motifs interdits. À droite, on représente le motif interdit lui-même, l'intensité de chaque couleur

correspondant au nombre de motifs interdits superposés contenant la tuile en question.

Dans le cas $(1, 1, 1)$, on aurait directement observé une union de cycles, sans aucun sommet de degré 1. Ce n'est de toute évidence pas le cas ici, ne serait-ce qu'au bord de la figure où on a des sommets de degré 1. Dans la partie centrale de la figure, très rouge, on constate que de nombreuses erreurs s'empilent. Il est alors difficile de déterminer quelles arêtes seraient réellement utiles, et à quelle erreur associer une arête précisément.

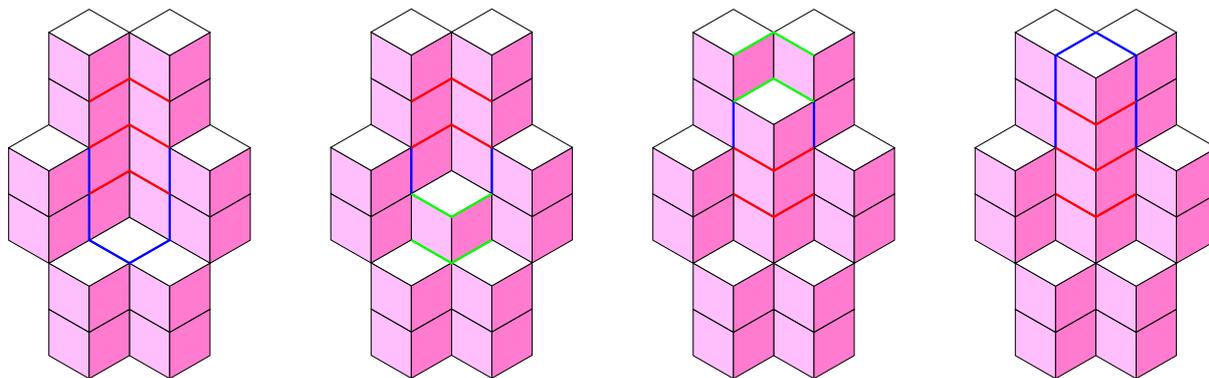


FIGURE 24 – Cycles induits sur des exemples minimaux.

Pourtant, si on se limite à des exemples minimalistes, comme ceux de la figure 24, des cycles apparaissent bel et bien de façon évidente. Sur les deux pavages au centre, on n'a fait qu'un seul *flip* haut ou bas, et un unique cycle se forme, utilisant exactement une fois chaque erreur pour ses arêtes. Aux bords, deux *flips* ont été faits, et déjà une question apparaît : on a en effet un cycle « maximal » évident, aligné sur la grille hexagonale associée au cas $(2, 2, 1)$, mais aussi un plus petit cycle qui forme un hexagone régulier, aligné sur la grille du cas $(1, 1, 1)$. Devrait-on alors considérer les deux, avec des arêtes qui se superposent ? En outre, pour le grand cycle, les arêtes rouges utilisées sont à l'intérieur de *deux* motifs interdits chacune, donc à quelle règle les associer ?

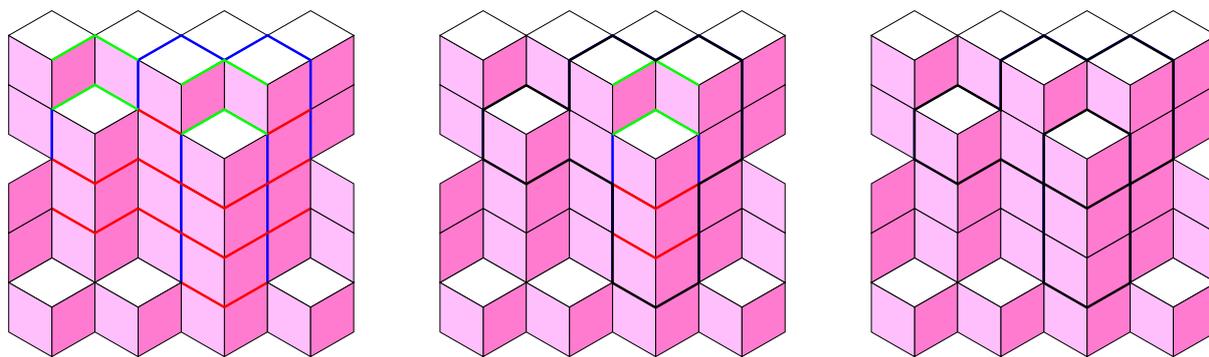


FIGURE 25 – Construction d'une famille de cycles induits.

