

# CALCULABILITÉ ET DÉCIDABILITÉ : TD5

Licence Info 3 - Michele Pagani

4 avril 2013

---

## 1 Modèles de calcul

Soit  $P$  un programme dans un parmi les modèles de calcul vu en cours (i.e. GOTO, CM, TM) et  $x_0, \dots, x_n, y$  des données, on écrit

$$\llbracket P \rrbracket(x_0, \dots, x_n) = y$$

lorsque  $P \vdash (1, \sigma) \rightarrow^* (m+1, \sigma')$  et

– dans le cas du langage GOTO :

1.  $\sigma$  est le store qui associe aux premières  $n+1$  variables (on suppose que les variables de GOTO soient ordonnées  $X_0, X_1, X_2, \dots$ ) la valeur  $X_0 \mapsto x_0, \dots, X_n \mapsto x_n$ , et la valeur `nil` aux autres variables ;
2.  $\sigma'(X_0) = y$  et  $(m+1, \sigma')$  est un état final (i.e. le programme  $P$  a  $m$  instructions).

– dans le cas des machines CM :

1.  $\sigma$  est le store qui associe aux premiers  $n+1$  registres les valeurs  $R_0 \mapsto x_0, \dots, R_n \mapsto x_n$ , et la valeur 0 aux autres registres ;
2.  $\sigma'(R_0) = y$  et  $(m+1, \sigma')$  est un état final (i.e. le programme  $P$  a  $m$  instructions).

– dans le cas des machines de Turing TM :

1.  $\sigma$  est un store composé de  $k \geq n+1$  rubans avec valeur

$$\sigma = (\underline{B}x_0, \dots, \underline{B}x_n, \underline{B}, \dots, \underline{B})$$

2.  $\sigma' = (L_0 \underline{S}_0 R_0, \dots, L_k \underline{S}_k R_k)$  et  $\text{Pfx}(R_0) = y$  et  $(m+1, \sigma')$  est un état final (i.e. le programme  $P$  a  $m$  instructions). On rappelle que la fonction  $\text{Pfx}$  est définie par induction,  $\text{Pfx}(R) = \epsilon$  si  $R = \epsilon$  or  $R$  commence par  $B$ , et  $\text{Pfx}(R) = S \text{Pfx}(R')$  si  $R = SR'$  et  $S = 0$  ou  $S = 1$ .

**Exercice 1.** Programmer dans chacun des modèles de calcul GOTO, CM, TM la fonction somme  $n, m \mapsto n+m$ . Détailler le calcul de la valeur de  $\llbracket P \rrbracket(x, y)$ , où  $x$  et  $y$  sont les données représentant resp. 1 et 2 dans le modèle en considération.

**Exercice 2.** Programmer dans chacun des modèles de calcul GOTO, CM, TM l'égalité entre deux entrées :  $\llbracket =? \rrbracket(x, y) = \text{true}$  si  $x = y$ , sinon  $\llbracket =? \rrbracket(x, y) = \text{false}$ .

**Exercice 3.** La succession de Fibonacci est définie par  $F_0 = F_1 = 1$  et  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ . Programmer dans chacun des modèles de calcul GOTO, CM, TM la fonction  $n \mapsto F_n$ , associant à un nombre naturel  $n$ , l' $n$ -ème numéro dans la succession de Fibonacci.