

Partiel 2014

Aucun document autorisé. Les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Les nombres premiers plus petits que cent sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Exercice 1 – Représenter le diagramme de Hasse des diviseurs de 1968.

Exercice 2 – Quel est le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13.

Exercice 3 –

- (i) Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}, a$ impair $\implies a^2 \equiv_4 1$ et $a^2 \equiv_8 1$.
- (ii) Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}, a$ pair $\implies a^2 \equiv_8 0$ ou $a^2 \equiv_8 4$.
- (iii) Que peut-on en déduire quant à l'appartenance de $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ à l'ensemble des entiers naturels ?
- (iv) Soient a, b, c trois entiers naturels impairs. En déduire que ni $a^2 + b^2 + c^2$ ni $2(ab + ac + bc)$ ni $ab + ac + bc$ ne sont des carrés.
- (v) Peut-on établir un résultat analogue pour a, b, c trois entiers naturels pairs strictement positifs ? Justifier la réponse.

Exercice 4 – Etude de la suite de Fibonacci.

On définit la suite de Fibonacci de la façon suivante pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

On appelle φ la racine positive de l'équation $\varphi^2 = 1 + \varphi$

- (i) Montrer que $\varphi > 1$

(ii) Montrer par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \varphi^{n-2} \leq F_n \leq \varphi^{n-1}$$

(iii) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

(iv) En déduire que $F_n \wedge F_{n+1} = 1$.

Exercice 5 – On suppose que les chiffres utilisés pour une base sont pris dans la suite des nombres entiers que l'on séparera par des points.

- (i) Trouver les diviseurs premiers de 2015.
- (ii) Ecrire "2015" en base 8.
- (iii) Pour quelles bases b , le nombre '2015' s'exprime avec exactement 5 chiffres ?
- (iv) Existe-t-il une base dans laquelle '2015' s'écrit avec exactement deux chiffres et ces chiffres sont identiques ? Si oui, donner une solution.

Exercice 6 – Résoudre dans Z^2 les équations

- (i) $10u + 4v = 3$
- (ii) $10u + 4v = 4$

Exercice 7 – Un phare émet un signal jaune toutes les 15 minutes et un signal rouge toutes les 28 minutes. On aperçoit le signal jaune à 2h02 et le rouge à 2h00.

A quelle heure verra-t-on pour la première fois les deux signaux émis en même temps ?