En outre, même quand les cycles se définissent sans ambiguïtés, on peut aboutir à des objets « mal pavés ». Considérons par exemple la figure 25, dans laquelle on construit au

fur et à mesure des cycles qui découpent l'espace en régions au sein desquelles aucune règle locale n'est violée. Le souci est alors que, la région intermédiaire contenue entre les deux cycles est elle-même mal pavée, dans le sens où on ne pourrait pas l'observer comme un sous-pavage de notre pavage infini.

Notons que toutes ces interrogations se sont posées sur *ce choix* précis de règles locales. Ceci pourrait donc sous-entendre qu'il faut des règles locales spécifiques pour que la notion de lignes de niveau soit bien définie, voire même que le comportement à basse température, l'existence d'un seuil β au delà duquel la hauteur est contrôlée pour les mesures limites, dépend lui-même du choix de règles locales.

Essayer d'avoir une approche plus générique, sans chercher à passer par des cycles pour appliquer un argument de Peierls, en assignant éventuellement un poids différent à chaque type de violation de règle locale, est donc une piste de réflexion ouverte.

5.3 Lignes de niveau géométriques et stratification de \mathbb{Z}^3

Face à la situation précédemment décrite, nous avons voulu explorer une autre piste, en cherchant à définir les lignes de niveau de façon globale et intrinsèque, sans que la notion de règles locales n'intervienne *a priori*.

Cette approche n'est pas arbitraire. En effet, dans le cas $(1, 1, 1)$, on avait une équivalence entre la construction assez algébriques de ces lignes de niveau et un point de vue plus géométrique, sur les surfaces en question. En effet, en translatant la surface échelonnée η_0 le long de $e_3\mathbb{Z}$, on se retrouve à partitionner l'ensemble des faces carrées de \mathbb{Z}^3 . L'opération de *flip* sur un sommet correspond alors au fait de faire passer les faces adjacentes d'une strate à la suivante.

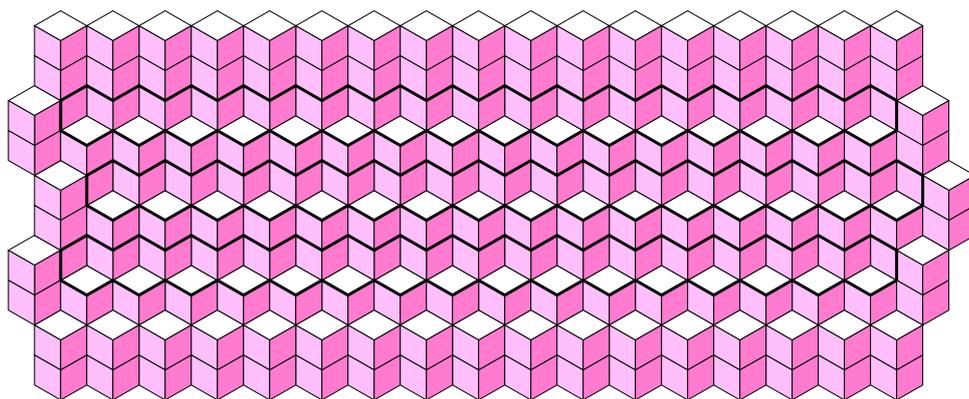


FIGURE 26 – Cycles délimitant une juxtaposition de strates.

Pour identifier un changement de strate, il suffit ainsi de chercher les tuiles qui ne devraient pas être là dans la strate en question, dans la translation du pavage infini

considérée. On peut voir un tel exemple de construction sur la figure 26. Si les cycles sont ici bien définis, sans même chercher à vérifier si cette approche permet effectivement d'emboîter plusieurs cycles à la suite, un souci de taille se pose déjà : les cycles ne correspondent vraiment pas aux violations de règles locales.

En effet, les seules arêtes au contact du cycle central au contact d'une erreur sont la plus à gauche et les trois les plus à droite. Pire, si on *corrige* ce cycle, en appliquant un *flip* à chaque sommet au centre d'un hexagone, on va en fait *créer* des erreurs tout au long du cycle (des piles de 3 tuiles en dessous, et des motifs en escalier au dessus). Ceci va explicitement à l'encontre des propriétés souhaitées dans l'introduction de cette section.

En réalité, sur cet exemple, une *autre* façon de délimiter les strates serait de ne prendre qu'un seul gros cycle, en ajoutant quatre arêtes sur les bords pour relier les trois cycles entre eux puis en effaçant toutes les arêtes à l'intérieur. Ceci vient du fait que, contrairement au cas $(1, 1, 1)$, les strates forment ici un *recouvrement* des faces carrées de \mathbb{Z}^3 au lieu d'une *partition*. Ainsi, la succession de tuiles en zigzag entre les cycles de la figure 26 aurait tout autant sa place dans l'une ou l'autre strate.

Cet autre choix de cycle délimitant les strates correspond en outre quasiment aux règles locales violées, les seules arêtes qui ne sont pas associées à une erreur étant les quatre ajoutées au bord pour recoller les trois petits cycles.

Cette approche par strates montre donc un certain potentiel, mais est pour l'instant limitée par la non-unicité de la famille de cycles induite, sans qu'un critère général pour décider ne se soit imposé à nous pour l'instant. Une approche universelle semble en outre difficile à concevoir puisque les règles locales elles mêmes ne sont pas canoniques ou uniques.

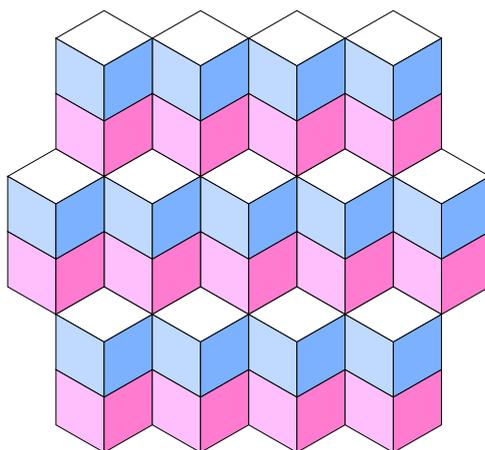


FIGURE 27 – Pavage $(2, 2, 1)$ coloré.

5.4 Tuiles colorées et règles locales

Une des principales différences entre les règles locales utilisées pour les cas $(1, 1, 1)$ et le cas $(2, 2, 1)$ est, justement, leur localité. Dans le cas $(1, 1, 1)$, nos règles ne concernaient que des paires de tuiles voisines, et étaient donc associés sans aucune ambiguïté à une seule et unique arête. Dans le cas $(2, 2, 1)$, notre notion de règles locales ne permet pas d'en faire de même.

L'utilisation de règles locales entre voisins pour des tuiles colorées est depuis longtemps un sujet d'intérêt chez les informaticiens. Si on dispose d'une unique tuile carrée, un pavage périodique du plan suivant le réseau \mathbb{Z}^2 est l'unique possibilité. Cependant, en ajoutant des couleurs sur ces carrés, avec des règles adaptées, on peut en faire un véritable modèle de calcul. Ainsi, les 56 dominos de Robinson (1971), ou plus récemment les 11 dominos minimaux de Jeandel et Rao (2015), constituent des exemples de familles de tuiles carrées qui pavent le plan, mais uniquement de manière apériodique. Pour plus de détails à ce sujet, on pourra lire le billet *Dominos apériodiques* [Fer18] posté sur le site *Images des mathématiques*.

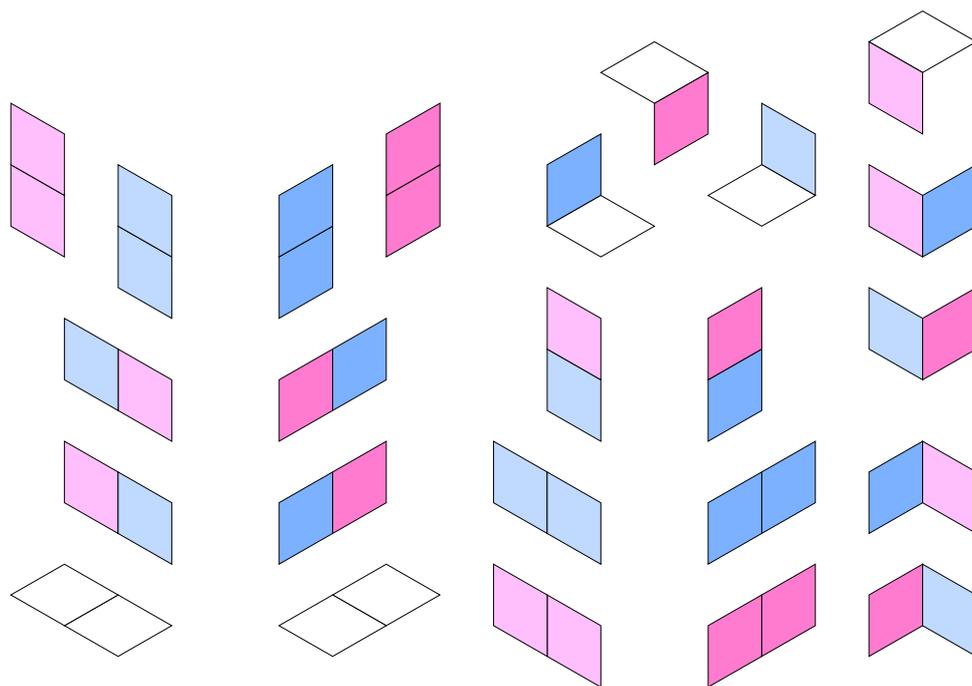


FIGURE 28 – Règles colorées pour le cas $(2, 2, 1)$.

On va désormais introduire un jeu de tuiles coloré, avec des règles adaptées, pour le cas $(2, 2, 1)$ qui nous intéresse. Cette approche a l'avantage de s'étendre assez facilement à tout motif périodique, et même à permettre de l'apériodicité. Cependant, le défaut est ici qu'on s'éloigne d'autant plus de la motivation physique initiale, puisque les contraintes énergétiques d'agencement dans un quasi-cristal sont d'ordre purement géométrique, sans

qu'il faille artificiellement introduire différents types pour désigner le même élément.

Considérons donc *deux* genres de tuiles « horizontales », les tuiles roses et les bleues, qui correspondraient aux deux niveaux de zigzags successifs. On souhaite donc trouver des tuiles roses au dessus des blanches, puis des bleues, puis à nouveau une couche de tuiles blanches, comme illustré sur la figure 27.

Cette structure est associée aux 24 règles locales sur la figure 28. La quantité de règles est volontairement loin d'être minimale, pour pénaliser toute interface non souhaitée entre deux tuiles. À titre de comparaison, on utilisait 8 règles pour le cas $(2, 2, 1)$ incolore et 6 pour le cas $(1, 1, 1)$.

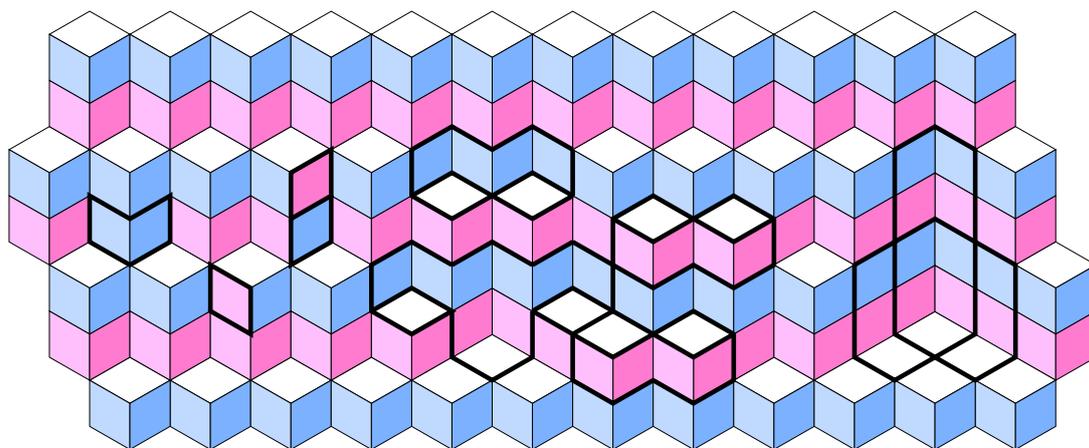


FIGURE 29 – Violations de règles locales sur un exemple.

Considérons ainsi l'exemple sur la figure 29. Sur les parties centrale et droite, on a uniquement modifié la configuration de base par *flips* successifs, ce qui influence la hauteur comme précédemment. On remarque dans ce cas qu'une structure « hexagonale » apparaît autour des sommets en question, comme c'était le cas précédemment. Ces hexagones peuvent avoir une hauteur de 1 ou 2, comme on le voit dans la partie centrale, et peuvent s'emboîter les uns dans les autres, comme on le voit à droite. On note en outre que les hexagones de hauteur 1 peuvent comporter deux arêtes supplémentaires autour de la tuile blanche, et que deux cycles différents peuvent se recoller le long de certaines arêtes, ce qui se produit typiquement si on juxtapose deux tuiles blanches via des *flips* montant pour l'une et descendant pour l'autre. Enfin, dans la partie gauche, à titre indicatif, on affiche des erreurs purement issues de tuiles colorées mal placées, mais géométriquement bien placées.

La notion de règles colorées nous montre donc un certain potentiel pour peut-être faire apparaître des cycles dans un cadre plus général.

5.5 Rayon d'une boule sans erreurs

Mentionnons finalement une dernière piste de réflexion, qui n'a pour l'instant pas été assez creusée pour conclure pleinement sur son potentiel. Dans cette approche, qui présente une alternative à la fonction de hauteur et aux considérations géométriques dans \mathbb{Z}^3 , on assigne à chaque sommet du réseau le rayon maximal jusqu'au quel le voisinage du sommet correspond à un sous-pavage de la configuration attendue. En reliant les minima locaux, on espère alors obtenir des cycles en lien avec les erreurs, qui nous permettraient d'appliquer un argument de Peierls. Cette approche n'est pas totalement sortie du chapeau, elle s'inspire des travaux de Marcus Pivato [Piv07], dans un contexte quelque peu différent.

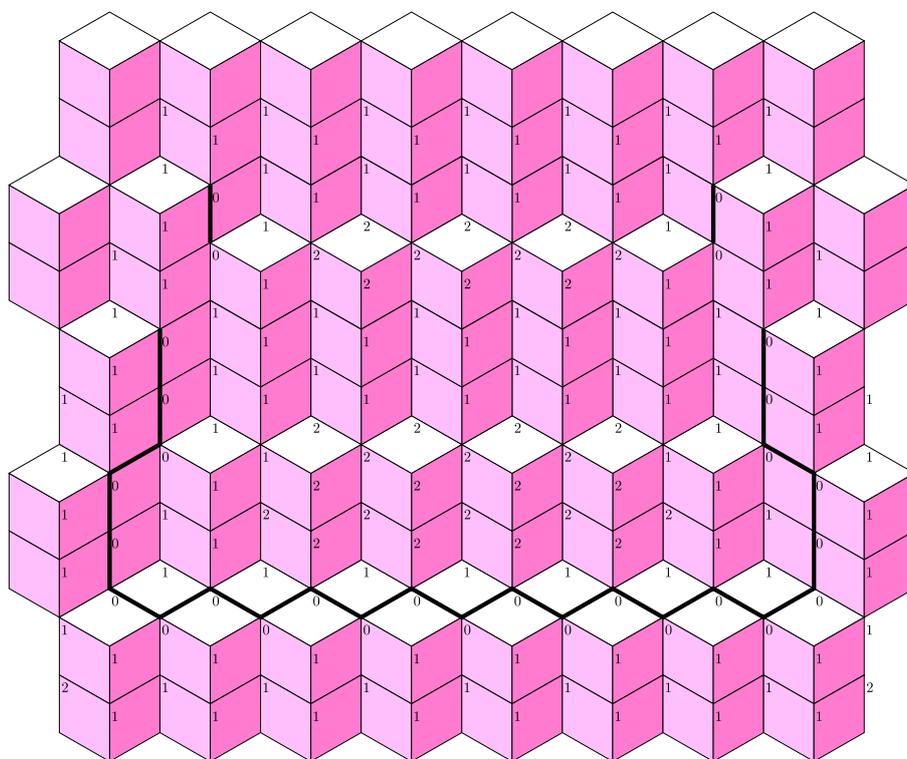


FIGURE 30 – Nombre de couches maximal sans erreur.

Ce rayon peut être celui d'une boule de \mathbb{R}^3 , ou bien le nombre de couches consécutives de tuiles qu'on peut mettre, ou bien le rayon de la boule dans le graphe associé au pavage. En utilisant comme rayon le nombre de couches de tuiles qu'on peut considérer autour du sommet tout en ayant un bon pavage, on obtient par exemple la figure 30. On y voit ainsi que des lignes se dessinent naturellement le long des minima globaux, mais qu'il nous reste beaucoup de façons de refermer ces lignes en cycles en restant dans des zones où la fonction de rayon vaut 1 partout. Cette approche semble pour l'instant donner des figures très floues, peu exploitables.

Conclusion

Dans ce rapport, nous avons introduit un nouveau modèle de pavages par dimères aléatoire, puis étudié la hauteur moyenne de ses sommets à basse température dans un cas particulier. Nous avons également vu la difficulté que pouvait représenter l'étude de ce modèle à haute température, ainsi que les obstructions à la généralisation du résultat établi.

En plus des pistes de réflexion déjà mentionnées dans la section précédente, il pourrait s'avérer salutaire de mettre l'argument de Peierls de côté pour essayer de borner la hauteur d'une toute autre façon.

Rappelons enfin que le travail de recherche ci-présent est né de la volonté de répondre à une question similaire dans le cas des pavages de Penrose. Au vu de la forte dépendance aux règles locales de nos raisonnements, il pourrait donc être pertinent d'essayer de transposer certains des arguments directement au cas des pavages de Penrose, sans nécessairement chercher à utiliser des pavages par dimères spécifiques comme point d'appui intermédiaire.

Références

- [BDTB⁺15] Cédric BOUTILLIER, Béatrice DE TILLIÈRE, Olivier BODINI, Éric RÉMILA *et al.* : Tilings and Tessellations. [CIMPA Research School](#), 2015.
- [Bou09] Cédric BOUTILLIER : The bead model and limit behaviors of dimer models. *The Annals of Probability*, 37(1), janvier 2009.
- [DCGPS17] Hugo DUMINIL-COPIN, Alexander GLAZMAN, Ron PELED et Yinon SPINKA : Macroscopic loops in the loop $O(n)$ model at Nienhuis' critical point, 2017.
- [dIHK11] Pierre de la HARPE et Félix KWOK : Prix Nobel de chimie, quasi-cristaux, périodicité et pavages de Penrose. [Images des Mathématiques](#), 2011.
- [DMPS18] Randal DOUC, Eric MOULINES, Pierre PRIOURET et Philippe SOULIER : *Markov Chains*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer International Publishing, 2018.
- [Fer18] Thomas FERNIQUE : Dominos apériodiques. [Images des Mathématiques](#), 2018.
- [FV17] Sacha FRIEDLI et Yvan VELENIK : *Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction*. Cambridge University Press, 2017.
- [GM18] Alexander GLAZMAN et Ioan MANOLESCU : Uniform Lipschitz functions on the triangular lattice have logarithmic variations, 2018.
- [Ken09] Richard KENYON : Lectures on Dimers, 2009.
- [Las14] Benoît LASLIER : *Stochastic dynamics of discrete interface and dimer models*. Thèse, Université Claude Bernard - Lyon I, juillet 2014.
- [Lev88] Leonid S. LEVITOV : Local rules for quasicrystals. *Communications in Mathematical Physics*, 119(4), 1988.
- [Piv07] Marcus PIVATO : Spectral domain boundaries in cellular automata. *Fundamenta Informaticae*, 78(3), 2007.
- [PS17] Ron PELED et Yinon SPINKA : Lectures on the Spin and Loop $O(n)$ Models, 2017.
- [SD90] Katherine J. STRANDBURG et Paul R. DRESSEL : Thermodynamic behavior of a Penrose-tiling quasicrystal. *Physical Review B*, 41, février 1990.
- [SF18] Mathieu SABLİK et Thomas FERNIQUE : Weak colored local rules for planar tilings. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, avril 2018.
- [Thu90] William P. THURSTON : Conway's Tiling Groups. *American Mathematical Monthly*, 97, 1990.
- [TJ90] Lei-Han TANG et Marko V. JARIĆ : Equilibrium quasicrystal phase of a Penrose tiling model. *Physical Review B*, 41, mars 1990.
- [Wil04] David Bruce WILSON : Mixing times of lozenge tiling and card shuffling Markov chains. *Annals of Applied Probability*, 14(1), février 2004.